ISSN 0002-3388

Номер 2

Март-Апрель 2024

ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

НАУКА

1727

СОДЕРЖАНИЕ

Номер 2, 2024

ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ И ИДЕНТИФИКАЦИЯ

Об одном численном методе оценки с заданной точностью квантильного критерия в случае кусочно-линейной функции потерь и гауссовской плотности вероятности
В. В. Нефедов 3

Стохастические модели трудоемкости вычислительных задач. II. Описание взаимодействия с базами данных
А. В. Борисов, А. В. Иванов 25

УПРАВЛЕНИЕ В СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ И В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Оценивание вероятностей переходов марковского двоичного входного сигнала нелинейной системы
В. А. Болдинов, В. А. Бухалев, А. А. Скрынников, И. Ф. Хисматов 43

Теоретико-игровой подход к управлению составом и структурой триангуляционной измерительной системы в условиях априорной неопределенности
Г. А. Угольницкий, Е. Н. Чепель 53

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

О диаграммах функций оптимального управления в задаче перемещения платформы с осцилляторами
О. Р. Каюмов 67

КОМПЬЮТЕРНЫЕ МЕТОДЫ

Обратная задача для распределенной системы из импульсной техники
Р. В. Хачатуров 84

СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

Математические модели управления производственно-финансовой деятельностью предприятия
Т. Г. Апалькова, О. А. Косоруков, А. В. Мищенко, В. И. Цурков 107

Интервальные наблюдатели для гибридных непрерывных стационарных систем
А. Н. Жирабок, А. В. Зуев, А. Е. Шумский 130

Управление буферизацией видеоинформации, декодированной из циклических структур
М. Ю. Звездочкин, В. В. Миронов 143

СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖУЩИМИСЯ ОБЪЕКТАМИ

Об управлении движением перспективного транспортного космического корабля с помощью ракетных двигателей
А. В. Сумароков 154

РОБОТОТЕХНИКА

Модификация аппарата нейронной сети Хопфилда для решения задачи оптимального распределения заданий в группе мобильных роботов
О. В. Даринцев, А. Б. Мигранов 169

CONTENTS

Number 2, 2024

INFORMATION PROCESSING AND IDENTIFICATION

On a numerical estimation method with a given accuracy of a quantile criterion in the case of a piece-linear loss function and a gaussian probability density
V. N. Nefedov 3

Stochastic models for time complexity of computing tasks: ii. Description of interaction with databases
A. V. Borisov, A. V. Ivanov 25

CONTROL IN STOCHASTIC SYSTEMS AND UNDER UNCERTAINTY

Estimation of probabilities of transitions of markov binary input signal of nonlinear system
V. A. Boldinov, V. A. Bukhalev, A. A. Skrynnikov, and I. F. Khismatov 43

A game-theoretic approach to managing the composition and structure of a bearing-only measurement system in conditions of a priori uncertainty
G. A. Ugolnickiy, E. N. Chepel 53

OPTIMAL CONTROL

On the optimal control function diagrams in the problem of the movement of a platform with oscillators
O. R. Kayumov 67

COMPUTER METHODS

Inverse Problem for a Distributed System from Pulse Technology
R. V. Khachaturov 84

SYSTEM ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH

Mathematical models for management of production and financial activities of an enterprise
T. G. Apalkova, O. A. Kosorukov, A. V. Mishchenko, V. I. Tsurkov 107

Interval observers for hybrid continuous-time stationary systems
A. Zhirabok, A. Zuev, A. Shumskya 130

Control of video buffering for videostreams decoded from cyclic structures
M. Y. Zvyozdochkin, V. V. Mironov 143

MOVING OBJECT CONTROL SYSTEMS

On advanced manned spacecraft motion controll using jet thrusters
A. V. Sumarokov 154

ROBOTICS

Modification of the hopfield neural network model for solving the task of optimal task allocation in a group of mobile robots
O. V. Darintsev, A. B. Migranov 169

ИЗВЕСТИЯ РАН. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2024, № 2, С. 3–24

ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ И ИДЕНТИФИКАЦИЯ

УДК 519.6

ОБ ОДНОМ ЧИСЛЕННОМ МЕТОДЕ ОЦЕНКИ С ЗАДАННОЙ ТОЧНОСТЬЮ КВАНТИЛЬНОГО КРИТЕРИЯ В СЛУЧАЕ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОЙ ФУНКЦИИ ПОТЕРЬ И ГАУССОВСКОЙ ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТИ

 В. Н. Нефедов[a], *
[a]*Московский авиационный институт (национальный исследовательский ун-т), Москва, Россия*
**e-mail: nefedovvn54@yandex.ru*

Поступила в редакцию 13.04.2023 г.
После доработки 14.08.2023 г.
Принята к публикации 02.10.2023 г.

Решение многих практических задач приводит к вычислению значений вероятностных критериев, наиболее распространенными из которых являются функционалы квантили и вероятности. Известно, что при достаточно общих предположениях методы, пригодные для решения задач нахождения значений вероятностного критерия, могут быть использованы для решения задачи квантильного анализа. Предлагаемый метод решения задачи квантильного анализа опирается на метод численного многомерного интегрирования, описанный в предыдущих работах автора. Одним из важных свойств этого метода интегрирования является универсальность (при его применении можем задавать произвольное количество переменных n и произвольное количество линейных ограничений r). Единственным ограничением является случай неприемлемо большого времени решения. Тем самым указанная универсальность переносится и на решение рассматриваемой задачи квантильного анализа.

Ключевые слова: квантильный анализ, функционал вероятности, метод численного многомерного интегрирования

DOI: 10.31857/S0002338824020021, **EDN:** VOTPQP

ON A NUMERICAL ESTIMATION METHOD WITH A GIVEN ACCURACY OF A QUANTILE CRITERION IN THE CASE OF A PIECE-LINEAR LOSS FUNCTION AND A GAUSSIAN PROBABILITY DENSITY

V. N. Nefedov[a], *
[a]*Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia*
**e-mail: nefedovvn54@yandex.ru*

The solution of many practical problems leads to the calculation of the values of probabilistic criteria, the most common of which are the quantile and probability functionals. It is known that, under fairly general assumptions, methods suitable for solving problems of finding the values of a probabilistic criterion can be used to solve the problem of quantile analysis. The proposed method for solving the problem of quantile analysis is based on the use of the method of numerical multidimensional integration described in the previous works of the author. One of the important properties of this integration method is universality (when using it, we can set an arbitrary number of variables n and an arbitrary number of linear constraints r). The only limitation is the case of an unacceptably long solution time. Thus, the indicated universality is transferred to the solution of the considered problem of quantile analysis.

Keywords: quantile analysis, probability functional, method of numerical multidimensional integration

Введение. Решение многих практических задач приводит к вычислению значений вероятностных критериев. Наиболее распространенными вероятностными критериями качества технических систем при случайных воздействиях являются функционалы квантили [1] и вероятности. Квантильный критерий может характеризовать точность системы управления при случайных возмущениях [1], гарантированную площадь взлетно-посадочной полосы, на которую летательный аппарат садится с заданной вероятностью в условиях ветровых помех [2] и т.д. Функционал вероятности характеризует обычно вероятность выполнения условий рассматриваемой задачи.

Как установлено в [1], при достаточно общих предположениях методы, пригодные для решения задач нахождения значений вероятностного критерия, могут быть использованы для решения задачи квантильного анализа.

Во многих случаях нахождение значения вероятностного критерия сводится к вычислению многомерного интеграла от плотности вероятности некоторого случайного вектора по заданному множеству, что представляет собой сложную вычислительную задачу [1]. Применение традиционных методов решения этой задачи (см., например, [3–5]), таких, как прямое интегрирование плотности вероятности или метод Монте-Карло, при высоких требованиях к точности получаемого результата приводит к недопустимо большим вычислительным затратам.

Таким образом, нахождение значения вероятностного критерия, а также решение задачи квантильного анализа упирается в разработку численных методов многомерного интегрирования с любой желаемой точностью. Понятно, что размерность n решаемой задачи будет невелика. Автором был проведен численный эксперимент при $n = 5$. В случае когда подынтегральная функция является плотностью нормального распределения, множеством интегрирования является многогранник, заданный несколькими линейными ограничениями (количество линейных ограничений в используемом методе не имеет большого значения), приближенное значение интеграла $\tilde{I} = 0.785685556863937$ было вычислено с абсолютной погрешностью $\delta = 0.000498\ldots$ (см. ниже пример 1). Соответственно, относительная погрешность составила 0.0634%. При этом применялся численный метод интегрирования, описанный в работах [6–9], являющийся универсальным в том смысле, что мы можем задавать произвольное количество переменных n и произвольное количество линейных ограничений r, но при этом при больших n время счета может оказаться неприемлемо большим.

Задача многомерного интегрирования с заданной точностью рассматривалась и в других публикациях, в частности в работе [12], в которой предлагаются методы, не обладающие указанным свойством универсальности. Например, случай, когда множеством интегрирования является многогранник, описан в [12] для максимального значения $n = 3$, а в случае эллипсоида – для $n = 2$. Между тем в [6] (см. табл. 1, 2 из этой работы), приводятся результаты численного эксперимента для эллипсоида при $n = 3$ (а сам метод универсален для любого n).

Предлагаемый в этой статье метод решения задачи квантильного анализа основан на применении метода численного многомерного интегрирования, описанного в [6–9], использующего последовательное k-этапное дробление исходного “внешнего” (для заданного подынтегрального множества) куба на кубы, получаемые последовательным делением ребер кубов пополам. Краткое описание этого метода приводится в разд. 1. В разд. 2 представлены основные определения и используемые в настоящей работе обозначения, связанные с функцией квантили. В разд. 3 приводятся некоторые вспомогательные методы и алгоритмы, связанные с рассматриваемым в этой работе кусочно-линейным случаем для целевой функции. В разд. 4 предлагается алгоритм вычисления с заданной точностью функции квантили, основанный на алгоритме вычисления многомерного интеграла с помощью последовательного k-этапного дробления исходного “внешнего” куба. Приводится его обоснование, а также весьма оптимистическая оценка для основного параметра алгоритма – k, т.е. количества этапов дробления, необходимого для достижения требуемой точности вычисления $\varepsilon > 0$. В зависимости от использования модификации алгоритма интегрирования (см. разд. 1) эта оценка имеет вид $k \le C_1 - 0.5\log_2\varepsilon$ (с помощью 1-го наиболее простого метода интегрирования) или $k \le C_2 - (\log_2\varepsilon) / 3$ (с помощью 2-го более сложного метода интегрирования), где C_1, C_2 – некоторые константы (которые можно приблизительно оценить уже в самом начале процесса вычислений). Замечательно, что в этих оценках не присутствует число n – размерность задачи. Для получения этих оценок применялось геометрическое неравенство (4.6). В разд. 5 описываются некоторые свойства выпуклых многогранников, необходимые для обоснования этого неравенства.

1. Численный метод многомерного интегрирования с заданной точностью в случае кусочно-линейной функции потерь и гауссовской плотности вероятности. Укажем лишь общие идеи метода, который будем далее называть а л г о р и т м о м 1. Все необходимые детали можно найти в работах [6–9]. Рассматривается задача приближенного вычисления с заданной точностью интеграла:

$$I = \int_X \varphi_n(x)dx, \tag{1.1}$$

где $\varphi_n(x) = (2\pi)^{-n/2} e^{-|x|^2/2}$, $|x| = (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{1/2}$,

$$X = \left\{x \in \Pi \middle| l_1(x) \le 0,\ldots,l_r(x) \le 0\right\}, intX \ne \varnothing,$$

$$l_i(x) = \left\langle e^i, x\right\rangle + d_i, e^i \in \mathbb{R}^n, d_i \in \mathbb{R}, \left|e^i\right| \ne 0, i = \overline{1,r}, \tag{1.2}$$

$$\Pi = \left\{x \in \mathbb{R}^n \middle| a \le x_i \le b, i = \overline{1,n}\right\}, a < b. \tag{1.3}$$

Этот метод использует некоторые идеи метода ветвей и границ, применяемого в алгоритмах дискретной оптимизации (см., например, [10]).

В замечании 2 из [6] говорится о том, что куб Π может иметь более общий вид $\Pi = \left\{x \in \mathbb{R}^n \middle| a_i \le x_i \le b_i, i = \overline{1,n}\right\}$, т.е. являться n-мерным координатным параллелепипедом (будем кубы или параллелепипеды, заданные указанным образом, называть координатными). Однако программная реализация предлагаемого в [6–9] метода оказывается наиболее экономичной (см., например, [6, С. 57]) в случае (1.3). Действительно, в этом случае можно заранее создать одномерный массив $\mathbf{\Phi}(a,b,k)$ значений функции

$$\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-t^2/2} dt, \tag{1.4}$$

где $y \in \mathbb{R}$, на равномерной сетке $\mathbf{S}(a,b,k) = \left\{y \in \mathbb{R} \middle| y = s_i(a,b,k) \triangleq a + i(b-a)2^{-k}, i = \overline{0,2^k}\right\}$ (т.е. $\mathbf{\Phi}(a,b,k) = \left\{\Phi(s_i(a,b,k)), i = \overline{0,2^k}\right\}$), и тогда многие вспомогательные задачи интегрирования будут решаться путем выбора соответствующих элементов из этого массива и совершения над ними арифметических действий (умножения, сложения и т.д.).

Алгоритм 1 основан на многоэтапном дроблении куба Π. Для этого выбирается k – количество этапов дробления. Точность приближенного вычисления интеграла (1.1) непосредственно зависит от величины количества этапов дробления k. Обозначим через $\tilde{I}$ – приближенное значение интеграла (1.1), вычисляемое с помощью алгоритма 1, δ – достигаемая при выбранном k точность вычисления, при этом после окончания работы алгоритма для приближенного значения интеграла выполняется

$$\tilde{I} \le I \le \tilde{I} + \delta. \tag{1.5}$$

Сначала присваиваем $\tilde{I} = 0$, $\delta = 0$ и дробим исходный куб Π на 2^n кубов (делением ребер куба Π пополам), которые назовем кубами первого этапа дробления (соответственно, кубы, являющиеся элементами аналогичного дробления кубов первого этапа дробления, назовем кубами второго этапа дробления и т.д.). На каждом этапе $j = \overline{1,k}$ перебираем кубы Q j-го этапа дробления и проверяем выполнение условия “погружения”:

$$Q \subseteq X. \tag{1.6}$$

Если (1.6) справедливо, то полагаем $\tilde{I} := \tilde{I} + I_Q$, где

$$I_Q = \int_Q \varphi_n(x)dx,$$

и исключаем куб Q из дальнейшего рассмотрения. В нашем случае с линейными ограничениями проверка условия (1.6) осуществляется точно и достаточно экономично (см. [9. С. 1114–1115]) и в случае (1.6) вычисление интеграла I_Q осуществляется за $O(n)$ арифметических операций с использованием заготовленного массива $\mathbf{\Phi}(a,b,k)$ (см. [9, С. 1114]). В противном случае проверяем выполнение условия “отсечения”:

$$X \bigcap \mathrm{int} Q = \varnothing. \tag{1.7}$$

Если (1.7) справедливо, то исключаем куб Q из дальнейшего рассмотрения и переходим к очередному кубу j-го этапа дробления (см. ниже замечание 1); если все кубы j-го этапа дробления исчерпаны, то переходим к очередному кубу Q $(j-1)$-го этапа дробления (пока еще $j-1 \geq 1$) и т.д. Если же все кубы первого этапа дробления исчерпаны, то конец работы алгоритма.

Если для очередного куба Q (некоторого j-го этапа дробления) не выполняется ни условие погружения (1.6), ни условие отсечения (1.7), то осуществляем дальнейшее дробление этого куба, а в случае $j = k$ полагаем

$$\delta := \delta + I_Q. \tag{1.8}$$

Нетрудно показать (см. утверждение 1 из [7, С. 45]), что одновременное невыполнение условий погружения (1.6) и отсечения (1.7) для некоторого координатного куба $Q \subseteq \Pi$ равносильно тому, что $\partial X \cap \mathrm{int} Q \neq \varnothing$, где ∂X – граница множества X.

После выполнения алгоритма справедливо равенство

$$\delta = \sum_{\partial X \bigcap \mathrm{int} Q \neq \varnothing} \int_Q \varphi_n(x) dx \tag{1.9}$$

(здесь суммирование осуществляется по всем кубам Q k-го (т.е. последнего) этапа дробления, для которых не выполняется ни условие отсечения, ни условие погружения).

З а м е ч а н и е 1. В [8, 9] трудоемкая проверка условия отсечения (1.7) заменена на достаточное для (1.7) гораздо менее трудоемкое условие (см. условие (3.4) из [9]).

З а м е ч а н и е 2. В приведенном описании алгоритма 1 даны лишь общие идеи и опущены технические детали, позволяющие модифицировать этот алгоритм для уменьшения погрешности δ. Например, в [8, 9] формула присвоения (1.8) уточняется. Для этого вычисляются верхняя и нижняя оценки для величины

$$I_{Q \cap X} = \int_{Q \cap X} \varphi_n(x) dx$$

и вместо I_Q к δ прибавляется разность между верхней и нижней оценками. Одновременно с этим нижняя оценка прибавляется к $\tilde{I}$. В [8, 9] приведены две модификации для приближенного вычисления $I_{Q \cap X}$ с разными порядками точности. Пусть $\tau = \mathrm{T} / 2^{k+1}$, где $\mathrm{T} = b - a$ – длина ребер куба Π, т.е. τ – половина длины ребер кубов k-го (последнего) этапа дробления куба Π. В первой модификации для результирующего значения δ выполняется $\delta = O\left(\tau^2\right)$ при $\tau \to 0+$(метод второго порядка точности), а во второй гораздо более сложной модификации $\delta = O\left(\tau^3\right)$ при $\tau \to 0+$(метод третьего порядка точности). Первая модификация была реализована на компьютере (см. ниже пример 1, из которого видно, что при увеличении k на единицу (соответственно, при уменьшении τ в 2 раза) δ уменьшается приблизительно в 4 раза.

З а м е ч а н и е 3. Для уменьшения времени работы алгоритма возможно распараллеливание. Например, всякий раз при дроблении любого куба $(k-1)$-го этапа дробления на кубы k-го этапа дробления можно параллельно решать 2^n подзадач (для каждого куба Q k-го этапа дробления) проверки выполнения условий (1.6), (1.7) и в случае невыполнения этих условий – вычисления верхней и нижней оценок для $I_{Q \cap X}$ (см. замечание 2). Можно провести распараллеливание по-другому принципу: параллельно вычислять значения интегралов $I_{Q \cap X}$ для 2^n кубов Q первого этапа дробления с последующим сложением результатов, т.е. приближенных значений интегралов. Используя равенство (1.9), нетрудно показать, что при этом сумма погрешностей при вычислении интегралов $I_{Q \cap X}$ даст точную погрешность в случае вычисления без распараллеливания всего интеграла I. Такие распараллеливания могут значительно уменьшить общее время счета.

З а м е ч а н и е 4. Поскольку множество X ограничено, то, решая соответствующие задачи линейного программирования (ЗЛП), можно определить $a_i = \min\left\{x_i \middle| x \in \Pi, l_j(x) \leq 0, j = \overline{1,r}\right\}$,

$b_i = \max\left\{x_i \,\middle|\, x \in \Pi, l_j(x) \le 0, j = \overline{1,r}\right\}$, $i = \overline{1,n}$ и тем самым сузить куб Π до параллелепипеда $\Pi_0 = \left\{x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, a_i \le x_i \le b_i, i = \overline{1,n}\right\}$, где $a \le a_i$, $b_i \le b$, $i = \overline{1,n}$, и при этом $X \subseteq \Pi_0 \subseteq \Pi$, откуда $X = X \cap \Pi_0 = \left\{x \in \Pi_0 \,\middle|\, l_j(x) \le 0, j = \overline{1,r}\right\}$. Более того, можно считать, что числа a_i, b_i являются узлами сетки $\mathbf{S}(a,b,k)$ (наиболее близкими к точным их значениям), поскольку при любых $\tilde{a}_i \in [a, a_i]$, $\tilde{b}_i \in [b_i, b]$, $i = \overline{1,n}$, очевидно, снова выполняется $X \subseteq \tilde{\Pi}_0 \subseteq \Pi$, где $\tilde{\Pi}_0 = \left\{x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \tilde{a}_i \le x_i \le \tilde{b}_i, i = \overline{1,n}\right\}$, откуда $X = X \cap \tilde{\Pi}_0 = \left\{x \in \tilde{\Pi}_0 \,\middle|\, l_j(x) \le 0, j = \overline{1,r}\right\}$. Тогда, следуя [8], алгоритм 1 можно модифицировать следующим образом. Снова последовательно дробим куб Π. Но теперь для каждого текущего куба Q перед проверкой условий (1.6), (1.7) проверяем выполнение условия $\Pi_0 \cap \mathrm{int}Q = \varnothing$ (осуществляется за $O(n)$ арифметических операций). Если это условие верно, то исключим Q из дальнейшего рассмотрения и перейдем к анализу очередного куба. В противном случае действуем согласно алгоритму 1. Такая модификация позволит за незначительное время отсечь "лишние" области в кубе Π по сравнению с параллелепипедом Π_0. Кроме того, условие погружения (1.6) можно теперь ослабить, заменив его на $Q \cap \Pi_0 \subseteq X$ (проверяется аналогично (1.6)), в случае выполнения которого присваиваем $\tilde{I} := \tilde{I} + I_{Q \cap \Pi_0}$, где

$$I_{Q \cap \Pi_0} = \int_{Q \cap \Pi_0} \varphi_n(x) dx.$$

При этом $Q \cap \Pi_0$ – координатный параллелепипед, координаты вершин которого являются элементами сетки $\mathbf{S}(a,b,k)$. Но тогда значение интеграла $I_{Q \cap \Pi_0}$ легко вычисляется, используя элементы массива $\mathbf{\Phi}(a,b,k)$. Аналогичным образом можно ослабить и условие отсечения, заменяя в нем Q на $Q \cap \Pi_0$.

З а м е ч а н и е 5. Отметим, что процесс нахождения величины $\tilde{I}$, удовлетворяющей (1.5) для заданного $\delta > 0$, является, вообще говоря, многошаговым. Нам редко удастся сразу "угадать" требуемое количество этапов дробления k. Начинаем с некоторого $k = k_0 \ge 2$, а затем увеличиваем значение k до достижения (1.5) для заданного δ. При этом следует отметить три момента. Во-первых, при увеличении k на 1 можно снова использовать $\mathbf{\Phi}(a,b,k)$, поскольку $\mathbf{S}(a,b,k) \subset \mathbf{S}(a,b,k+1)$, $\mathbf{\Phi}(a,b,k) \subset \mathbf{\Phi}(a,b,k+1)$ (в $\mathbf{\Phi}(a,b,k+1)$ помимо элементов из $\mathbf{\Phi}(a,b,k)$ войдут значения функции $\Phi(y)$ в серединах отрезков, соединяющих каждые из двух последовательных членов из $\mathbf{S}(a,b,k)$). Во-вторых, применив алгоритм 1 при некотором начальном $k = k_0 \ge 2$, можно в процессе работы этого алгоритма определять для всякого куба Q (любого этапа дробления), для которого было выполнено условие погружения (1.6), а также для всех кубов последнего k-го этапа дробления, для которых не было выполнено условие отсечения (1.7) (объединение указанных кубов покрывает X), минимальный номер $j_{\min}(k_0) \in \left\{\overline{1, 2^{k_0}+1}\right\}$ и максимальный номер $j_{\max}(k_0) \in \left\{\overline{1, 2^{k_0}+1}\right\}$ элементов сетки $\mathbf{S}(a,b,k)$, являющихся координатами вершин этих кубов. Обозначим $\tilde{a}(k_0) = s_{j_{\min}(k_0)}(a,b,k_0)$, $\tilde{b}(k_0) = s_{j_{\max}(k_0)}(a,b,k_0)$. Тогда выполняется включение $X \subseteq \tilde{\Pi}(k_0) = \left\{x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \tilde{a}(k_0) \le x_i \le \tilde{b}(k_0), i = \overline{1,n}\right\}$. Таким образом, в случае применения алгоритма 1 для $k = k_0 + 1$ можно теперь в качестве куба Π взять куб $\tilde{\Pi}(k_0)$ (при этом $\tilde{\Pi}(k_0) \subseteq \Pi$). Более того, следуя замечанию 4, можно в процессе работы алгоритма 1 для тех же кубов определять по каждой координате x_i минимальный $j^{(i)}_{\min}(k_0) \in \left\{\overline{1, 2^{k_0}+1}\right\}$ и максимальный $j^{(i)}_{\max}(k_0) \in \left\{\overline{1, 2^{k_0}+1}\right\}$ номера элементов сетки $\mathbf{S}(a,b,k)$, являющихся координатами вершин этих кубов. Обозначим $\tilde{a}_i(k_0) = s_{j^{(i)}_{\min}(k_0)}(a,b,k_0)$, $\tilde{b}_i(k_0) = s_{j^{(i)}_{\max}(k_0)}(a,b,k_0)$,

$i = \overline{1,n}$. Тогда верно включение $X \subseteq \tilde{\Pi}_0(k_0) = \left\{x \in \mathbb{R}^n \middle| \tilde{a}_i(k_0) \le x_i \le \tilde{b}_i(k_0), i = \overline{1,n}\right\}$. Таким образом, при выполнении алгоритма 1 при $k \ge k_0 + 1$ можем теперь применить модификацию этого алгоритма в соответствии с замечанием 4 (минуя необходимость дополнительного решения указанных в этом замечании ЗЛП). В-третьих, может также возникнуть следующая ситуация, которую поясним на примере. Предположим, что $k_0 = 6$ и соответственно в сетке $\mathbf{S}(a,b,k_0)$ содержится $2^{k_0} + 1 = 65$ элементов. Пусть в результате работы алгоритма 1 при $k = k_0 = 6$ оказалось, что $j_{\min}(k_0) = 11$, $j_{\max}(k_0) = 26$, т.е. имеем, $26 - 11 + 1 = 16$ "активных" членов сетки $\mathbf{S}(a,b,k_0)$. Это указывает на то, что полученные значения $\tilde{I},\delta$ в результате применения алгоритма 1 при количестве этапов дробления $k = k_0 = 6$ к рассматриваемой задаче с использованием куба Π, удовлетворяющего (1.3), дают одинаковый результат, если бы вместо куба Π применялся куб $\tilde{\Pi} = \left\{x \in \mathbb{R}^n \middle| s_{11}(a,b,k_0) \le x_i \le s_{27}(a,b,k_0), i = \overline{1,n}\right\}$ (здесь $27 = 11 + 2^4$, 4 – минимальный показатель степени l, при котором $11 + 2^l \ge 26$), при количестве этапов дробления $k = \tilde{k}_0 = 4$ (вместо $k = k_0 = 6$). В связи с этим в этом примере можно для дальнейшего уменьшения δ использовать алгоритм 1, применяя $\tilde{\Pi}$ вместо Π при количестве этапов дробления $\tilde{k}_0 + 1 = 5$ вместо $k_0 + 1 = 7$, что может дать существенное сокращение объема вычислений. Здесь используется простое утверждение, заключающееся в том, что значения величин $\tilde{I},\delta$ однозначно определяются множеством кубов последнего этапа дробления, для которых либо верно условие погружения (в том числе, в случае его выполнения для некоторого куба меньшего этапа дробления, в котором он содержится), либо в случае одновременного невыполнения ни условия погружения, ни условия отсечения. В приведенном примере в обоих рассматриваемых случаях множества этих кубов совпадают (несмотря на отличие в максимальном количестве этапов дробления в каждом из этих случаев).

Пример 1. Автором была составлена программа для вычисления интеграла I вида (1.1) для случая, когда X – многогранник, реализующая метод второго порядка точности. Рассматривался пример, когда $n = 5$,

$$X = \{x \in \Pi \mid x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - x_5 - 7 \le 0, 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 - 8 \le 0,$$
$$x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 - 9 \le 0, 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 - 7 \le 0\},$$
$$\Pi = \{x \in \mathrm{R}^5 \mid -2 \le x_i \le 2, i = \overline{1,5}\},$$

т.е. при $r = 4$. Результаты вычислений величин $\tilde{I}, \tilde{I} + \delta, \delta$, удовлетворяющих (1.5), приведены в табл. 1 при различных $k = 4,5,6$. Из этой таблицы видно, что погрешность δ уменьшается примерно в 4 раза при каждом увеличении k на 1.

Таблица 1

k	$\tilde{I}$	$\tilde{I} + \delta$	δ
4	0.781744375667924	0.792289376178296	0.0105450005103716
5	0.784924691133069	0.787097696396805	0.00217300526373691
6	0.785685556863937	0.786183881161937	0.00049832429799992

2. Функция квантили. Пусть

$$F(t) = P_t = P\left(\Psi\left(\xi\right) \le t\right) = \int\limits_{\Psi(x) \le t} f(x)dx,$$

где $t \in \mathbb{R}$, $\{x \in \mathbb{R}^n | \Psi(x) \le t\} \ne \varnothing$, $\Psi(x)$ – целевая функция, например кусочно-линейная (как всюду в этой статье), квадратичная (как в статье [8]) или возможны другие случаи, $f(x)$ –

плотность вероятности вектора случайных факторов ξ, а следовательно, $\forall x \in \mathbb{R}^n$ $f(x) \geq 0$. В этой статье всюду в дальнейшем $f(x) = \varphi_n(x)$.

Обозначим $X(t) = \{x \in \mathbb{R}^n | \Psi(x) \leq t\}$. Функцией квантили (quantile function) называется функция

$$q(\alpha) = \inf\{t \mid P_t \geq \alpha\} = \inf\left\{t \middle| \int_{\Psi(x) \leq t} f(x)dx \geq \alpha\right\} = \inf\left\{t \middle| \int_{X(t)} f(x)dx \geq \alpha\right\}.$$

В сделанных обозначениях

$$F(t) = \int_{X(t)} f(x)dx.$$

Тогда $q(\alpha) = \inf\{t | F(t) \geq \alpha\}$, где $\alpha \in (0,1)$ – заданная доверительная вероятность. Предполагается, что $F(t)$ – непрерывная функция при всех $t \in \mathbb{R}$, таких, что $X(t) \neq \varnothing$ (в рассматриваемом кусочно-линейном случае с ограниченными множествами $X(t), t \in \mathbb{R}$ это условие очевидным образом выполняется). В любом случае $\forall t_0 \in \mathbb{R}$, такого, что $X(t_0) \neq \varnothing$, для любых $t, t' \geq t_0$ справедливо $t' \geq t \Rightarrow X(t') \supseteq X(t) \Rightarrow F(t') \geq F(t)$.

Таким образом, в рассматриваемом случае функция $F(t)$ монотонно не убывает и непрерывна при $t \geq t_0$ (где t_0 – любое число, такое, что $X(t_0) \neq \varnothing$), а следовательно, в случае, если

$$\exists t_1, \bar{t}_1 \in \mathbb{R} : t_1 < \bar{t}_1, X(\bar{t}_1) \neq \varnothing, F(t_1) < \alpha, F(\bar{t}_1) \geq \alpha, \tag{2.1}$$

верно

$$q(\alpha) = \inf\{t | F(t) \geq \alpha\} = \min\{t \in [t_1, \bar{t}_1] | F(t) = \alpha\} \tag{2.2}$$

(здесь и далее знак min перед некоторым множеством действительных чисел означает минимальный элемент в нем и соответственно inf – точную нижнюю грань на этом множестве).

3. Кусочно-линейный случай. В настоящей работе исследуется случай, когда $\Psi(x) = \max\{l_1(x),\ldots,l_r(x)\}$ (где $l_1(x),\ldots,l_r(x)$ удовлетворяют (1.2)). Для произвольного измеримого (по Лебегу) множества $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ будем его меру обозначать через $\mu(Y)$. Пусть для некоторого $t_0 \in \mathbb{R}$ $X(t_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \Psi(x) \leq t_0\}$ – ограниченное непустое множество. Тогда (см. теорему 17, С. 177 из [11]) $\forall t \in \mathbb{R}$ $X(t)$ – ограниченное множество и $\exists t_1 \in \mathbb{R} : t_1 = \min \Psi(X(t_0)) = \min \Psi(\mathbb{R}^n)$, поскольку $X(t_0)$ – компакт. При этом, очевидно, $\operatorname{int} X(t_1) = \varnothing \Rightarrow \mu(X(t_1)) = 0$, откуда $F(t_1) = 0 < \alpha$, а следовательно, $q(\alpha) = \inf\{t | F(t) \geq \alpha\} > t_1$, т.е. величина t_1 дает нижнюю границу для $q(\alpha)$ и может быть найдена, решая задачу линейного программирования:

$$v \to \min(= t_1), l_i(x) \leq v, i = \overline{1,r}, x \in \mathbb{R}^n, v \in \mathbb{R} \tag{3.1}$$

(в (3.1) и ниже в аналогичных случаях выражение $v \to \min(= t_1)$ означает, что в рассматриваемой задаче ищется значение минимума функции v при указанных ограничениях и при этом в скобках дается обозначение для искомого значения минимума).

Заметим, что в кусочно-линейном случае с ограниченным множеством $X(t_1)$ функция $F(t)$ непрерывна и монотонно возрастает. Это следует из рассмотрения монотонно возрастающей непрерывной функции $\mu(X(t))$ (нетрудно даже показать, что она удовлетворяет условию Липшица).

Опишем также метод определения верхней границы для $q(\alpha)$. Пусть имеется программа вычисления функции $\Phi(y)$, где $y \in \mathbb{R}$, по формуле (1.4). Рассмотрим задачу поиска $b \in \mathbb{R}$:

$$b > 0, \beta(b) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-b}^{b} e^{-t^2/2} dt = \Phi(b) - \Phi(-b) = \alpha^{1/n}. \tag{3.2}$$

Пусть $\Pi_0 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid -b \leq x_i \leq b, i = \overline{1,n}\}$. Тогда

$$\int_{\Pi_0} \varphi_n(x)dx = \prod_{i=1}^{n} [\Phi(b) - \Phi(-b)] = \alpha.$$

Поскольку функция $\beta(y)$ является монотонно возрастающей всюду на $\mathbb{R}_{\geq} = \{t \in \mathbb{R} \mid t \geq 0\}$, то величину $\beta(b)$, удовлетворяющую (3.2), можно определить со сколь угодной точностью $\sigma > 0$, т.е. вычислить $b_\sigma \in \mathbb{R} : b \leq b_\sigma \leq b + \sigma$. При этом $\beta(b_\sigma) \geq \alpha^{1/n}$. Пусть $\Pi_\sigma = \{x \in \mathbb{R}^n \mid -b_\sigma \leq x_i \leq b_\sigma, i = \overline{1,n}\}$, где $\sigma > 0$ — произвольное небольшое число (например, $\sigma = 0.01$). Тогда

$$\int\limits_{\Pi_\sigma} \varphi_n(x)dx = \prod_{i=1}^{n} \left[\Phi\left(b_\sigma\right) - \Phi\left(-b_\sigma\right)\right] = [\beta(b_\sigma)]^n \geq \alpha.$$

Рассмотрим для каждого $i = \overline{1,r}$ задачу

$$l_i(x) = \left\langle e^i, x \right\rangle + d_i \to \max(= \gamma_i), x \in \Pi_\sigma.$$

Каждая из этих задач решается точно за $O(n)$ арифметических операций (см. аналогичную задачу в [9, С. 1113]). Тогда для величины $\overline{t_1} = \max\{\gamma_1, \ldots, \gamma_r\}$ выполняется $X(\overline{t_1}) = \left\{x \in \mathbb{R}^n \middle| \Psi(x) \leq \overline{t_1}\right\} \supseteq \Pi_\sigma$, а следовательно,

$$F(\overline{t_1}) = \int\limits_{X\left(\overline{t_1}\right)} \varphi_n(x)dx \geq \int\limits_{\Pi_\sigma} \varphi_n(x)dx \geq \alpha,$$

т.е. величина $\overline{t_1}$ является верхней оценкой для $q(a)$. Таким образом,

$$t_1 < q(\alpha) \leq \overline{t_1}. \tag{3.3}$$

Кроме того, для работы алгоритма многомерного интегрирования функции $\varphi_n(x)$ на многогранниках $X(t)$, где $t \in \left(t_1, \overline{t_1}\right]$, понадобится (см. разд. 2) куб Π вида (1.3), такой, что $X(\overline{t_1}) \subseteq \Pi$. Для нахождения чисел a, b из (1.3) достаточно решить $2n$ задач линейного программирования

$$x_i \to \max\left(= \eta_i\right),\ x \in X(\overline{t_1}), \tag{3.4}$$

$$x_i \to \min\left(= \nu_i\right),\ x \in X(\overline{t_1}), \tag{3.5}$$

а затем положить $a = \min\{\nu_1, \ldots, \nu_n\}$, $b = \max\{\eta_1, \ldots, \eta_n\}$.

З а м е ч а н и е 6. В процессе работы приводимого ниже алгоритма 2 величина $q(\alpha)$ будет оценена сверху и снизу гораздо более точно, чем в (3.3), и тогда мы можем уточнить величины a, b, заменяя в (3.4), (3.5) величину $\overline{t_1}$ на новую гораздо более точную оценку сверху величины $q(\alpha)$. Такие уточнения можно производить периодически (см. далее замечание 7).

4. Численный метод нахождения с заданной точностью $q(\alpha)$. Опишем алгоритм 2 нахождения с заданной точностью $\varepsilon > 0$ величины $q(\alpha)$, основанный на использовании алгоритма 1. Шаги алгоритма 2 вполне очевидны (в частности, сходны с соответствующим алгоритмом в [12]) и не претендуют на новизну. Для автора важным было показать возможность применения в этом алгоритме универсального (относительно размерности n) алгоритма 1 и тем самым придать алгоритму 2 ту же универсальность. В разд. 3 величина $q(\alpha)$ была уже оценена сверху и снизу (см. неравенства (3.3)). Кроме того, в разд. 3 был описан алгоритм нахождения куба Π вида (1.3) такого, что $\forall t \in \left(t_1, \overline{t_1}\right]\ X(t) \subseteq \Pi$, а следовательно, $\forall t \in \left(t_1, \overline{t_1}\right]\quad X\left(t\right) = \left\{x \in \mathbb{R}^n \middle| \Psi\left(x\right) \leq t\right\} = \left\{x \in \Pi \middle| \Psi\left(x\right) \leq t\right\}$. Но тогда $\forall t \in \left(t_1, \overline{t_1}\right]$ ($t > t_1$, чтобы $\operatorname{int} X(t) \neq \varnothing$) интеграл

$$F(t) = \int_{X(t)} \varphi_n(x)dx$$

является интегралом вида (1.1)–(1.3), и мы можем применить к нему алгоритм 1, описанный в разд. 1, который позволяет вычислять значение этого интеграла с любой желаемой точностью $\delta = \delta(k) > 0$ (задавая необходимое количество k последовательных дроблений куба П). Используя алгоритм 1, $\forall t \in \left(t_1, \overline{t_1}\right]$ при любом выбранном значении $k \geq 2$ вместо точного значения интеграла $F(t)$ находим числа $F_\delta(t)$, $\delta = \delta(k) > 0$, такие, что (см. далее замечание 7)

$$F_\delta\left(t\right) \leq F\left(t\right) \leq F_\delta(t) + \delta. \tag{4.1}$$

Заметим, что в рассматриваемом нами кусочно-линейном случае с ограниченными множествами $X(t)$, где $t \geq t_1$, функция $F(t)$ непрерывна и монотонно возрастает при $t \geq t_1$, а следовательно, существует единственное число $q(\alpha) > t_1 : F\left(q(\alpha)\right) = \alpha$. Нам понадобятся следующие простые утверждения, непосредственно следующие из определения $q(\alpha)$.

Утверждение 1. Пусть выполняется (4.1). Тогда в случае $F_\delta(t) < \alpha - \delta$ (откуда в силу (4.1) $F(t) < \alpha$) справедливо $t < q(\alpha)$.

Доказательство. Предположим, что $t \geq q(\alpha)$. Из монотонности F следует, что $F(t) \geq F(q(\alpha)) = \alpha$, а это противоречит тому, что $F(t) < \alpha$. Утверждение 1 доказано.

Утверждение 2. Пусть верно (4.1). Тогда в случае $F_\delta(t) \geq \alpha$ справедливо $q(\alpha) \leq t$.

Доказательство. Используя (4.1), получаем $F(t) \geq F_\delta(t) \geq \alpha = F(q(\alpha))$, откуда в силу монотонности F имеем $q(\alpha) \leq t$. Утверждение 2 доказано.

Алгоритм 2 (нахождения с заданной точностью $\varepsilon > 0$ величины $q(\alpha)$).

Шаг 1. Пусть $t_1, \overline{t_1}$ — найденные ранее величины, удовлетворяющие (3.3), $i = 1$, $k = k_0 \geq 2$, k — количество этапов дробления куба П, от которого зависит величина δ из (4.1), k_0 — начальное значение этой величины. Тогда справедливы неравенства

$$t_i < q(\alpha) \leq \overline{t_i}. \tag{4.2}$$

Шаг 2. Проверяем выполнение неравенства $t_i - \overline{t_i} \leq 2\varepsilon$. Если оно верно, то в силу (4.2) имеем: $\left|q(\alpha) - (t_i + \overline{t_i}) / 2\right| \leq \varepsilon$, т.е. задача решена и в качестве приближенного значения $q(\alpha)$ берем $(t_i + \overline{t_i}) / 2$. В противном случае переходим к шагу 3.

Шаг 3. Находим числа t_i', t_i'' методом “золотого сечения” (см. ниже замечание 8):

$$t_i' = t_i + \left(3 - \sqrt{5}\right)\left(\overline{t_i} - t_i\right) / 2 \simeq t_i + 0.382\left(\overline{t_i} - t_i\right),$$

$$t_i'' = t_i + \left(\sqrt{5} - 1\right)\left(\overline{t_i} - t_i\right) / 2 \simeq t_i + 0.618\left(\overline{t_i} - t_i\right).$$

Шаг 4. Используя алгоритм 1, определяем числа $F_{\delta_1}(t_i'), F_{\delta_2}(t_i''), \delta_1 = \delta_1(k) > 0, \delta_2 = \delta_2(k) > 0$, такие, что $F_{\delta_1}(t_i') \leq F(t_i') \leq F_{\delta_1}(t_i') + \delta_1$, $F_{\delta_2}(t_i'') \leq F(t_i'') \leq F_{\delta_2}(t_i'') + \delta_2$. Если $F_{\delta_1}(t_i') < \alpha - \delta_1$, то в силу утверждения 1 $t_i' < q(\alpha)$. Тогда полагаем $t_{i+1} = t_i'$, $\overline{t}_{i+1} = \overline{t}_i$, присваиваем $i := i + 1$, переходим к шагу 2 и при этом сохраняется (4.2).

Если $F_{\delta_2}(t_i'') \geq \alpha$, то в силу утверждения 2 $q(\alpha) \leq t_i''$. Тогда полагаем $t_{i+1} = t_i$, $\overline{t}_{i+1} = t_i''$, присваиваем $i := i + 1$, переходим к шагу 2 и при этом сохраняется (4.2).

Шаг 5. К шагу 5 переходим только в случае

$$F_{\delta_1}(t_i') \geq \alpha - \delta_1, F_{\delta_2}\left(t_i''\right) < \alpha. \tag{4.3}$$

Увеличиваем число этапов дробления куба П на 1, т.е. присваиваем $k := k + 1$ и переходим к шагу 4.

Обоснование алгоритма 2. Покажем, что работа алгоритма 2 закончится через конечное число шагов.

Предположим противное, т.е. пусть при работе алгоритма 2 совершается бесконечное число шагов. Заметим, что после каждого присвоения (на шаге 4) $i := i+1$ переходим к шагу 2 с новым набором величин t_i, $\bar{t}_i$ и при этом $\bar{t}_i - t_i = 0.5\left(\sqrt{5}-1\right)\left(\bar{t}_{i-1} - t_{i-1}\right)$, где $0.5\left(\sqrt{5}-1\right) = 0.618... < 1$, а следовательно, при достаточно большом i будет справедливо $\bar{t}_i - t_i = \left[0.5\left(\sqrt{5}-1\right)\right]^{i-1}\left(\bar{t}_1 - t_1\right) \le 2\varepsilon$, что приведет к остановке алгоритма на шаге 2, а это противоречит бесконечности выполнения шагов алгоритма. Таким образом, для некоторого фиксированного i будет происходить бесконечное число переходов: шаг 4 $\mapsto$ шаг 5 $\mapsto$ шаг 4 $\mapsto$ шаг 5 $\mapsto \cdots \mapsto$ шаг 4 $\mapsto$ шаг 5 $\mapsto \cdots$, т.е. бесконечное увеличение количества этапов дробления k при вычислении интегралов: $F(t_i') = \int_{X(t_i')} \varphi_n(x)dx$, $F(t_i'') = \int_{X(t_i'')} \varphi_n(x)dx$,

где $t_i' = t_i + 0.5\left(3-\sqrt{5}\right)\left(\bar{t}_i - t_i\right)$, $t_i'' = t_i + 0.5\left(\sqrt{5}-1\right)\left(\bar{t}_i - t_i\right)$. При этом

$t_i' \ge t_1 + 0.5\left(3-\sqrt{5}\right)\left[0.5\left(\sqrt{5}-1\right)\right]^{i-1}\left(\bar{t}_1 - t_1\right) > t_1$, а следовательно, $\operatorname{int} X\left(t_i'\right) \ne \varnothing$, $\operatorname{int} X\left(t_i''\right) \ne \varnothing$.

Таким образом, выполнены все условия, необходимые для применения алгоритма 1 и при увеличении k — количества этапов дробления куба Π величины $\delta_1 = \delta_1(k)$, $\delta_2 = \delta_2(k)$ стремятся к 0 (см. далее замечание 7). Из (4.3), используя (4.1), для фиксированного i имеем $\alpha - \delta_1 \le F_{\delta_1}\left(t_i'\right) \le F\left(t_i'\right)$, $F\left(t_i''\right) \le F_{\delta_2}\left(t_i''\right) + \delta_2 < \alpha + \delta_2$, и при этом в силу монотонности $F(t)$ справедливо $F\left(t_i'\right) < F\left(t_i''\right)$ (поскольку $t_i' < t_i''$), а следовательно,

$$F\left(t_i''\right) - F\left(t_i'\right) < \delta_1(k) + \delta_2(k). \tag{4.4}$$

Заметим, что в левой части неравенства (4.4) находится постоянная положительная величина, а выражение справа стремится к 0 при $k \to \infty$. Полученное противоречие и завершает обоснование алгоритма 2.

Таким образом, установлена принципиальная возможность вычисления с заданной точностью $\varepsilon > 0$ значения $q(\alpha)$. Получим также в рассматриваемом кусочно-линейном случае некоторые оценки. Обозначим через $\varepsilon_i = \left(\bar{t}_i - t_i\right)/2$ переменную величину, меняющуюся в процессе работы алгоритма 2. Поскольку в силу (4.2) $t_i < q(\alpha) \le \bar{t}_i$, то $\left|q(\alpha) - 0.5\left(\bar{t}_i + t_i\right)\right| \le 0.5\left(\bar{t}_i - t_i\right) = \varepsilon_i$, т.е. величину ε_i можно рассматривать как достигнутую при текущем значении параметра i точность вычисления $q(\alpha)$. Цель дальнейшего рассуждения — получение неравенства, показывающего, что между величиной ε_i и величиной $\delta_1(k) + \delta_2(k)$ из условия (4.4), являющегося следствием неравенств (4.3), выполняющихся на шаге 5, можно установить "линейную" зависимость так, что для некоторой константы $C > 0$ справедливо

$$\varepsilon_i \le C\left(\delta_1(k) + \delta_2(k)\right). \tag{4.5}$$

Из этого неравенства, в частности, следует, что на шаге 5 не может выполняться $\delta_1(k) + \delta_2(k) \le \varepsilon / C$, поскольку в этом случае $\varepsilon_i \le \varepsilon$ и на шаге 2 должна была произойти остановка по условию $\bar{t}_i - t_i = 2\varepsilon_i \le 2\varepsilon$. Таким образом, оценка (4.5) накладывает ограничение на максимальное количество этапов дробления k (более подробно об этом говорится в замечании 7, приведенном ниже).

Для установления справедливости указанного условия (4.5) потребуется геометрическое неравенство, обоснование которого приводится в разд. 5. Чтобы его сформулировать, потребуются некоторые обозначения. При любом $t \ge t_1$ множество $X(t) = \left\{x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \Psi\left(x\right) \le t\right\}$ является выпуклым ограниченным и многогранным (кратко — многогранником). В случае $t > t_1$ имеем $\operatorname{int} X(t) \ne \varnothing$, т.е. множество $X(t)$ является многогранником размерности n и мы можем ввести в рассмотрение поверхность множества $X(t)$, т.е. его границу, которая является объединением граней размерности $n-1$ многогранника $X(t)$. Кроме того, в этом случае можно говорить о площади поверхности $X(t)$ как сумме площадей граней размерности $n-1$ многогранника $X(t)$ (площадь каждой грани Γ размерности $n-1$ многогранника $X(t)$

понимается как мера Лебега $\mu_{n-1}(\Gamma)$, рассматриваемая в плоскости размерности $n-1$, включающей в себя Γ; этой плоскостью будет аффинная оболочка множества Γ). Обозначим через $S(t)$ площадь поверхности многогранника $X(t)$, где $t > t_1$. Пусть $E = \max\left\{\left|e^1\right|,\ldots,\left|e^r\right|\right\} > 0$, $t' \geq t > t_1$. Тогда (см. ниже утверждение 21) справедливо геометрическое неравенство

$$\mu\big(X(t')\big) - \mu\big(X(t)\big) \geq E^{-1}S(t)\big(t'-t\big), \tag{4.6}$$

откуда

$$F(t') - F(t) = \int_{X(t')\setminus X(t)} \varphi_n(x)dx \geq \min \varphi_n(X(t'))\Big[\mu\big(X(t')\big) - \mu\big(X(t)\big)\Big] \geq$$

$$\geq E^{-1}\min\varphi_n(X(t'))S(t)\big(t'-t\big).$$

Пусть теперь

$$\Delta > 0, \bar{t}_1 \geq t' \geq t \geq t_1 + \Delta, L = E^{-1}\min\varphi_n(X(\bar{t}_1)) \cdot \inf_{t\in\left[t_1+\Delta,\bar{t}_1\right]} S(t). \tag{4.7}$$

Тогда

$$F(t') - F(t) \geq L\big(t'-t\big). \tag{4.8}$$

Заметим, что в формуле, определяющей постоянную L, присутствует неопределенный параметр $\Delta > 0$. Он легко находится в результате совершения нескольких шагов алгоритма 2 без проверки справедливости условия остановки алгоритма $\bar{t}_i - t_i \leq 2\varepsilon$. Поскольку $q(\alpha) > t_1$ и при обосновании алгоритма 2 была по существу доказана сходимость $t_i, \bar{t}_i$ к $q(\alpha)$ в процессе его выполнения, то после конечного числа шагов алгоритма при некотором $i_0 \geq 2$ обязательно верно $t_1 < t_{i_0} < q(\alpha)$, и тогда при $i \geq i_0$ будет справедливо $t_i \geq t_1 + \Delta$, где $\Delta = t_{i_0} - t_1$. Таким образом, можно для простоты обозначений предполагать, что уже при $i = 2$ верно

$$t_2 = t_1 + \Delta < q(\alpha) \leq \bar{t}_2 \leq \bar{t}_1, \Delta > 0. \tag{4.9}$$

В этом случае, если мы находимся на шаге 5 при некотором $i \geq 2$, то справедливы неравенства (4.3), а следовательно, и (4.4), откуда, используя выполнение (4.8) в случае (4.7), имеем

$$\delta_1(k) + \delta_2(k) > F(t_i'') - F(t_i') \geq L\big(t_i'' - t_i'\big) = \left(\sqrt{5}-2\right)L\big(\bar{t}_i - t_i\big), \tag{4.10}$$

т.е. на шаге 5 при $i \geq 2$ верно

$$\varepsilon_i = 0.5\big(\bar{t}_i - t_i\big) < \left[L\left(\sqrt{5}-2\right)\right]^{-1}\big(\delta_1(k) + \delta_2(k)\big) = \left(\sqrt{5}+2\right)L^{-1}\big(\delta_1(k) + \delta_2(k)\big),$$

и тем самым обосновано существование величины $C = \left(\sqrt{5}+2\right)L^{-1}$ из условия (4.5). Кроме того, необходимо обосновать, что

$$L = E^{-1}\min\varphi_n(X(\bar{t}_1)) \cdot \inf_{t\in\left[t_1+\Delta,\bar{t}_1\right]} S(t) > 0.$$

Выполнение $\min\varphi_n(X(\bar{t}_1)) > 0$ очевидно. Осталось доказать, что

$$\inf_{t\in\left[t_1+\Delta,\bar{t}_1\right]} S(t) > 0.$$

Заметим, что функция $\mu(X(t))$ монотонно возрастает и при этом $\mu_0 = \mu(X(t_1+\Delta)) > 0$, поскольку в силу $\Delta > 0$ верно $\operatorname{int}X(t_1+\Delta) \neq \varnothing$. Пусть S_0 — площадь поверхности n-мерного шара объема μ_0. Тогда $\forall t \geq t_1 + \Delta$ $\mu(X(t)) \geq \mu_0 = \mu(X(t_1 + \Delta))$, а следовательно, $\forall t \geq t_1 + \Delta$ $S(t) \geq S_0$, откуда

$$\inf_{t \in \left[t_1 + \Delta, \bar{t}_1\right]} S(t) \geq S_0 > 0.$$

З а м е ч а н и е 7. Как уже отмечалось, мы находимся в условиях применения алгоритма 1, и при этом возможны по крайней мере две модификации, предложенные в [8, 9]. В одной из них (1-я модификация) для величины δ из условия (5.1) выполняется $\delta = O(\tau^2)$ при $\tau \to 0+$, а в другой (более сложной 2-й модификации) $\delta = O(\tau^3)$ при $\tau \to 0+$, где $\tau = \mathrm{T} / 2^{k+1}$, $\mathrm{T} = b - a$ — длина ребер куба Π, т.е. τ — половина длины ребер кубов k-го (т.е. последнего) этапа дробления куба Π, k — параметр алгоритма 2. Более того, можно показать, что в случае выполнения условий (4.9) найдутся константы $\bar{C}_1, \bar{C}_2 > 0$ (общие для всей работы алгоритма 2), такие, что при $i \geq 2$ для величин δ_1, δ_2, вычисляемых на шаге 4 алгоритма 2, в случае 1-й модификации будет верно $\delta_1, \delta_2 \leq \bar{C}_1 \tau^2$, а в случае 2-й модификации — $\delta_1, \delta_2 \leq \bar{C}_2 \tau^3$. Следствием этих условий, а также неравенства (4.5) является условие $\varepsilon_i = O(\tau^2)$ (для 1-й модификации) и $\varepsilon_i = O(\tau^3)$ (для 2-й модификации) при $\tau \to 0+$. Условие $\varepsilon_i = O(\tau^2)$ при $\tau \to 0+$ говорит о том, что при увеличении k на 1 (см. $k := k + 1$ на шаге 5) величина $\tau = \mathrm{T} / 2^{k+1}$ уменьшается в 2 раза и можно ожидать, что величина ε_i уменьшится в 4 раза (в рассмотренных автором примерах такая зависимость, как правило, наблюдается). Соответственно, в случае 2-й модификации при увеличении k на 1 можно ожидать уменьшение величины ε_i в 8 раз.

Используя эти соображения, можно при решении практической задачи сделать предварительные расчеты для некоторого $k = k_0$ и по достигнутой для этого случая величине $\varepsilon_i = \varepsilon_i(k_0)$ спрогнозировать количество этапов $k = k(\varepsilon)$, необходимых для вычисления с заданной точностью ε значения $q(\alpha)$. Затем, как уже отмечалось ранее, можно заранее создать одномерный массив $\mathbf{\Phi}(a,b,k)$ значений функции $\Phi(y)$, удовлетворяющей равенству (1.4), на равномерной сетке $\mathbf{S}(a,b,k) = \left\{ y \in \mathbb{R} \,\middle|\, y = s_i(a,b,k) \triangleq a + i(b-a)2^{-k}, i = \overline{0, 2^k} \right\}$, которые можно использовать при решении всех вспомогательных задач интегрирования, возникающих в процессе выполнения алгоритма 2. Это дает значительное снижение вычислительных затрат.

Кроме того, действуя, согласно замечанию 5, можно при каждом вычислении величины $F_{\delta_2}(t_i'')$ для всяких текущих i, k находить минимальный и максимальный номера используемых узлов сетки $\mathbf{S}(a,b,k)$. Тогда в первом же случае присвоения на шаге 4 алгоритма 2 $\bar{t}_{i+1} = t_i''$ (при выполнении $F_{\delta_2}(t_i'') \geq \alpha$) можно теперь уточнить границы внешнего куба Π, используемого при решении дальнейших задач интегрирования, заменяя его на более узкий $\tilde{\Pi} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \tilde{a} \leq x_i \leq \tilde{b}, i = \overline{1,n} \right\}$, где $\tilde{a}, \tilde{b}$ — элементы сетки $\mathbf{S}(a,b,k)$, определяемые по указанным номерам (см. замечание 5). Кроме того, как показано в замечании 5, при замене внешнего куба Π на $\tilde{\Pi}$ может появиться возможность для уменьшения текущего (а следовательно, и последующих) количества этапов дробления k для нового внешнего куба $\tilde{\Pi}$.

Более того, следуя замечанию 4, можно при каждом вычислении величины $F_{\delta_2}(t_i'')$ для всяких текущих i, k определять по каждой координате x_i минимальный $j_{\min}^{(i)}(k) \in \left\{\overline{1, 2^k + 1}\right\}$ и максимальный $j_{\max}^{(i)}(k) \in \left\{\overline{1, 2^k + 1}\right\}$ номера элементов сетки $\mathbf{S}(a,b,k)$, являющихся координатами вершин этих кубов. Обозначим $\tilde{a}_i(k) = s_{j_{\min}^{(i)}(k)}(a,b,k)$, $\tilde{b}_i(k) = s_{j_{\max}^{(i)}(k)}(a,b,k)$, $i = \overline{1,n}$. Тогда в первом же случае присвоения на шаге 4 алгоритма 2 $\bar{t}_{i+1} = t_i''$ (при выполнении $F_{\delta_2}(t_i'') \geq \alpha$) происходит включение $X \subseteq \tilde{\Pi}_0(k) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \tilde{a}_i(k) \leq x_i \leq \tilde{b}_i(k), i = \overline{1,n} \right\}$. Таким образом, при решении дальнейших задач интегрирования с помощью алгоритма 1 можем теперь применять модификацию этого алгоритма в соответствии с замечанием 4 (минуя необходимость дополнительного решения указанных в этом замечании ЗЛП).

Приведем также следующие “оптимистические” оценки для количества этапов дробления k. В случае 1-й модификации неравенства (4.5), $\delta_1, \delta_2 \le \bar{C}_1\tau^2$, а также равенство $\tau = \mathrm{T} / 2^{k+1}$ приводят к неравенству $\varepsilon_i \le C_1' 2^{-2k}$, где $C_1' > 0$ — некоторое число, т.е. найдется число $C_1 > 0$, для которого верно $k \le C_1 - 0.5\log_2\varepsilon_i$. Соответственно, в случае 2-й модификации аналогичным образом получаем, что для некоторого числа $C_2 > 0$ выполняется $k \le C_2 - (\log_2\varepsilon_i) / 3$. Отметим, что в этих оценках не присутствует число n — размерность задачи (тем не менее, от n зависит общее число кубов на каждом этапе дробления, которое очевидным образом влияет на время решения задачи).

З а м е ч а н и е 8. Как известно (см., например, [11, С. 19]), золотым сечением отрезка $[t_i, \bar{t}_i]$ называется деление его (с помощью любой из точек t_i', t_i'') на две неравные части так, чтобы отношение длины всего отрезка к длине большей части равнялось отношению длины большей части к длине меньшей части отрезка. Замечательно здесь то, что t_i' в свою очередь производит золотое сечение отрезка $[t_i, t_i'']$. Аналогично точка t_i'' производит золотое сечение отрезка $[t_i', \bar{t}_i]$. Используя указанное, можно получить экономию в вычислениях.

З а м е ч а н и е 9. Чтобы расширить множество задач, к которым может быть применен алгоритм 2, перечислим все условия, которые потребовались для его обоснования. Это прежде всего строгая монотонность $F(t)$, которая применялась на втором этапе обоснования при рассмотрении (4.4). Кроме того, использовалась применимость алгоритма 1 для вычисления интегралов $F(t)$ с точностью $\delta > 0$, т.е. возможность вычисления чисел $F_\delta(t), \delta$, удовлетворяющих (4.1). При любом фиксированном $t \in (t_1, \bar{t}_1]$ с увеличением k (параметр алгоритма 1) величина $\delta = \delta(k)$ в условии (4.1) должна стремиться к нулю (это также использовалось на втором этапе обоснования при рассмотрении (4.4)). В работе [9] (см. также [6, С. 53]) показано, что если $X = \{x \in \Pi \,|\, l_1(x) \le 0, \ldots, l_r(x) \le 0\}, \Psi(x) = \max\{l_1(x), \ldots, l_r(x)\}$, где Π удовлетворяет (1.3), $l_1(x), \ldots, l_r(x)$ — определенные и измеримые на Π функции, то в случае $\mu(\{x \in \Pi \,|\, \Psi(x) = 0\}) = 0$ при применении алгоритма 1 к вычислению

$$F = \int_X \varphi_n(x)dx$$

верно $\delta = \delta(k) \to 0$ при $k \to \infty$. В связи с этим потребуется выполнение условия $\mu(\{x \in \Pi \,|\, \Psi(x) = t\}) = 0$ при $t \in (t_1, \bar{t}_1]$. Соответственно для существования и возможности определения границ a, b куба Π понадобится ограниченность множеств $X(t) = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, \Psi(x) \le t\}$ при $t \in (t_1, \bar{t}_1]$. Перечисленные условия являются справедливыми для широкого круга задач. Кроме того, для работы алгоритма 2 необходимы “стартовые” значения t_1, $\bar{t}_1$, такие, что $t_1 < q(\alpha) \le \bar{t}_1$. Как правило они находятся “простым подбором” (в результате вычисления значений $F_\delta(t)$ на сетке значений t при достаточно малом $\delta > 0$).

П р и м е р 2. Рассматривался случай с $n = 3$, $r = 4$, $X(t) = \{x \in \Pi \,|\, \Psi(x) \le t\}$, $\Psi(x) = \max\{l_1(x), l_2(x), l_3(x), l_4(x)\}, l_1(x) = x_1 + x_2 + x_3 - 9, l_2(x) = -x_1 - 2x_2 - x_3 - 8, l_3(x) = x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 10$, $l_4(x) = -x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 9$, $\Pi = \{x \in \mathbb{R}^n \mid -10 \le x_i \le 10, i = \overline{1,3}\}$. Величина $q(\alpha)$ вычислялась для $\alpha = 0.9$. Была задана точность $\varepsilon = 0.001$. Начальное значение $k = 5$. Был использован метод интегрирования второго порядка точности. Составлена табл. 2 текущих значений величин k, i, $\varepsilon_i = 0.5(\bar{t}_i - t_i)$, $0.5(\bar{t}_i + t_i)$ на шаге 5 алгоритма 2. Именно на этом шаге происходит увеличение количества этапов дробления k. Поэтому представляет интерес достигнутое минимальное значение величины $\varepsilon_i = 0.5(\bar{t}_i - t_i)$ (текущая точность вычисления $q(\alpha)$ для текущего значения k). Как и было предсказано теоретически, в последнем столбце устанавливается значение 4 (поскольку был использован метод интегрирования второго порядка точности). Алгоритм закончил работу при $i = 20, k = 12$, $\varepsilon_i = 0.5(\bar{t}_i - t_i) = 0.000695261517342338$, $q(\alpha) = q(0.9) \simeq 0.5(\bar{t}_i + t_i) = -2.09240354796087$.

Таблица 2

k	i	$\varepsilon_i(k) = 0.5(\bar{t}_i - t_i)$	$0.5(\bar{t}_i + t_i)$	$\varepsilon_i(k) / \varepsilon_i(k+1)$
5	3	2.48277907312568	2.55166278062295	5.136
6	5	0.948337219377051	–2.189430195617486	2.618
7	7	0.362232585005468	–2.05106965997813	6.854
8	11	0.0528490219125919	–2.0837321517923	2.618
9	13	0.0201865300984221	–2.09144272017497	4.236
10	16	0.00476539333307313	–2.09144272017497	4.236
11	19	0.00112495676612956	–2.09283324320966	—

5. Некоторые свойства выпуклых многогранников. Целью этого раздела является получение геометрического неравенства (4.6), позволяющего в свою очередь получить неравенство (4.5), устанавливающее линейный характер зависимости между вычисляемой на шаге 2 алгоритма 2 величиной $\varepsilon_i = (\bar{t}_i - t_i) / 2$ (точность достигнутого приближения $(\bar{t}_i + t_i) / 2$ к искомому значению $q(\alpha)$) и суммарной погрешностью $\delta_1(k) + \delta_2(k)$ вычисления интегралов на шаге 2. Расчет этих интегралов дает основной вклад в трудоемкость алгоритма 2, которая определяется максимальным значением параметра k — количества этапов дробления “внешнего” куба Π, необходимого для вычисления этих интегралов. На основании оценки (4.5) в замечании 7 приведены весьма “оптимистические” оценки для величины k в зависимости от ε_i, не зависящие от размерности задачи n.

Нам понадобятся некоторые вспомогательные утверждения. Пусть $x^0 \in \mathbb{R}^n$, $\delta > 0$. Обозначим $B^{(n)}(x^0,\delta) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \left|x - x^0\right| \le \delta\}$ — шар радиуса δ с центром в точке x^0. Кроме того, для произвольного множества $U \subseteq \mathbb{R}^n$ считаем, что $\partial U = \bar{U} \setminus \operatorname{int} U$ — граница U.

Утверждение 3. Допустим, что $X(t) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \Psi(x) \le t\}$, $X = X(0) \ne \varnothing$, $\Psi(x) = \max\{l_1(x),\ldots,l_r(x)\}$ и $l_i(x)$ удовлетворяют условиям (1.2). Тогда при любом $t > 0$ множество $X(t)$ содержит каждую точку $x^0 \in X$ вместе с шаром $B^{(n)}(x^0, E^{-1}t)$, где $E = \max\left\{\left|e^1\right|,\ldots,\left|e^r\right|\right\} > 0$.

Доказательство. Из условия $x^0 \in X$ следует, что $\max\left\{\left\langle e^i, x^0\right\rangle + d_i \mid i = \overline{1,r}\right\} \le 0$. Пусть $x \in \mathbb{R}^n$, $\left|x - x^0\right| \le E^{-1}t$. Докажем, что $x \in X(t)$. Действительно,

$$\max_{i=\overline{1,r}}\left\{\left\langle e^i, x\right\rangle + d_i\right\} = \max_{i=\overline{1,r}}\left\{\left\langle e^i, x^0 + (x - x^0)\right\rangle + d_i\right\} = \max_{i=\overline{1,r}}\left\{\left\langle e^i, x^0\right\rangle + d_i + \left\langle e^i, x - x^0\right\rangle\right\} =$$

$$\le \max_{i=\overline{1,r}}\left\{\left\langle e^i, x^0\right\rangle + d_i + \left|e^i\right| \cdot \left|x - x^0\right|\right\} \le \max_{i=\overline{1,r}}\left\{\left\langle e^i, x^0\right\rangle + d_i + E^{-1}\left|e^i\right| t\right\} \le$$

$$\le \max_{i=\overline{1,r}}\left\{\left\langle e^i, x^0\right\rangle + d_i + t\right\} \le \max_{i=\overline{1,r}}\left\{\left\langle e^i, x^0\right\rangle + d_i\right\} + t \le t \Rightarrow x \in X(t).$$

Утверждение 3 доказано.

Следствием утверждения 3 является утверждение 4.

Утверждение 4. Пусть мы находимся в условиях утверждения 3, $t \ge 0$, $t' > t$. Тогда множество $X(t')$ содержит каждую точку $x^0 \in X(t)$ вместе с шаром $B^{(n)}(x^0, E^{-1}(t' - t))$.

Утверждение 5. Пусть $e^1, e^2 \in \mathbb{R}^n, d_1, d_2 \in \mathbb{R}, \delta > 0$, $H_1 = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \middle| \left\langle e^1, x \right\rangle + d_1 = 0 \right\}$, $x^1 \in H_1$,

$$\forall x \in B^{(n)}(x^1, \delta) \cap H_1 \ \left\langle e^2, x \right\rangle + d_2 \le 0. \tag{5.1}$$

Тогда если векторы e^1, e^2 линейно независимы, то $\left\langle e^2, x^1 \right\rangle + d_2 < 0$.

Доказательство. Из того, что векторы e^1, e^2 линейно независимы, следует, что

$$\left|e^1\right| \ne 0, \left|e^2\right| \ne 0, \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad e^2 \ne \lambda e^1. \tag{5.2}$$

Пусть

$$e = e^2 - \gamma e^1, \gamma = \left\langle e^1, e^2 \right\rangle \left|e^1\right|^{-2}. \tag{5.3}$$

Тогда

$$\left\langle e^1, e \right\rangle = \left\langle e^1, e^2 - \gamma e^1 \right\rangle = \left\langle e^1, e^2 \right\rangle - \gamma \left\langle e^1, e^1 \right\rangle = 0, |e| \ne 0 \tag{5.4}$$

(действительно, $|e| = 0 \Rightarrow e^2 = \gamma e^1$, что противоречит (5.2)). Нетрудно показать, что в случае (5.2) выполняется

$$\left| \left\langle e^1, e^2 \right\rangle \right| < \left|e^1\right| \cdot \left|e^2\right|. \tag{5.5}$$

Действительно, используя (5.3), (5.4), имеем

$$\left|e^2\right|^2 = \left\langle e^2, e^2 \right\rangle = \left\langle \gamma e^1 + e, \gamma e^1 + e \right\rangle = \gamma^2 \left|e^1\right|^2 + |e|^2 > \gamma^2 \left|e^1\right|^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|e^2\right|^2 > \left| \left\langle e^1, e^2 \right\rangle \right|^2 \left|e^1\right|^{-2} \Rightarrow \left|e^1\right|^2 \left|e^2\right|^2 > \left| \left\langle e^1, e^2 \right\rangle \right|^2,$$

откуда и следует (5.5). Предположим, что $\left\langle e^2, x^1 \right\rangle + d_2 = 0$. Тогда в силу (5.5) для e, удовлетворяющего (5.3), выполняется

$$\forall t > 0 \quad \left\langle e^2, x^1 + te \right\rangle + d_2 = \left\langle e^2, x^1 \right\rangle + d_2 + t \left\langle e, e^2 \right\rangle = t \left\langle e, e^2 \right\rangle = t \left\langle e^2 - \gamma e^1, e^2 \right\rangle =$$

$$= t \left[\left|e^2\right|^2 - \gamma \left\langle e^1, e^2 \right\rangle \right] = t \left[\left|e^2\right|^2 - \left| \left\langle e^1, e^2 \right\rangle \right|^2 \left|e^1\right|^{-2} \right] > 0, \left\langle e^1, x^1 + te \right\rangle + d_1 = 0,$$

т.е. $\forall t > 0 \quad x^1 + te \in B^{(n)}\left(x^1, t|e|\right) \cap H_1, \quad \left\langle e^2, x^1 + te \right\rangle + d_2 > 0$, а это противоречит (5.1).

Утверждение 5 доказано.

Приведем некоторые простые утверждения, связанные с выпуклыми многогранными множествами. Пусть

$$X = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid l_1(x) \le 0, \ldots, l_r(x) \le 0 \right\} \ne \varnothing, \tag{5.6}$$

где $l_i(x)$ удовлетворяют (1.2), $i \in I_r = \{1, 2, \ldots, r\}, r \in \mathbb{N}$. Множество X называется *выпуклым многогранным* (*полиэдральным*), а в случае, если X — компакт, оно называется *выпуклым многогранником* (*полиэдром*).

Обозначим через $H_i = \{x \in \mathbb{R}^n \mid l_i(x) = 0\}$ гиперплоскость размерности $n-1$ (поскольку $|e^i| \neq 0$), $X_i = \{x \in \mathbb{R}^n \mid l_i(x) \leq 0\}, \Gamma_i = H_i \cap X,\ i \in I_r$. Кроме того, для любого множества $I \subseteq I_r$ обозначим

$$X_I = \{x \in \mathbb{R}^n \mid l_i(x) \leq 0, i \in I\} = \bigcap_{i \in I} X_i$$

(в частности, $X_{I_r} = X, X_\varnothing = \mathbb{R}^n$).

Будем ограничение $l_i(x) \leq 0$, где $i \in I_r$, называть *существенным для* X, если

$$\exists I_i \subseteq I_r: \quad X = X_{I_i} \neq X_{I_i \setminus \{i\}} \tag{5.7}$$

(очевидно, что $i \in I_i$), т.е. $\exists x(i) \in X_{I_i \setminus \{i\}}: \ \ l_i(x(i)) > 0$ (действительно, если $\forall x \in X_{I_i \setminus \{i\}}: l_i(x) \leq 0$, то $X_{I_i \setminus \{i\}} \subseteq X_i \Rightarrow X_{I_i \setminus \{i\}} = X_{I_i \setminus \{i\}} \cap X_i = X_{I_i} = X$, что противоречит (5.7)).

Условие (5.7) делит множество ограничений $l_i(x) \leq 0,\ i \in I_r$ на существенные для X и не являющиеся таковыми. Как следует из определения, ограничение $l_i(x) \leq 0$, где $i \in I_r$, не будет существенным, если

$$\forall I \subseteq I_r \quad X = X_I \Rightarrow X = X_{I \setminus \{i\}}. \tag{5.8}$$

Обозначим через I_* множество номеров ограничений, существенных для X, а через $\tilde{I}$ — множество номеров ограничений, не являющихся существенными для X. Тогда

$$I_r = I_* \cup \tilde{I}, I_* \cap \tilde{I} = \varnothing,\ \tilde{I} = I_r \setminus I_*. \tag{5.9}$$

У т в е р ж д е н и е 6. $X = X_{I_*}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим нетривиальный случай, когда $I_* \neq I_r$, т.е. $\tilde{I} \neq \varnothing$. Пусть для простоты обозначений $\tilde{I} = \{\overline{1, r_1}\}$, где $1 \leq r_1 < r$ (если $r_1 = r$, то $X = X_\varnothing = \mathbb{R}^n$, а это противоречит условию $|e^i| \neq 0,\ i \in I_r$; см. (1.2)). Тогда, используя (5.8), получаем

$$X = X_{I_r} = X_{I_r \setminus \{1\}} = X_{I_r \setminus \{1, 2\}} = \ldots = X_{I_r \setminus \{\overline{1, r_1}\}} = X_{I_*}.$$

Утверждение 5 доказано.

Назовем ограничения $l_i(x) \leq 0, l_j(x) \leq 0$, где $i, j \in I_r$, *эквивалентными*, если

$$\exists \lambda > 0: \quad l_i(x) = \lambda l_j(x) \tag{5.10}$$

(т.е. $e^i = \lambda e^j, d_i = \lambda d_j$).

З а м е ч а н и е 10. Очевидно, что если среди ограничений, задающих множество X, имеются ограничения, эквивалентные некоторому ограничению $l_i(x) \leq 0$, где $i \in I_r$, то множество X не изменится, если оставить только это ограничение, а другие, эквивалентные этому, отбросить. Заметим, что выделение ограничений, эквивалентных данному, представляет собой очень простую вычислительную задачу, поэтому часто можно предполагать, что среди ограничений, задающих множество X, нет эквивалентных. Отметим, кроме того, что при рассмотрении множества $X(t)$ из утверждения 3 следует иметь в виду, что из эквивалентности ограничений при некотором $t \in \mathbb{R}$ не следует их эквивалентность при другом t. То же замечание следует сделать и относительно существенных (или несущественных) ограничений.

Используя то, что $\left|e^i\right| \neq 0, i \in I_r$ (см. (1.2)), нетрудно доказать следующее утверждение.

Утверждение 7. (а) $\operatorname{int} X \neq \varnothing \Leftrightarrow \exists x^0 \in \mathbb{R}^n : l_i(x^0) < 0, i \in I_r$; (б) для любого множества $I \subseteq I_r$ такого, что $X = X_I$, справедливо $x^0 \in \operatorname{int} X \Leftrightarrow l_i(x^0) < 0, i \in I$.

Обозначим $\forall x \in \mathbb{R}^n \quad I(x) = \left\{i \in I_r \mid l_i(x) = 0\right\}$.

Утверждение 8. Пусть $i, j \in I_r$, векторы e^i, e^j линейно зависимы, $\operatorname{int} X \neq \varnothing$, $\exists x^0 \in X : i, j \in I(x^0)$. Тогда ограничения $l_i(x) \leq 0, l_j(x) \leq 0$ эквивалентны.

Доказательство. Из линейной зависимости e^i, e^j, а также того, что $\left|e^i\right| \neq 0, \left|e^j\right| \neq 0$, следует, что $\exists \lambda \neq 0 : e^i = \lambda e^j$. Поскольку $l_i(x^0) = l_j(x^0)$, то

$$\left\langle e^i, x^0\right\rangle + d_i = 0, \left\langle e^j, x^0\right\rangle + d_j = 0 \Rightarrow \left\langle \lambda e^j, x^0\right\rangle + d_i = 0, \left\langle \lambda e^j, x^0\right\rangle + \lambda d_j = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_i = \lambda d_j \Rightarrow l_i(x) = \lambda l_j(x).$$

Осталось доказать, что $\lambda > 0$. Предположим, что $\lambda < 0$. Тогда

$$X_i \cap X_j = H_i = H_j \Rightarrow X = \bigcap_{i \in I_r} X_i \subseteq H_i,$$

а это противоречит условию $\operatorname{int} X \neq \varnothing$. Таким образом, условие (5.10) выполнено, а следовательно, ограничения $l_i(x) \leq 0, l_j(x) \leq 0$ эквивалентны. Утверждение 8 доказано.

Утверждение 9. Пусть среди ограничений, задающих множество X, нет эквивалентных. Тогда, если $\operatorname{int} X \neq \varnothing$, то

(а) $\forall i \in I_r \left[i \in I_* \Leftrightarrow X \neq X_{I_r \setminus \{i\}}\right] \Leftrightarrow \left[\exists x(i) \in X_{I_r \setminus \{i\}} : l_i(x(i)) > 0\right]$;

(б) $\forall i \in I_* \ \exists x^0(i) \in \Gamma_i, \delta_i > 0 : I(x^0(i)) = \{i\},\ B^{(n)}(x^0(i), \delta_i) \cap H_i \subseteq \Gamma_i = H_i \cap X$.

Доказательство. Покажем справедливость (а). Пусть $i \in I_r$. Если $X (= X_{I_r}) \neq X_{I_r \setminus \{i\}}$, то ограничение $l_i(x) \leq 0$ является существенным для X, т.е. $i \in I_*$. Допустим теперь $i \in I_*$. Покажем, что $X \neq X_{I_r \setminus \{i\}}$. Предположим противное. Пусть

$$X = X_{I_r \setminus \{i\}}. \tag{5.11}$$

Из $i \in I_*$ получаем (см. (5.7)), что $\exists I_i \subseteq I_r : \ X = X_{I_i} \neq X_{I_i \setminus \{i\}}$, а следовательно, $\exists x(i) \in \mathbb{R}^n : \ x(i) \in X_{I_i \setminus \{i\}},\ x(i) \notin X_{I_i}$, откуда $l_j(x(i)) \leq 0, j \in I_i \setminus \{i\},\ l_i(x(i)) > 0$. Пусть $x^0 \in \operatorname{int} X$. Тогда (см. утверждение 7(б)) $l_j(x^0) < 0, j \in I_r$. Заметим, что $\exists \lambda \in (0,1) : \ x^\lambda = \lambda x(i) +$

$$+(1-\lambda)x^0 = x^0 + \lambda(x(i) - x^0), l_i(x^\lambda) = 0, \forall j \in I_i \setminus \{i\}\ l_j(x^\lambda) < 0, \text{ а следовательно,}$$
$$\exists \delta > 0 : \ \forall x \in B^{(n)}(x^\lambda, \delta),\ \forall j \in I_i \setminus \{i\} \quad l_j(x) < 0, \text{ откуда}$$

$$x^\lambda \in H_i, \forall x \in B^{(n)}(x^\lambda, \delta) \cap H_i \ \ l_i(x) = 0,\ l_j(x) < 0,\ j \in I_i \setminus \{i\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B^{(n)}(x^\lambda, \delta) \cap H_i \subseteq X_{I_i} = X \Rightarrow \forall x \in B^{(n)}(x^\lambda, \delta) \cap H_i \ \left\langle e^j, x\right\rangle + d_j \leq 0,\ j \in I_r.$$

Но тогда $I(x^\lambda) = \{i\}$, так как в силу утверждения 5, если $j \in I(x^\lambda), j \neq i$, то e^i, e^j линейно зависимы, а следовательно ограничения $l_i(x) \leq 0, l_j(x) \leq 0$ эквивалентны (см. утверждение 8), что противоречит исходным предположениям. Таким образом, $l_j(x^\lambda) < 0, j \in I_r \setminus \{i\}$, а следовательно, x^λ входит в $X_{I_r \setminus \{i\}}$ вместе с некоторым шаром, а это противоречит (5.11), поскольку $l_i(x^\lambda) = 0$ и в силу $\left|e^i\right| \neq 0$ выполняется $x^\lambda \notin \operatorname{int}X$. Утверждение 9(а) доказано.

Для доказательства (б) осталось заметить, что условие (б) выполняется для $x^0(i) = x^\lambda$ (см. x^λ из доказательства (а); при этом в силу (а) можно при нахождении x^λ сразу положить $I_i = I_r$). Утверждение 9(б) доказано.

З а м е ч а н и е 11. Из утверждения 9(а) следует, что в случае, когда среди ограничений, задающих X, нет эквивалентных, то для выделения существенных ограничений достаточно решить следующие ЗЛП:

$$l_i(x) \to \sup(= \gamma_i),\ l_j(x) \le 0,\ j \in I_r \setminus \{i\},$$

где $i \in I_r$. Тогда $i \in I_* \Leftrightarrow \gamma_i > 0$.

З а м е ч а н и е 12. Из замечаний 10, 11 следует, что, не теряя общности рассуждений, можно считать, что среди ограничений, задающих X, нет эквивалентных, и при этом все ограничения существенные. Однако это замечание нельзя перенести на случай, когда рассматривается множество $X(t)$ из утверждения 3 (см. замечание 10).

Допустим, что $x^1, x^2 \in \mathbb{R}^n$. Обозначим $(x^1, x^2) = \left\{\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2 \middle| \lambda \in (0,1)\right\}$, $\left[x^1, x^2\right] = \left\{\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2 \middle| \lambda \in [0,1]\right\}$. Пусть $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ — выпуклое замкнутое множество, F — выпуклое замкнутое непустое подмножество Y. Множество F называется *гранью* Y, если

$$\forall x^1, x^2 \in Y\ \left(x^1, x^2\right) \cap F \neq \varnothing \Rightarrow \left[x^1, x^2\right] \subseteq F.$$

У т в е р ж д е н и е 1 0. Допустим, что $i \in I_r$, $\Gamma_i = H_i \cap X \neq \varnothing$. Тогда Γ_i — грань X.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x^1, x^2 \in X, x^0 \in \left(x^1, x^2\right), x^0 \in \Gamma_i$. Тогда $\exists \lambda \in (0,1)$: $x^0 = \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2$,

$$0 = l_i(x^0) = \lambda l_i(x^1) + (1-\lambda) l_i(x^2). \tag{5.12}$$

Из условий $x^1, x^2 \in X$ следует, что

$$l_i(x^1) \le 0,\ l_i(x^2) \le 0. \tag{5.13}$$

Докажем, что $l_i(x^1) = 0,\ l_i(x^2) = 0$, откуда $x^1, x^2 \in \Gamma_i$. Пусть, например, $l_i(x^1) < 0$. Тогда из (5.12) получаем $l_i(x^2) > 0$, что противоречит (5.13). Утверждение 10 доказано.

Совершенно аналогично доказывается утверждение 11.

У т в е р ж д е н и е 1 1. Пусть $I \subseteq I_r$, $I \neq \varnothing$,

$$\Gamma = X \cap \bigcap_{i \in I} H_i \neq \varnothing.$$

Тогда Γ — грань X.

У т в е р ж д е н и е 1 2. Пусть среди ограничений, задающих множество X, нет эквивалентных, $\operatorname{int}X \neq \varnothing$. Тогда,

(а) $\forall i \in I_*\ \Gamma_i = H_i \cap X$ — грань размерности $n-1$;

(б) $\partial X = \Gamma_* = \bigcup_{i \in I_*} \Gamma_i$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение (а) является очевидным следствием утверждения 9(б). Покажем справедливость утверждения (б). Включение $\Gamma_* \subseteq \partial X$ следует из утверждения 7(б). Докажем обратное включение. Пусть $x \in \partial X$. Тогда $x \in X$, $x \notin \operatorname{int}X$ и в силу утверждений 6, 7(б) $\exists i \in I_*$: $l_i(x) = 0$, откуда $x \in \Gamma_i \subseteq \Gamma_*$. Утверждение 12(б) доказано.

Для дальнейшего понадобятся некоторые дополнительные понятия и обозначения. Пусть $e \in \mathbb{R}^n$, $|e| \neq 0$, $d \in \mathbb{R}$, $l(x) = \langle e,x \rangle + d$, $H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid l(x) = 0\}$ — гиперплоскость размерности $n-1$ (поскольку $|e| \neq 0$, которая может соответствовать любому из введенных ранее H_i, $i \in I_r$).

Пусть $y \in \mathbb{R}^n$. Рассмотрим точку $h \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющую следующим двум условиям: (а) $l(h) = 0$, т.е. $h \in H$; (б) $y - h \perp H$, т.е. $y - h = \gamma e$, где $\gamma \in \mathbb{R}$. Тогда из (б) получаем $h = y - \gamma e$, откуда в силу (а) $0 = l(h) = l(y - \gamma e) = \langle y,e \rangle - \gamma |e|^2 + d$, а следовательно,

$$h = y - \gamma e, \gamma = \left(\langle y,e \rangle + d\right) / |e|^2. \tag{5.14}$$

Таким образом, точка h определяется из условий (а), (б) однозначно. Она называется *проекцией* точки y на гиперплоскость H и обозначается $h = \mathrm{pr}_H y$.

Пусть $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Тогда $\mathrm{pr}_H A = \bigcup_{y \in A} \mathrm{pr}_H y$ — проекция множества A на гиперплоскость H. Пусть $U \subseteq H$, $t \geq 0$. Тогда $U^{t|e|} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = u + \tau e, u \in U, \tau \in [0,t]\}$ — *призма* с основанием U и высотой $t|e|$. Приведем некоторые простые свойства проекции точки на гиперплоскость H, а также призм.

Утверждение 13. Пусть $y = h + te$, где $h \in H, t \in \mathbb{R}$. Тогда $\mathrm{pr}_H y = h$.

Доказательство. Используя условия (5.14), $l(h) = 0$, получаем: $\mathrm{pr}_H y = y - \gamma e$, $\gamma = \left(\langle h + te,e \rangle + d\right) / |e|^2 = t|e|^2 / |e|^2 = t$, откуда $\mathrm{pr}_H y = y - \gamma e = h + te - te = h$. Утверждение 13 доказано.

Следствием утверждения 13 является утверждение 14.

Утверждение 14. Пусть $U \subseteq H$, $t \geq 0$. Тогда $\mathrm{pr}_H U^{t|e|} = U$.

Утверждение 15. $\forall u,v \in \mathbb{R}^n$ $\langle \mathrm{pr}_H u - \mathrm{pr}_H v, e \rangle = l(\mathrm{pr}_H u) - l(\mathrm{pr}_H v) = 0$.

Доказательство: $\forall h^1, h^2 \in H$ $l(h^1) - l(h^2) = 0 - 0 = 0$. Утверждение 15 доказано.

Утверждение 16. Справедливо неравенство

$$\forall u,v \in \mathbb{R}^n \ |\mathrm{pr}_H u - \mathrm{pr}_H v| \leq |u - v|. \tag{5.15}$$

Доказательство. Пусть γ_1, γ_2 определяются согласно (5.14) для $y = u,v$ соответственно. Используя утверждение 15, имеем

$$|u - v|^2 = \langle \mathrm{pr}_H u + \gamma_1 e - \mathrm{pr}_H v - \gamma_2 e, \mathrm{pr}_H u + \gamma_1 e - \mathrm{pr}_H v - \gamma_2 e \rangle =$$

$$= |\mathrm{pr}_H u - \mathrm{pr}_H v|^2 + (\gamma_1 - \gamma_2)^2 |e|^2,$$

откуда и следует (5.15). Утверждение 16 доказано.

Утверждение 17. Пусть $x^0 \in \mathbb{R}^n$, $h^0 = \mathrm{pr}_H x^0$, $\delta \geq 0$. Тогда $\mathrm{pr}_H B^{(n)}(x^o,\delta) = B^{(n)}(h^o,\delta) \cap H$.

Доказательство. Пусть $h \in \mathrm{pr}_H B^{(n)}(x^o,\delta)$. Покажем, что $h \in B^{(n)}(h^o,\delta) \cap H$. Из $h \in \mathrm{pr}_H B^{(n)}(x^o,\delta)$ следует, что $h \in H$, $\exists x \in B^{(n)}(x^o,\delta)$: $h = \mathrm{pr}_H x$. Но тогда, используя утверждение 16, получаем $h \in H$, $|h - h^0| \leq |x - x^0| \leq \delta$, что и требовалось доказать. Пусть теперь $h \in B^{(n)}(h^o,\delta) \cap H$. Покажем, что $h \in \mathrm{pr}_H B^{(n)}(x^o,\delta)$. Пусть γ удовлетворяет (5.14) при $y = x^0$. Тогда $h^0 = x^0 - \gamma e$. Пусть $x = h + \gamma e$. Тогда в силу утверждения 13 $\mathrm{pr}_H x = h$, $|x - x^0| = |h - h^0| \leq \delta$, а следовательно, $x \in B^{(n)}(x^o,\delta)$, $h = \mathrm{pr}_H x$, что и требовалось доказать. Утверждение 17 доказано.

Следствием утверждений 14, 17 является утверждение 18.

Утверждение 18. Пусть $U \subseteq H$, $t > 0$, $u \in intU^{t|e|}$, $h = \mathrm{pr}_H u$. Тогда $\exists \delta > 0$: $B^{(n)}(h,\delta) \cap H \subseteq U$.

Утверждение 19. Пусть $e^1, e^2 \in \mathbb{R}^n$, $\left|e^1\right| \neq 0$, $\left|e^2\right| \neq 0$, $d_1, d_2 \in \mathbb{R}$, $x^1, x^2 \in \mathbb{R}^n$, $\left\langle e^1, x^1\right\rangle + d_1 = 0$, $\left\langle e^2, x^2\right\rangle ++d_2 = 0$, $\left\langle e^2, x^1\right\rangle + d_2 < 0$, $\left\langle e^1, x^2\right\rangle + d_1 < 0$. Тогда не существует $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, таких, что

$$t_1 \geq 0,\ t_2 \geq 0,\ x^1 + t_1 e^1 = x^2 + t_2 e^2. \tag{5.16}$$

Доказательство. Предположим, что нашлись такие $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, что выполняется (5.16). Тогда

$$\begin{gathered}\left\langle e^2, x^1\right\rangle + d_2 = \left\langle e^2, x^2 + t_2 e^2 - t_1 e^1\right\rangle + d_2 = \left\langle e^2, x^2\right\rangle + d_2 + t_2\left|e^2\right|^2 - t_1\left\langle e^1, e^2\right\rangle = \\ = t_2\left|e^2\right|^2 - t_1\left\langle e^1, e^2\right\rangle < 0,\end{gathered} \tag{5.17}$$

$$\begin{gathered}\left\langle e^1, x^2\right\rangle + d_1 = \left\langle e^1, x^1 + t_1 e^1 - t_2 e^2\right\rangle + d_1 = \left\langle e^1, x^1\right\rangle + d_1 + t_1\left|e^1\right|^2 - t_2\left\langle e^1, e^2\right\rangle = \\ = t_1\left|e^1\right|^2 - t_2\left\langle e^1, e^2\right\rangle < 0.\end{gathered} \tag{5.18}$$

Из (5.17), (5.18) заключаем, что $t_1 \neq 0,\ t_2 \neq 0$, $\left\langle e^1, e^2\right\rangle > 0$, т.е. $\left\langle e^1, e^2\right\rangle = \left|\left\langle e^1, e^2\right\rangle\right|$, и при этом $t_1 > 0,\ t_2 > 0, t_2 / t_1 < \left|\left\langle e^1, e^2\right\rangle\right| \cdot \left|e^2\right|^{-2}, t_1 / t_2 < \left|\left\langle e^1, e^2\right\rangle\right| \cdot \left|e^1\right|^{-2}$, откуда $1 < \left|\left\langle e^1, e^2\right\rangle\right|^2 \cdot \left|e^1\right|^{-2} \cdot \left|e^2\right|^{-2} \cdot \leqslant 1$, т.е. пришли к противоречию. Утверждение 19 доказано.

Утверждение 20. Пусть среди ограничений, задающих множество X, нет эквивалентных, $\operatorname{int} X \neq \varnothing$, $1, 2 \in I_*$. Пусть далее $t_1, t_2 > 0$, $\Gamma_i = H_i \cap X = \left\{x \in X \left| \left\langle e^i, x\right\rangle + d_i = 0\right.\right\}$, $\Gamma_i^{t_i\left|e^i\right|} = \left\{x = x' + \tau e \mid x' \in \Gamma_i, \tau \in \left[0, t_i\right]\right\}$ — призма с основанием Γ_i и высотой $t_i\left|e^i\right|$, $i = 1, 2$. Тогда (а) $\forall i \in \{1, 2\}$ Γ_i — грань размерности $n - 1$; (б) не существует точки $x^0 \in \operatorname{int}\Gamma_1^{t_1\left|e^1\right|} \cap \operatorname{int}\Gamma_2^{t_2\left|e^2\right|}$.

Доказательство. Утверждение (а) следует из утверждения 9(б). Докажем (б). Рассмотрим сначала случай, когда векторы e^1, e^2 не коллинеарные. Тогда они являются линейно независимыми. Предположим, что нашлась точка $x^0 \in \operatorname{int}\Gamma_1^{t_1\left|e^1\right|} \cap \operatorname{int}\Gamma_2^{t_2\left|e^2\right|}$. Пусть $\delta > 0$, $B^{(n)}(x^0, \delta) \subseteq \Gamma_1^{t_1\left|e^1\right|}$, $x^1 \in \Gamma_1$, $\tau_1 \in (0, t_1)$, $x^0 = x^1 + \tau_1 e^1$. Тогда в силу утверждений 13, 14, 17 $\operatorname{pr}_{H_1} x^0 = x^1$, $B^{(n)}(x^1, \delta) \cap H_1 = \operatorname{pr}_{H_1} B^{(n)}(x^0, \delta) \subseteq \operatorname{pr}_{H_1}\Gamma_1^{t_1\left|e^1\right|} = \Gamma_1 \subseteq X$, а в силу утверждения 5 получаем, что $\left\langle e^2, x^1\right\rangle + d_2 < 0$. Совершенно аналогично для $x^2 \in \Gamma_2, \tau_2 \in (0, t_2)$, таких, что $x^0 = x^2 + \tau_2 e^2$, имеем $\left\langle e^1, x^2\right\rangle + d_1 < 0$. Полученное равенство $x^1 + \tau_1 e^1 = x^0 = x^2 + \tau_2 e^2$, где $\tau_1, \tau_2 > 0$, противоречит утверждению 19.

Пусть теперь векторы e^1, e^2 коллинеарные. Тогда $\exists \lambda \in \mathbb{R} : e^2 = \lambda e^1$. Очевидно, что $\lambda \neq 0$. Предположим, что $\lambda > 0$. Возможны случаи: (а) $d_2 = \lambda d_1$, (б) $d_2 < \lambda d_1$, (в) $d_2 > \lambda d_1$. В случае (а) условия 1, 2 эквивалентны, что противоречит условиям доказываемого утверждения. В случаях (б), (в) приходим к противоречию с условием $1,2 \in I_*$. Пусть теперь $\lambda < 0$. Предположим, что нашлась точка $x^0 \in \mathrm{int}\Gamma_1^{t_1|e^1|} \cap \mathrm{int}\Gamma_2^{t_2|e^2|}$. Тогда аналогично предыдущему найдутся $x^1 \in \Gamma_1$, $x^2 \in \Gamma_2$, $\tau_1 \in (0, t_1)$, $\tau_2 \in (0, t_2)$: $x^0 = x^1 + \tau_1 e^1 = x^2 + \tau_2 e^2$, откуда $x^2 = x^1 + \tau_1 e^1 - \tau_2 e^2 = x^1 + \lambda_1 e^1$, где $\lambda_1 = \tau_1 - \lambda\tau_2 > 0$, а следовательно, $\langle e^1, x^2 \rangle + d_1 = \langle e^1, x^1 \rangle + \lambda_1 |e^1|^2 + d_1 = \lambda_1 |e^1|^2 + d_1 > d_1$, а это противоречит тому, что $x^2 \in \Gamma_2 \subseteq X \subseteq X_1$. Утверждение 20(б) доказано.

Пусть мы находимся в условиях утверждения 1 и $t > 0$. Тогда $\mathrm{int}X(t) \neq \varnothing$, и мы можем ввести в рассмотрение поверхность множества $X(t)$, т.е. его границу (см. утверждение 12(б)):

$$\partial X(t) = \bigcup_{i \in I_*(t)} \Gamma_i(t),$$

где $I_*(t)$ — множество номеров ограничений, существенных для $X(t)$, которая в силу утверждения 12(а) является объединением граней $\Gamma_i(t)$ размерности $n-1$ многогранного множества $X(t)$. Как уже отмечалось, если X — ограниченное множество, $\forall t \geq 0$ множество $X(t)$ также является ограниченным, т.е. является многогранником и в этом случае можно говорить о площади поверхности $X(t)$ как сумме площадей попарно различных граней размерности $n-1$ многогранника $X(t)$ (площадь каждой грани $\Gamma(t)$ размерности $n-1$ многогранника $X(t)$ понимается как мера Лебега $\mu_{n-1}(\Gamma(t))$, рассматриваемая в плоскости размерности $n-1$, включающей в себя $\Gamma(t)$ (эта плоскость является аффинной оболочкой множества $\Gamma(t)$). Обозначим через $S(t)$ площадь поверхности многогранника $X(t)$.

Утверждение 21. Пусть мы находимся в условиях утверждения 3, $t > 0$, $t' \geq t$. Тогда

$$\mu(X(t')) - \mu(X(t)) \geq E^{-1} S(t)(t' - t).$$

Доказательство. Из $t > 0$ следует, что $\mathrm{int}X(t) \neq \varnothing$. В силу утверждения 4 каждая точка любой грани $\Gamma = \Gamma(t)$ размерности $n-1$ многогранника $X(t)$ войдет в множество $X(t')$ вместе с внешним перпендикуляром к этой грани длины $\geq E^{-1}(t' - t)$, а следовательно, $X(t')$ будет содержать вместе с Γ призму Γ^{h_Γ} с основанием Γ и высотой $h_\Gamma \geq E^{-1}(t' - t)$, т.е. с объемом (мерой Лебега) $S_\Gamma h_\Gamma \geq E^{-1} S_\Gamma (t' - t)$, где S_Γ — мера Лебега размерности $n-1$ грани Γ. Из утверждения 20 следует, что для различных граней Γ_i, Γ_j размерности $n-1$ многогранника $X(t)$ в случае $i, j \in I_*(t)$ (где $I_*(t)$ — множество номеров ограничений, существенных для $X(t)$) соответствующие им призмы попарно не пересекаются в своих внутренних точках, а в силу утверждения 12(б)

$$\partial X(t) = \bigcup_{i \in I_*(t)} \Gamma_i,$$

откуда

$$\mu\big(X(t')\big) - \mu\big(X(t)\big) \geq \sum_{i \in I_*(t)} S_{\Gamma_i} h_{\Gamma_i} \geq \sum_{i \in I_*(t)} E^{-1} S_{\Gamma_i}(t' - t) = E^{-1} S(t)(t' - t).$$

Утверждение 21 доказано.

Заключение. Настоящую статью можно рассматривать как продолжение серии работ [6—9], посвященных численным методам многомерного интегрирования. Предлагается приложение этих методов к задаче квантильного анализа (вычисления с заданной точностью ε значения функции квантили).

Поскольку наиболее значимые результаты были получены в [6—9] для многогранной области интегрирования и случая, когда подынтегральная функция является плотностью нормального распределения, то и в настоящей работе основной упор делается именно на этот случай. При этом приведена оценка для основного параметра метода (см. алгоритм 2) — величины k (количества этапов последовательного дробления кубов), в наибольшей степени определяющего общий объем вычислений. Найдены оценки для каждой из двух описанных в [8, 9] возможных модификаций используемого метода интегрирования, а именно $k \le C_1 - 0.5\log_2\varepsilon$ (для 1-й модификации) и $k \le C_2 - (\log_2\varepsilon)/3$ (для 2-й модификации), где C_1, C_2 — некоторые постоянные, ε — погрешность решения задачи. Замечательно, что в этих оценках не присутствует число n — размерность задачи. Например, вторая из этих оценок говорит о том, что при каждом увеличении величины k на 1 можем ожидать уменьшения погрешности ε в 8 раз.

В замечании 9 также рассматривается вопрос о применимости алгоритма 2 к возможно более широкому множеству задач. Перечислены условия, необходимые для его реализации. Используя результаты из [6—9], показывается, что во многих случаях эти условия выполняются.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Малышев В.В.*, *Кибзун А.И.* Анализ и синтез высокоточного управления летательными аппаратами. М.: Машиностроение, 1987.
2. *Кибзун А.И.*, *Курбаковский В.Ю.* Численные алгоритмы квантильной оптимизации и их применение к решению задач с вероятностными ограничениями // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1991. № 1.
3. *Бахвалов Н.С.* Численные методы. М.: Наука, 1975.
4. *Никольский С.М.* Квадратурные формулы. М.: Наука, 1979.
5. *Мысовских И.П.* Интерполяционные кубатурные формулы. М.: Наука, 1981.
6. *Нефедов В.Н.* К вопросу о вычислении вероятностного критерия оптимизации с использованием методов ветвления и отсечения. Изв. РАН. Техн. кибернетика. 1993. № 4. С. 51—60.
7. *Нефедов В.Н.* К вопросу об отыскании глобального экстремума в липшицевых и полиномиальных задачах оптимизации. Деп. в ВИНИТИ. 26.04.1991. № 1759-В91. М.: ВИНИТИ, 1991.
8. *Нефедов В.Н.* О приближенном вычислении многомерного интеграла с заданной точностью. Деп. в ВИНИТИ. 11.11.1991. № 4838-В91. М.: ВИНИТИ, 1991.
9. *Нефедов В.Н.* Некоторые численные методы приближенного вычисления вероятностной меры многогранника второго и третьего порядков точности // ЖВМ и МФ. 2019. Т. 59. № 7. С. 1108—1124.
10. *Кристофидес Н.* Теория графов. Алгоритмический подход. М.: Мир, 1978.
11. *Васильев Ф.П.* Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1988.
12. *Травин А.А.* Алгоритмы оценки квантильного критерия с заданной точностью в задачах стохастического программирования с кусочно-линейными и квадратичными функциями потерь: Автореф. дис. канд. физ.-мат. наук. М.: МАИ, 2015.

ИЗВЕСТИЯ РАН. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2024, № 2, С. 25–42

ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ И ИДЕНТИФИКАЦИЯ

УДК 519.252

СТОХАСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ТРУДОЕМКОСТИ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ. II. ОПИСАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ С БАЗАМИ ДАННЫХ[1]

© 2024 г. А. В. Борисов[a], *, А. В. Иванов[a], **
[a]ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия
**e-mail: ABorisov@frccsc.ru*
***e-mail: AIvanov@frccsc.ru*

Поступила в редакцию 07.06.2023 г.
После доработки 17.07.2023 г.
Принята к публикации 29.01.2024 г.

Работа является второй частью цикла, посвященного формализации описания времени выполнения пользовательских заданий на виртуальных вычислительных узлах. В ней приведен анализ качества предлагаемых моделей, описывающих время обработки информации, хранимой в базах данных. В качестве тестового объекта использован макет системы обезличивания персональных данных пассажиров. Построены стохастические модели трудоемкости решения двух типов заданий: обезличивания персональных данных и вычисления их статистических характеристик. Рассмотрено детальное описание планирования и выполнения нагрузочного тестирования для построения данных моделей. Полученные по реальным данным модели трудоемкости продемонстрировали достаточно высокое качество.

Ключевые слова: стохастическая модель, виртуальный вычислительный узел, нагрузочное тестирование, обработка информации в базе данных, обезличивание персональных данных.

DOI: 10.31857/S0002338824020032, **EDN:** VOQZTV

STOCHASTIC MODELS FOR TIME COMPLEXITY OF COMPUTING TASKS: II. DESCRIPTION OF INTERACTION WITH DATABASES

A. V. Borisov[a], *, A. V. Ivanov[a], **
[a]Federal Research Center "Computer Science and Control" of Russian Academy of Sciences
**e-mail: ABorisov@frccsc.ru,*
***e-mail: AIvanov@frccsc.ru*

The paper contains the second part of an investigation devoted to the design of the mathematical models for the execution time of user tasks carried out on the virtual calculating nodes. We provide the performance of the proposed model for the description of the data processing fulfilled in the databases. As a testbed for stress testing, we choose a prototype of the anonymization system of the passengers’ personal data. There are stochastic models describing two types of user tasks: personal data anonymization procedure and calculation of the sample statistical characteristics. The paper contains a detailed description of the stress test planning and fulfillment for both models. The obtained mathematical models developed by the real data demonstrate high performance.

Keywords: stochastic model, virtual computational node, stress testing, information processing in databases, anonymization of personal data

Введение. Предметом исследования первой части [1] являются методы математического описания времени выполнения пользовательских заданий на виртуальных вычислительных узлах. Подобные математические модели актуальны для оптимизации использования ресурсов в сетях

[1] Работа выполнена с использованием инфраструктуры Центра коллективного пользования «Высокопроизводительные вычисления и большие данные» (ЦКП «Информатика») ФИЦ ИУ РАН (г. Москва).

распределенных/облачных/граничных вычислений, сетях, управляемых вычислениями, и пр. Время выполнения τ, очевидно, зависит от ресурсов узла x, характеристик пользовательских заданий y, а также текущих значений аппаратно-программной среды узла z. Однако основной чертой τ является наличие статистической неопределенности: время выполнения одного и того же задания на одном и том же узле варьируется от запуска к запуску и может трактоваться как случайная величина: $\tau = \tau(\omega)$. Для решения прикладной задачи оценивания вероятности превышения временем выполнения задания некоторого фиксированного порога достаточно знать моментные характеристики: среднее $\mathcal{M} \triangleq \mathsf{E}\{\tau(\omega)\}$ и дисперсию $\mathcal{D} \triangleq \mathsf{E}\left\{\left(\tau(\omega) - \mathcal{M}\right)^2\right\}$. Очевидно, что $\mathcal{M}$ и $\mathcal{D}$ являются функциями от (x, y, z): $\mathcal{M} = \mathcal{M}_z(x, y)$, $\mathcal{D} = \mathcal{D}_z(x, y)$. Предполагается, что вид функций $\mathcal{M}_z(x, y)$ и $\mathcal{D}_z(x, y)$ известен с точностью до параметров. Задача построения стохастической модели трудоемкости сводится к оцениванию этих параметров по статистической информации, полученной в результате нагрузочного тестирования.

В первой части исследования дано детальное описание векторов x, y и z, а также свойств функций $\mathcal{M}_z(x, y)$ и $\mathcal{D}_z(x, y)$, предложен конкретный вид функций, пригодных для описания $\mathcal{M}_z(x, y)$ и $\mathcal{D}_z(x, y)$, дана постановка задачи идентификации модели трудоемкости в форме задачи оценивания параметров регрессионной модели и определены требования к статистической информации, необходимой для решения данных регрессионных задач, ее состав, принципы сбора и обработки по результатам проведения нагрузочного тестирования.

Целью настоящей работы является иллюстрация эффективности предложенной модели трудоемкости на примере описания временны́х затрат на обработку информации, хранимой в базах данных.

Статья имеет следующую структуру. В качестве объекта тестирования выступает макет системы обезличивания персональных данных пассажиров [1]. В разд. 1 описаны аппаратные и программные характеристики виртуального узла, на котором установлен макет. Особое внимание уделено задачам, решаемым с помощью специального программного обеспечения (СПО), установленного на узле. Именно они и определяют типы пользовательских заданий, на выполнение которых рассчитан узел. С алгоритмической точки зрения функции макета разделены на две части. Раздел 2 посвящен построению стохастической модели задания 1, реализующего процедуру обезличивания персональных данных. Дано краткое описание результатов выполнения этой процедуры. Изложены результаты нагрузочного тестирования и проанализированы свойства построенной модели. В разд. 3 имеются аналогичные сведения о стохастической модели трудоемкости задания 2 — вычисления выборочных статистических характеристик персональных или обезличенных данных. В Заключении сведены выводы и перспективы дальнейших исследований.

1. Краткие сведения о тестируемом программном комплексе. Для демонстрации применимости предложенной модели трудоемкости выполнения пользовательских заданий в качестве примера СПО использован макет системы обезличивания персональных данных пассажиров [1]. Виртуальный узел установлен на основной компьютер со следующими характеристиками: процессор Intel Core i7-3770 3.4 ГГц, ОЗУ 16 Гб, ОС Windows 10 Pro, технология виртуализации Hyper-V. Программное обеспечение (ПО) виртуального узла состоит из:

общесистемного программного обеспечения (ОПО), состоящего из операционной системы Астра Linux CE 2.12 Орел и системы управления базами данных (СУБД) — Postgres 9.6;

СПО, включающего в себя тестовую базу персональных данных, содержащую порядка 26 млн записей и программный компонент, который реализует графический пользовательский интерфейс и основные шаблоны обезличивания, разработанный с помощью средств Microsoft Visual Studio.

Вектор характеристик ресурсов узла $x = (x_1, x_2)$ содержит следующие характеристики:

x_1 — количество процессорных ядер (до 4 шт., назначаются узлу поштучно),

x_2 — объем оперативной памяти (до 8 Гб, назначается узлу с шагом 0.5 Гб).

СПО виртуального узла разработано для выполнения следующих целевых функций:

1) выбор массива необезличенных данных с помощью системы фильтров,

2) решение задачи обезличивания набора выбранных данных в соответствии с различными шаблонами обезличивания полей (исключение, группировка, случайная перестановка, зашумление, синтез искусственных данных),

3) вычисление уровня анонимности для выбранных комбинаций полей,

4) вычисление корреляции выбранных пар полей,

5) вычисление уровня полезности выбранных комбинаций полей,

6) построение гистограммы значений выбранного поля.

В качестве исследуемых типов заданий выбраны

комбинация функций 1 – 2: выбор массива необезличенных данных с последующим их обезличиванием; задание характеризуется единственным параметром – своим объемом y_1,

комбинация функций 1 – 4: выбор массива данных с последующим вычислением выборочной ковариации пары столбцов; задание также характеризуется единственным параметром – своим объемом y_1.

Данный выбор продиктован следующими причинами. Во-первых, при эксплуатации комплекса функция 1 будет задействована практически всегда: обезличивание и вычисление статистических характеристик всегда выполняются для некоторого подмножества данных, которые должны быть предварительно выбраны с помощью механизма фильтров. Во-вторых, по своей алгоритмической структуре целевые функции 2 – 6 могут быть разделены на две части. В первую входят функции, реализация которых предполагает выполнение некоторой "линейной" последовательности операций. К таким относятся функции 2 и 5. Во вторую группу входят функции 3, 4 и 6, реализуемые с помощью стандартных оптимизированных процедур СУБД. Целью данной части исследования является не построение исчерпывающей математической модели конкретного макета программного комплекса системы обезличивания, а лишь демонстрация эффективности использования предложенной стохастической модели для описания функционирования СПО обработки информации, хранящейся в базе данных. Поэтому для построения моделей были выбраны по одному представителю из этих двух групп. Можно ожидать, что модели этих задач будут различаться видом зависимости характеристик времени выполнения как от ресурсов узла, так и от объема выполняемых заданий.

2. Модель трудоемкости задания 1 обезличивания данных. Задача обезличивания данных состоит в выборе группы записей необезличенных данных из базы данных (БД), применении к ним шаблонов обезличивания и последующем сохранении результатов в БД. Обработка записей производится в оперативной памяти, что обуславливает высокие требования этой задачи к объему памяти виртуального узла. Обработка ведется последовательно, поэтому задача не выигрывает от наличия дополнительных процессорных ядер. Исходные данные содержат целочисленное значение "Возраст", значения даты/времени "Дата начала", "Дата конца", вещественные значения "Результат 1", "Результат 2", "Результат 3", категориальные значения "Категория 1", "Категория 2", "Категория 3", "Категория 4", "Аэропорт", "Компания". Все записи также содержат поле "Порядковый номер". Выбор данных производится по критерию принадлежности номера записи указанному диапазону. В рассматриваемом примере выполняется обезличивание всех полей исходного набора данных.

В зависимости от типа поля для его обезличивания могут применяться преобразования различного типа – так называемые *шаблоны*. Шаблон разбиения применим для числовых полей. В качестве результата этот шаблон выдает некоторый интервал, которому принадлежит исходное значение. Например, шаблон разбиения может быть применим к полю "Возраст", и в качестве результата выдает тот из предопределенных интервалов возрастов, в который попадает исходное значение возраста.

Шаблон зашумления также применяется к числовым полям и их наборам. Он заключается в добавлении к исходному значению поля независимого шума, аддитивного или мультипликативного, имеющего известное распределение. Например, результатом применения шаблона зашумления к полю "Уровень сахара в крови" является сумма исходного значения и независимой центрированной случайной ошибки, содержащей равномерное распределение с параметром, отвечающим за уровень анонимности.

Шаблон синтеза применим к числовым и словарным полям, а также их наборам. По всей совокупности исходных значений строится их эмпирическое распределение. Результатом применения этого шаблона являются сгенерированные значения, распределение которых совпадает с эмпирическим.

В данном комплексе к полю "Возраст" применяется шаблон разбиения, к полям "Дата начала", "Дата конца", "Результат 1", "Результат 2", "Результат 3", "Категория 1", "Категория 2", "Категория 3", "Категория 4" – шаблон зашумления, к полям "Аэропорт", "Компания" – шаблон синтеза.

Для построения модели трудоемкости было выполнено нагрузочное тестирование. Как уже было сказано, виртуальный вычислительный узел содержал от 1 до 4 процессорных ядер и ОЗУ объемом от 1 до 8 Гб с шагом 0.5 Гб. Количество записей, подвергаемых обезличиванию, варьировалось от 1 000 до 350 000. План экспериментов представлен на рис. 1.

На нем точками обозначены пары "объем ОЗУ – объем задания" (x_2, y_1), испытания с заданной парой проводились для всех возможных вариантов количества процессорных ядер: от

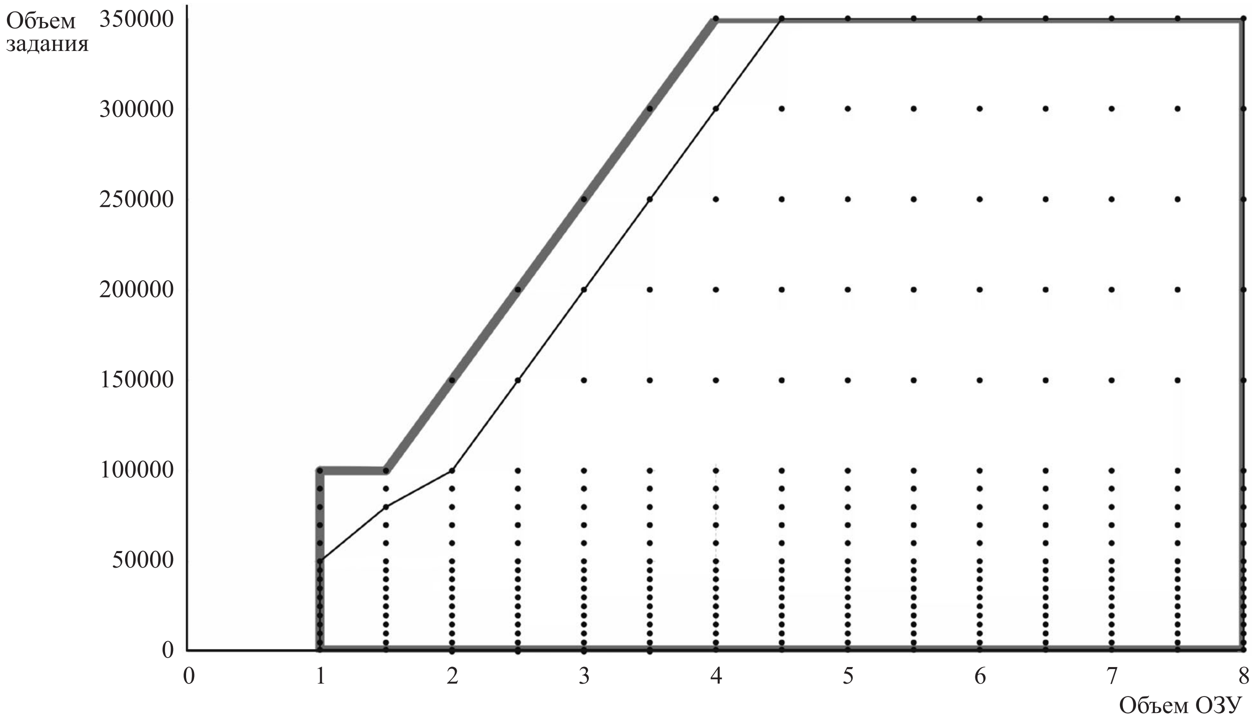


Рис. 1. Проекция области определения модели задания 1

1 до 4. Жирной серой линией обведена вся область аргументов (x_2, y_1), для которых проводилось тестирование. Черная линия показывает границу эффективного функционирования узла.

Для вычисления выборочных моментных характеристик – среднего значения времени $\tilde{\mathcal{M}}_r$ и его дисперсии $\tilde{\mathcal{D}}_r$ – каждый опыт с фиксированными параметрами (x_1, x_2, y_1) проводился независимо 10 раз. В качестве возможных вариантов модели среднего времени выполнения заданий и его дисперсии выступали [1]

$$f^1(x_1, x_2, y_1) = \alpha + \exp[\beta + \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \varepsilon_1 y_1] \tag{2.1}$$

– экспоненциальная модель,

$$f^2(x_1, x_2, y_1) = \alpha + \beta x_1^{\gamma_1} x_2^{\gamma_2} y_1^{\varepsilon_1} \tag{2.2}$$

– степенная модель,

$$\begin{gathered} f^3(x_1, x_2, y_1) = \alpha + \beta x_1^{\gamma_1} x_2^{\gamma_2} \times \\ \times \left(\delta_{11} y_1 + \delta_{12} \max(0, y_1 - \mu_1) + \varepsilon_1\right) \end{gathered} \tag{2.3}$$

– степенная модель с кусочно-линейной зависимостью по y. В выбранных функциях α, β, $\{\gamma_i\}$, ε_1, $\{\delta_{ij}\}$ и μ_1 являются параметрами, подлежащими оцениванию.

Нагрузочное тестирование было выполнено в соответствии с планом, графическая иллюстрация которого приведена на рис. 1. Результаты этого тестирования – выборочные средние и дисперсии времени для случая 1 процессорного ядра – приведены на рис. 2. Здесь черными кружками показаны данные, оставленные после 1-го этапа оценивания, звездочками – данные, отсеянные после 1-го этапа, серая линия – граница области тестирования, черная линия – граница эффективного функционирования узла.

Из данного рисунка можно видеть, что при некоторых значениях аргументов (x_2, y_1) среднее время выполнения задания и его дисперсии недопустимо велики, что говорит о неэффективном функционировании узла. В случае ОЗУ недостаточного объема используется механизм свопинга. Следует отметить, что под свопингом подразумевается один из механизмов

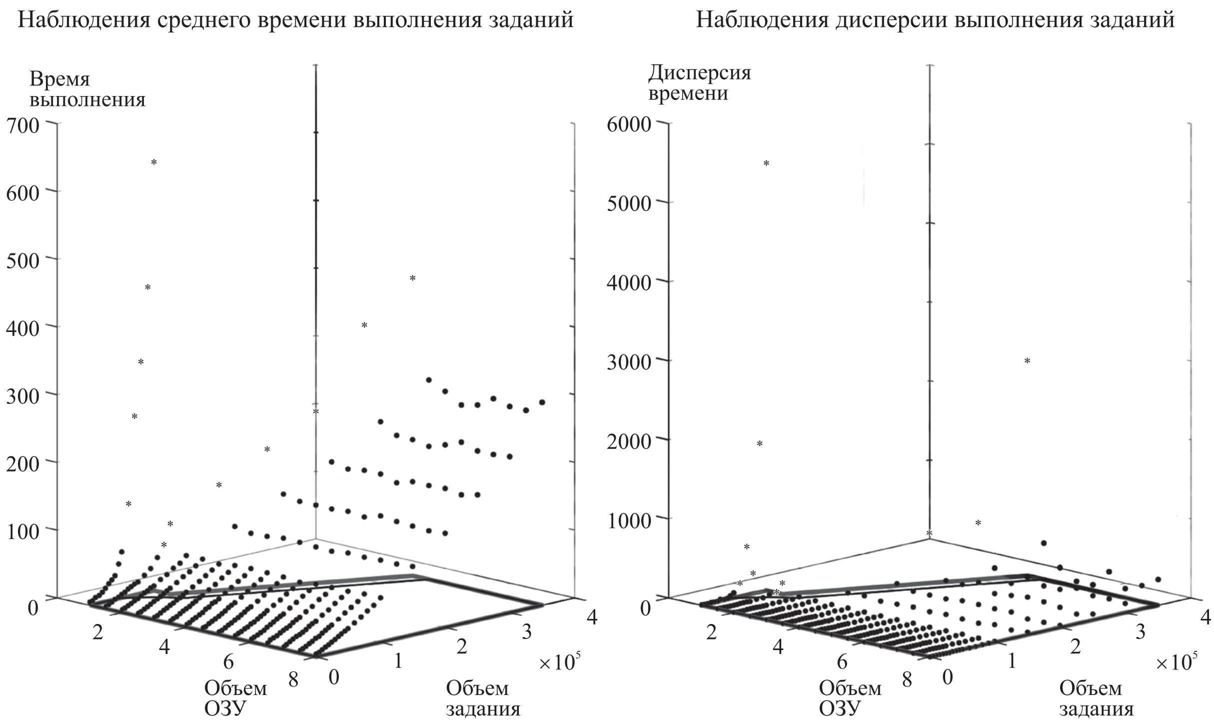


Рис. 2. Статистические данные нагрузочного тестирования задания 1 для случая 1 процессорного ядра

функционирования виртуальной памяти, в случае объема ОЗУ, недостаточного для размещения всего объема обрабатываемых данных. При свопинге происходит динамическая перекачка неактивных данных во вторичное хранилище (например, на жесткий диск), обладающее меньшей скоростью обмена по сравнению с ОЗУ. Одновременно с этим происходит загрузка в ОЗУ активных сегментов данных. Процедура свопинга обеспечивает выполнение задания, но существенно замедляет его по сравнению со случаем, когда все данные помещаются в ОЗУ.

Для идентификации параметров модели в качестве функции потерь решено взять абсолютную величину ошибки оценки, и задачу построения модели можно свести к решению следующих оптимизационных задач:

$$\sum_{r=1}^{R}\left|\tilde{\mathcal{M}}_r - f^i\left(x_1^r, x_2^r, y_1^r\right)\right| \to \min_{i,\alpha,\beta,\{\gamma_i\},\varepsilon_1,\{\delta_{ij}\},\mu_1}, \tag{2.4}$$

$$\sum_{r=1}^{R}\left|\tilde{\mathcal{D}}_r - f^i\left(x_1^r, x_2^r, y_1^r\right)\right| \to \min_{i,\alpha,\beta,\{\gamma_i\},\varepsilon_1,\{\delta_{ij}\},\mu_1}. \tag{2.5}$$

Была выбрана двухэтапная процедура идентификации параметров модели. На обоих этапах идентификации задачи оптимизации решались численно с помощью алгоритма Нелдера – Мида [3], являющегося одним из стандартных в пакете прикладных программ Matlab. Его применение было продиктовано, в частности, необходимостью решать задачу негладкой оптимизации. На первом этапе выполнялся разведочный регрессионный анализ: была построена оценка наименьших модулей параметров экспоненциальной модели (2.1). Из него следовали два вывода. Во-первых, на некоторой области значений (x_2, y_1) среднее время выполнения задания недопустимо большое. Это означает, что в указанной области виртуальный узел не может эффективно выполнять свои функции. Во-вторых, точность приближения, обеспечиваемая моделью (2.1), оказалась неприемлемой.

Было решено сузить область нагрузочного тестирования (см. рис. 1, 2: область с черной границей). Статистические данные о выборочных моментах $(\tilde{\mathcal{M}}_r, \tilde{\mathcal{D}}_r)$ в этой области позволяют ожидать приемлемых значений времени выполнения заданий. На этой области были решены задачи оптимизации (2.4) и (2.5), обеспечивающие построение модели трудоемкости задачи обезличивания. И для среднего времени, и дисперсии лучшими оказались модели степенной зависимости $f^2(\cdot)$. Ниже приведены их явные формулы, а также соответствующие коэффициенты детерминации R^2 [4]:

$$\mathcal{M}_Z(x_1, x_2, y_1) = 6.356 \times 10^{-5} \times$$
$$\times x_1^{-0.058} x_2^{-0.030} y_1^{1.190} + 4.952,\ R_{\mathcal{M}}^2 = 0.996,$$

$$\mathcal{D}_Z(x_1, x_2, y_1) = 1.360 \times 10^{-15} \times$$
$$\times x_1^{-0.043} x_2^{-0.280} y_1^{3.141} + 0.808,\ R_{\mathcal{D}}^2 = 0.726.$$

Следует также отметить, что задачи оптимизации (2.4) и (2.5) были решены без ограничений на оптимизируемые параметры. Это было сделано намеренно для проверки свойств функций $\mathcal{M}(\cdot)$ и $\mathcal{D}(\cdot)$ по переменным X и Y, представленных в [1].

Визуально качество оценивания можно оценить по рис. 3 и 4: на них представлены измерения, полученные в результате нагрузочного тестирования, и построенные на их основе модели. На рисунках точками показаны результаты нагрузочного тестирования, поверхностью – построенная модель.

Так как $\mathcal{M}_Z(x_1, x_2, y_1)$ и $\mathcal{D}_Z(x_1, x_2, y_1)$ являются функциями трех переменных, то на рисунках изображены $\mathcal{M}_Z(1, x_2, y_1)$ и $\mathcal{D}_Z(1, x_2, y_1)$ – "сечения" моделей, построенные для 1 процессорного ядра; качество оценивания для другого количества ядер аналогично.

Анализируя рис. 3 и 4, можно сделать следующие заключения. Во-первых, невязки модели дисперсии значительно больше невязок модели среднего времени. Во-вторых, в области малого объема ОЗУ можно увидеть резкий рост как среднего, так и дисперсии времени выполнения задания даже при малом его объеме. Именно это обстоятельство вынудило сократить область возможных значений ресурсов узла, обеспечивающих эффективное выполнение пользовательских заданий № 1. Причиной такого замедления и нестабильной работы является недостаток оперативной памяти и активное использование механизма свопинга.

Для более детального анализа исследовались двумерные сечения модели трудоемкости. Графически зависимость среднего выполнения $\mathcal{M}(\cdot, y_1)$ и дисперсии $\mathcal{D}(\cdot, y_1)$ от объема выполняемого задания y_1 при некоторых фиксированных значениях ресурсов (x_1, x_2) представлена на рис. 5 и 6. На рисунках ломаными с маркерами показаны результаты нагрузочного тестирования, кривыми – построенная модель. Графики данных зависимостей при большем числе процессорных ядер мало отличимы от случая 1 ядра, о чем будет более подробно сказано ниже.

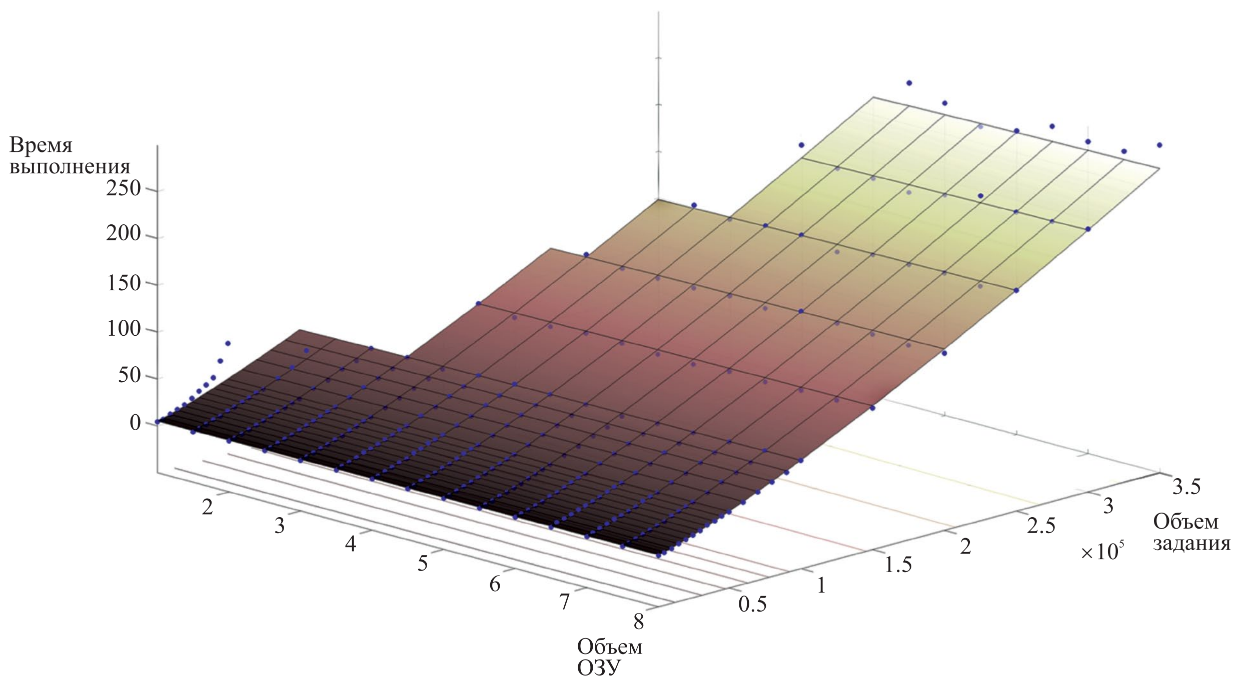


Рис. 3. Сечение модели $\mathcal{M}(\cdot)$ для случая 1 ядра

Данные рисунки позволяют сделать следующие заключения. Во-первых, на основании полученных наблюдений среднего и дисперсии времени выполнения задания №1 модели $\mathcal{M}(\cdot)$ и $\mathcal{D}(\cdot)$ на исследуемой области обладают свойством неотрицательности ([1, свойство 1]). Во-вторых, модель $\mathcal{M}(\cdot)$ также удовлетворяет свойствам 3 и 5 из [1]: неубыванию и выпуклости по переменной Y.

На рис. 7 и 8 представлены зависимости среднего и дисперсии времени выполнения задания в зависимости от объема ОЗУ для различных фиксированных объемов задания при использовании 1 процессорного ядра. На рисунках ломаными с маркерами показаны результа-

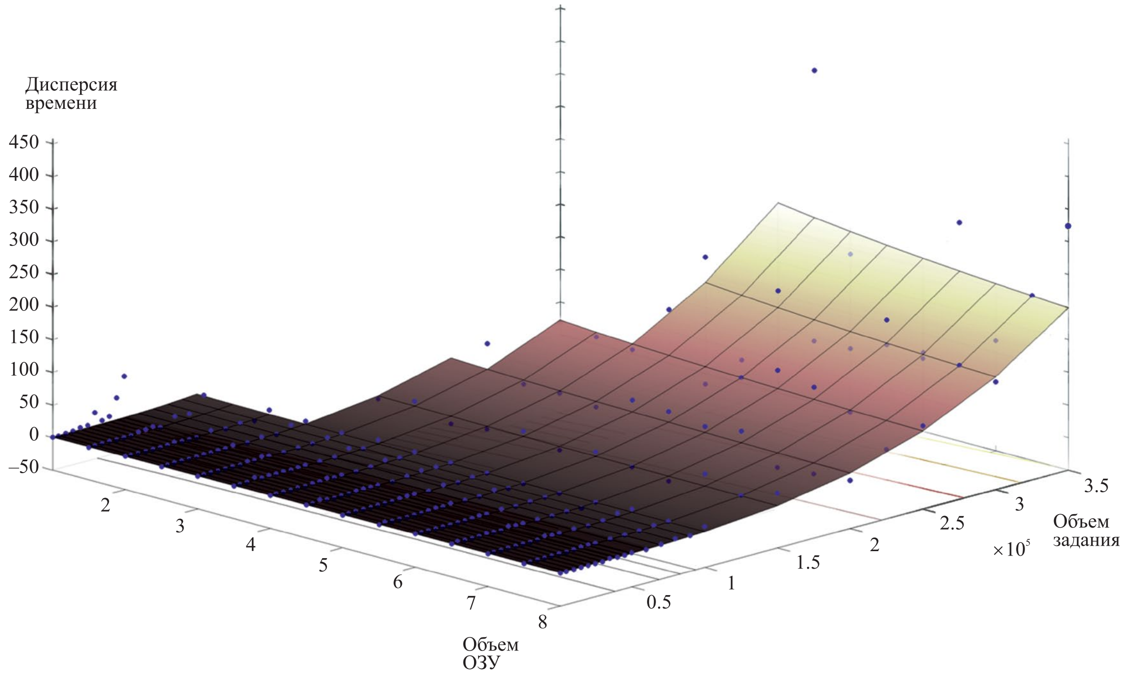


Рис. 4. Сечение модели $\mathcal{D}(\cdot)$ для случая 1 ядра

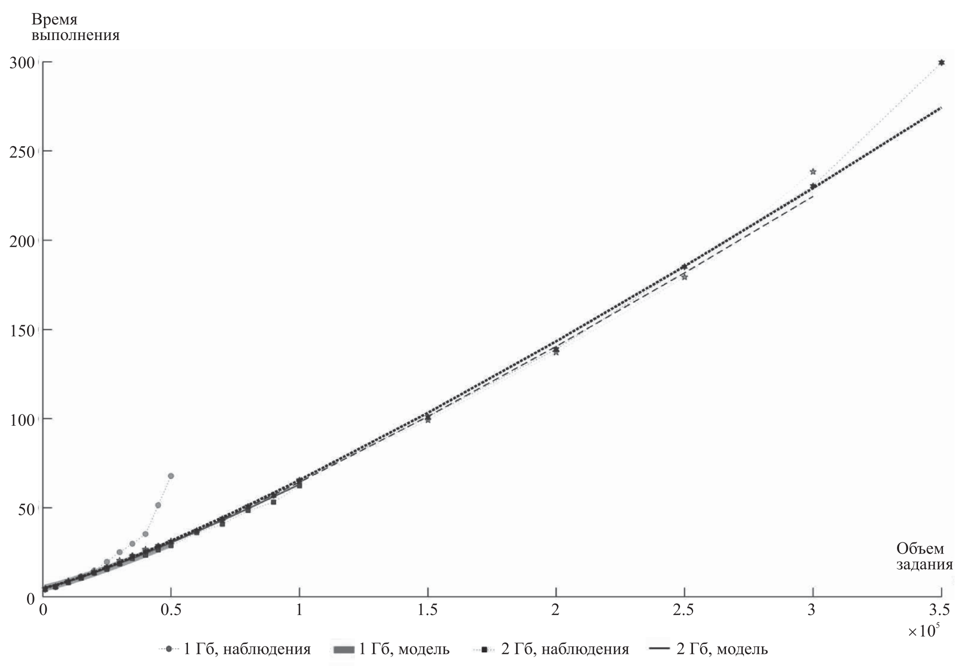


Рис. 5. Зависимость $\mathcal{M}(\cdot)$ от объема задания для различных фиксированных объемов ОЗУ (1 ядро)

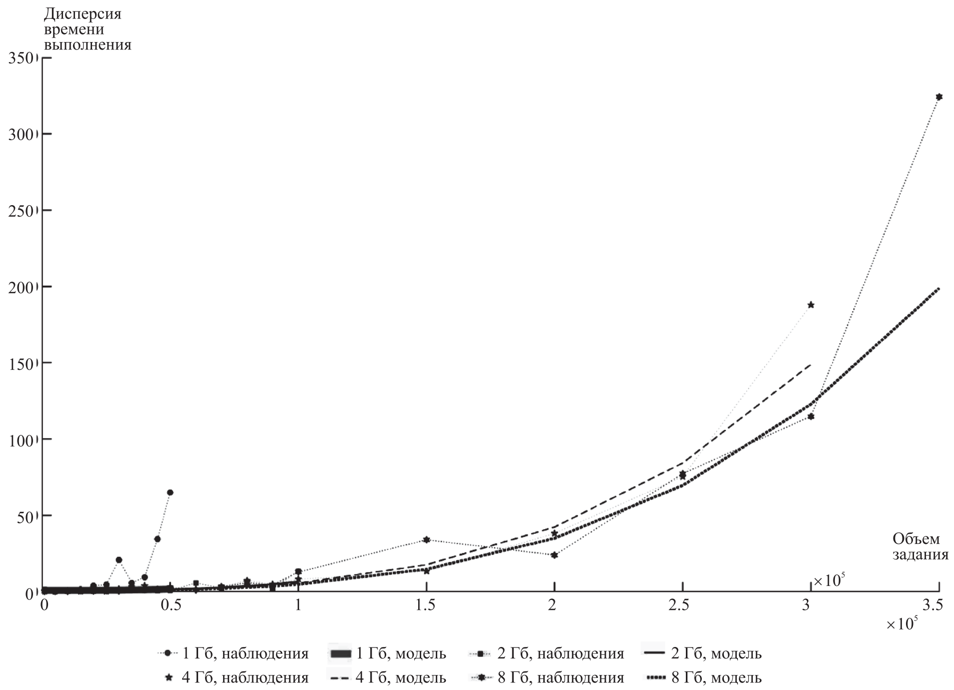


Рис. 6. Зависимость $\mathcal{D}(\cdot)$ от объема задания для различных фиксированных объемов ОЗУ (1 ядро)

ты нагрузочного тестирования, кривыми – построенная модель. Графики зависимостей при большем числе ядер мало отличимы от случая 1 ядра.

Анализ данных рисунков ведет к следующим заключениям. Начиная с объема ОЗУ 4,5 Гб все задание умещается в него, и механизм свопинга, существенно задерживающий процесс выполнения заданий, в этом случае не используется. По этой причине на рис. 3 и 7 можно заметить практически постоянное среднее время, не зависящее от объема ОЗУ, для заданий объемом до 250 000. В то же время для объемов 300 000 и 350 000 наблюдения демонстрируют

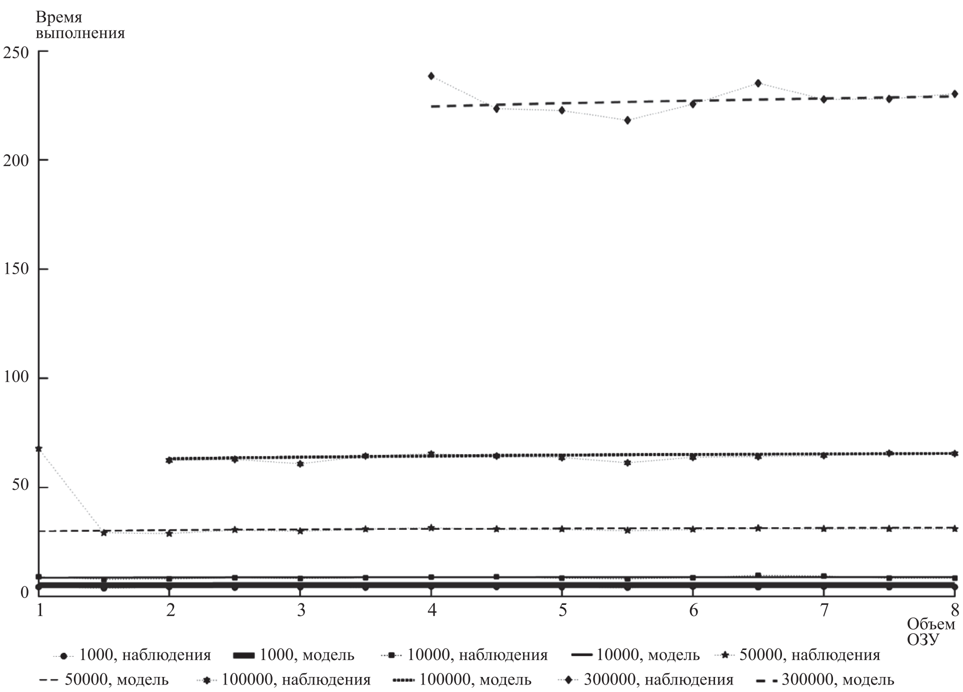


Рис. 7. Зависимость $\mathcal{M}(\cdot)$ от объема ОЗУ для различных фиксированных объемов задания (1 ядро)

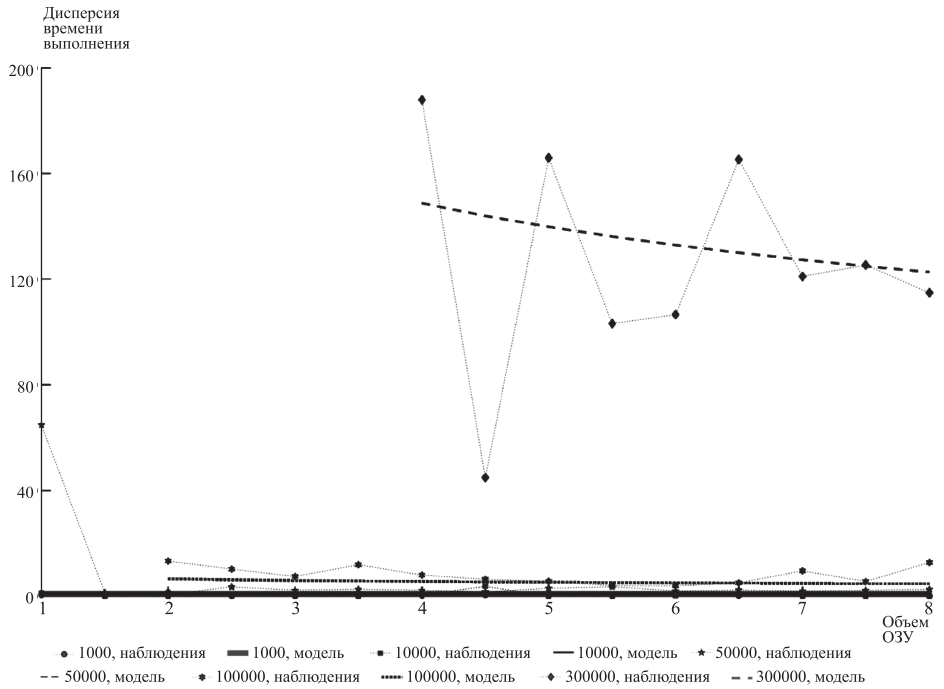


Рис. 8. Зависимость $\mathcal{D}(\cdot)$ от объема ОЗУ для различных фиксированных объемов задания (1 ядро)

некоторый рост среднего времени выполнения заданий с ростом объема ОЗУ. Заметим, что оцененный показатель степени при x_2 мал по модулю (равен 0.03), но имеет положительный знак. Таким образом, построенная модель среднего времени не обладает свойством локального невозрастания по переменным X , описывающим ресурсы узла, т.е. имеет место нарушение свойства 2 из [1]: выбранная модель $f^2(\cdot)$ среднего времени, идентифицированная по полученным наблюдениям, строго возрастает с ростом ресурса x_2. Для этого имеются две причины. Во-первых, задачи оптимизации (2.4) и (2.5), решаемые для идентификации параметров моделей $\mathcal{M}$ и $\mathcal{D}$, не содержали ограничений на переменные γ_1, γ_2: введение дополнительных ограничений $\gamma_1, \gamma_2 \leq 0$ обеспечило бы выполнение свойства 2 из [1]. Во-вторых, класс функций $f^1(\cdot)$, $f^2(\cdot)$ и $f^3(\cdot)$, выбранный для описания модели, недостаточно гибок для описания свойства 2 из [1]. Для наблюдений выборочной дисперсии и ее модели, построенной по данным нагрузочных испытаний, ситуация иная: для заданий большого объема (300 000 и более) наблюдается тенденция к снижению дисперсии с ростом ОЗУ. Построенная модель отражает эту тенденцию: показатель степени при x_2 хотя и относительно мал по абсолютной величине, но имеет отрицательный знак: $\gamma_2 = -0.28$. По данным рисункам можно сделать следующий качественный вывод. На некоторых областях рост какого-либо ресурса (в данном случае объема ОЗУ) может нисколько не снижать среднее время выполнения задания, но в некоторых случаях даже увеличивает его.

На рис. 9 представлена зависимость среднего времени выполнения задания от числа процессорных ядер при фиксированном объеме ОЗУ 4 Гб для разных фиксированных объемов заданий. На рисунке ломаными с маркерами показаны результаты нагрузочного тестирования, кривыми – построенная модель. Зависимость дисперсии имеет идентичный характер и на отдельный рисунок не вынесена.

Анализируя рисунок, можно заметить, что среднее время практически постоянно и не зависит от числа процессорных ядер.

На практике пользователи узла точно знают целевые функции СПО узла и имеют общие представления об алгоритмах, реализующих эти функции. Проанализируем полученную модель обезличивания с этих позиций, используя лишь здравый смысл и не привлекая анализ конкретного кода.

Все действия по обезличиванию производятся одновременно со всеми записями данных, но последовательно для каждого типа полей. На первом этапе выполняется выборка данных, подлежащих обезличиванию. На каждом последующем этапе к соответствующей группе полей применяется свой шаблон обезличивания: группировка, зашумление и синтез. Все эти действия последовательны и не допускают какого-либо распараллеливания. Следует ожидать,

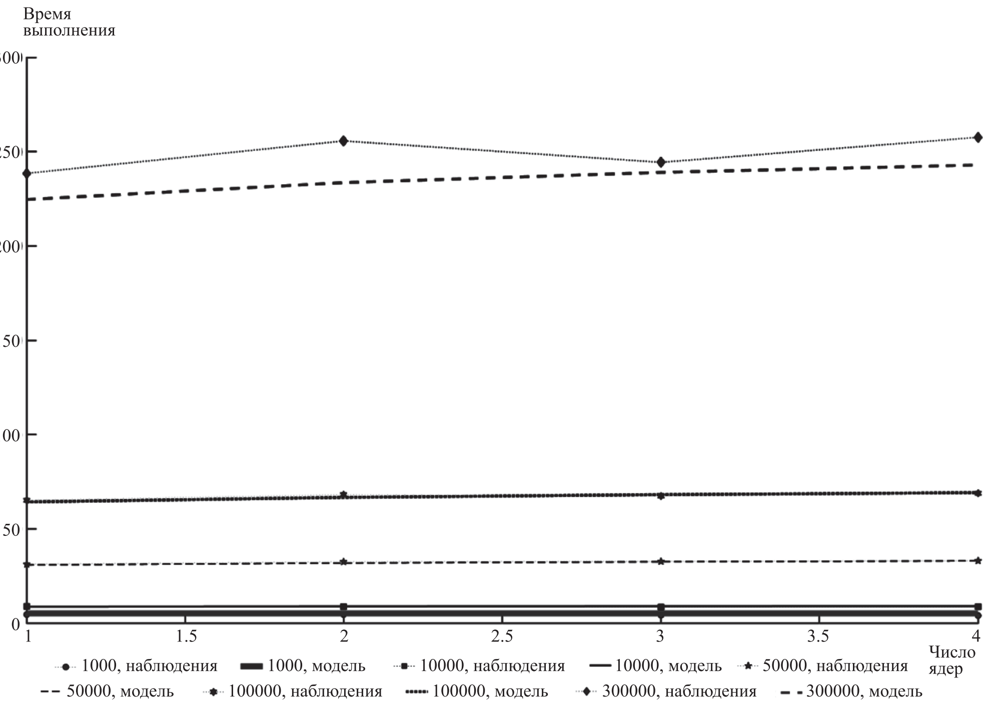


Рис. 9. Зависимость $\mathcal{M}(\cdot)$ от числа процессорных ядер для различных фиксированных объемов задания (ОЗУ 4 Гб)

что увеличение числа используемых процессорных ядер не приведет к значимому снижению времени выполнения задания, и даже может незначительно его увеличить из-за наличия “накладных расходов” на механизм распараллеливания. В то же время с ростом объема ОЗУ, после того, как его стало хватать для размещения всех данных задания, дальнейший его рост практически не влияет на среднее время выполнения, однако может несколько уменьшить дисперсию времени выполнения. Результаты нагрузочного тестирования и построенная модель подтверждают данные логические выводы.

3. Модель трудоемкости задания 2 обработки статистических запросов. Задача выполнения статистических запросов состоит в выборе группы записей из БД и вычислении выборочной ковариации определенной пары полей. При вычислении ковариации используются возможности СУБД, поэтому достигается высокая степень параллелизма выполнения запросов, и наличие дополнительных процессорных ядер дает значимый выигрыш во времени выполнения. Минимальное время выполнения достигается при условии нахождения всех обрабатываемых данных в файловом кэше операционной системы, поэтому эта задача предъявляет высокие требования к объему памяти виртуального узла. В выбранном запросе производится расчет выборочной ковариации полей “Дата начала” и “Дата конца” необезличенного набора данных. Поскольку эти поля имеют тип “дата/время”, то предварительно они приводятся к вещественному числовому типу. Выбор данных выполняется аналогично задаче обезличивания — по критерию принадлежности номера записи указанному диапазону.

Для построения стохастической модели трудоемкости было выполнено нагрузочное тестирование. В нем виртуальный вычислительный узел содержал от 1 до 4 процессорных ядер и ОЗУ объемом от 3.5 до 8 Гб с шагом 0.5 Гб. Задание полностью описывалось числом записей y_1, используемых для вычисления выборочной ковариации; оно варьировалось от 2 до 20 млн. План экспериментов представлен на рис. 10.

На нем точками обозначены пары “объем ОЗУ — объем задания” (x_2, y_1), испытания с заданной парой проводились для всех возможных вариантов количества процессорных ядер: от 1 до 4. Жирной серой линией обведена вся область аргументов (x_2, y_1), для которых проводилось тестирование. Черная линия показывает границу эффективного функционирования узла.

Для вычисления выборочных моментных характеристик — среднего значения времени $\tilde{\mathcal{M}}_r$ и его дисперсии $\tilde{\mathcal{D}}_r$ — каждый опыт с фиксированными параметрами (x_1, x_2, y_1) проводился независимо 40 раз. В качестве возможных вариантов модели среднего времени выполнения заданий и его дисперсии выступали функции $f^1(\cdot), f^2(\cdot), f^3(\cdot)$, описываемые формулами (2.1) – (2.3) соответственно.

Статистические результаты тестирования – выборочные средние и дисперсии при использовании 1 ядра приведены на рис. 11. Здесь черными кружками показаны данные, оставлен-

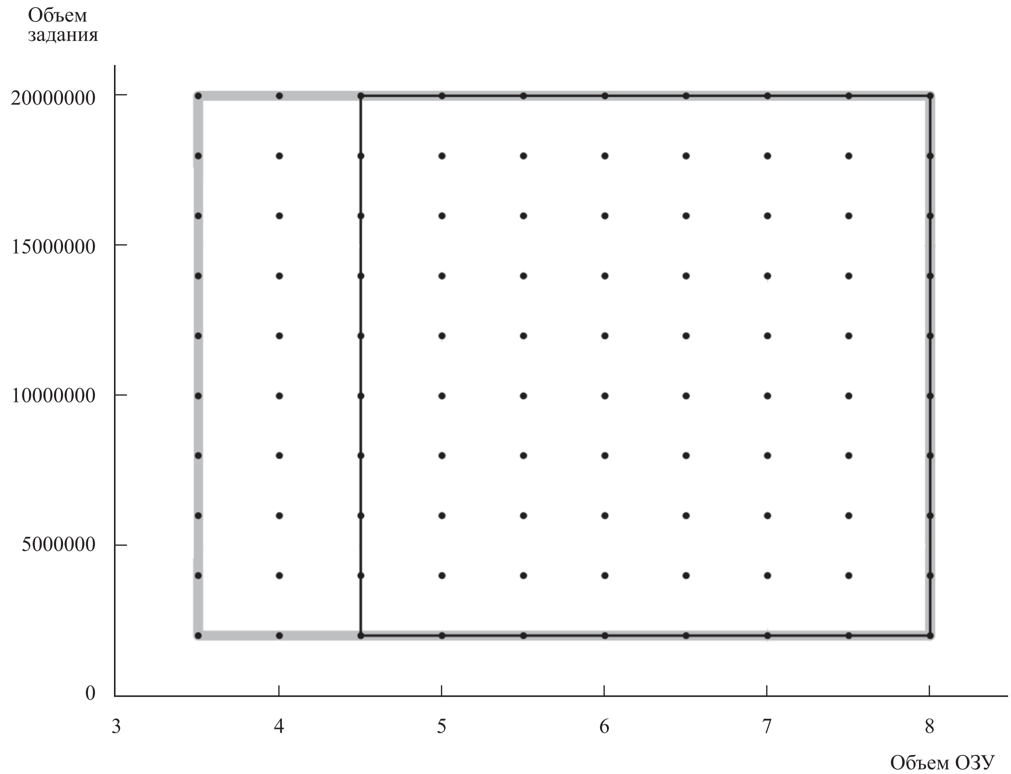


Рис. 10. Проекция области определения модели задания 2

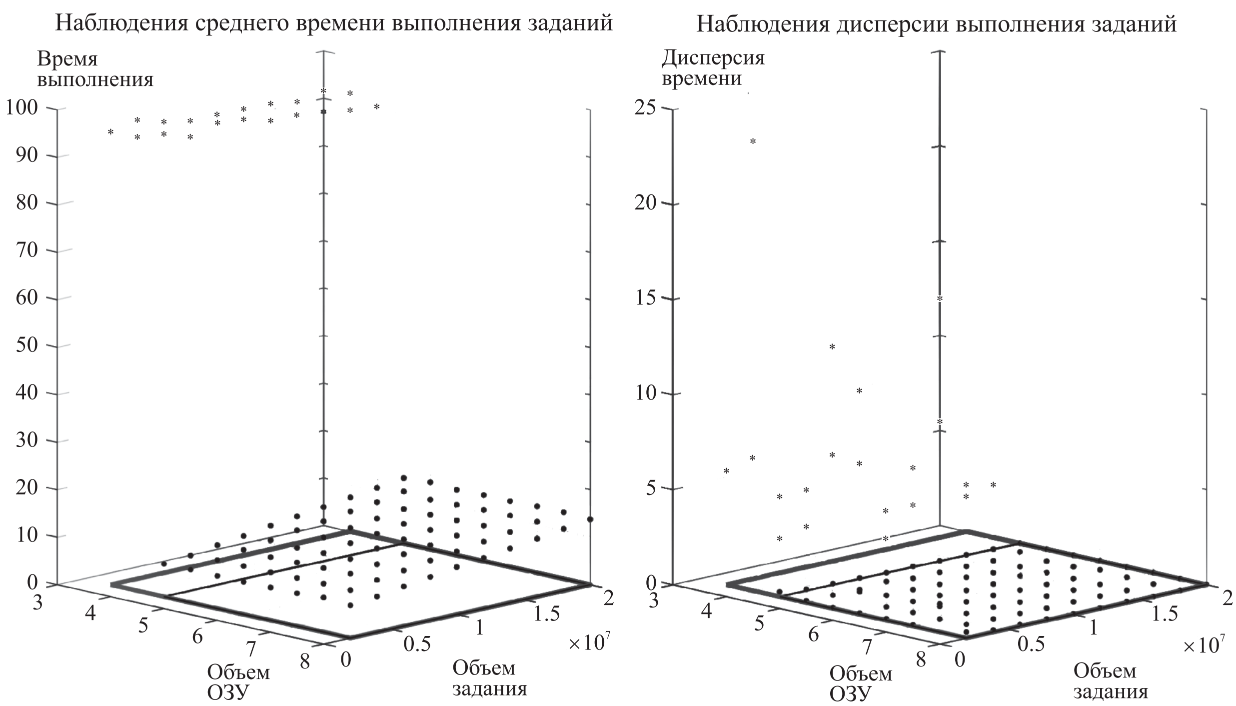


Рис. 11. Статистические данные нагрузочного тестирования задания 2 для случая 1 процессорного ядра

ные после 1-го этапа оценивания, звездочками – данные, отсеянные после 1-го этапа, серая линия – граница области тестирования, черная линия – граница эффективного функционирования узла. Случаи 2 – 4 ядер выглядят аналогично.

Для идентификации параметров модели необходимо решить оптимизационные задачи (2.4) и (2.5). Вновь использовалась двухэтапная процедура, как и в предыдущем разделе.

На первом этапе выполнен разведочный регрессионный анализ: построена оценка наименьших модулей параметров экспоненциальной модели (2.1). Из него следовали два вывода. Во-первых, на некоторой области значений (x_2, y_1) среднее время выполнения задания недопустимо большое. Это означает, что на указанной области виртуальный узел не может эффективно выполнять свои функции. Причиной неэффективности является объем ОЗУ, недостаточный для того, чтобы все обрабатываемые данные поместились в кэш. Во-вторых, точность приближения, обеспечиваемая моделью (2.1), оказалась неприемлемой.

На втором этапе область нагрузочного тестирования была сужена (см. рис. 10, 11: область с черной границей). Статистические данные о выборочных моментах $\left(\tilde{\mathcal{M}}_z^r, \tilde{\mathcal{D}}_z^r\right)$ в этой области позволяют ожидать приемлемых значений времени выполнения заданий. На области были решены задачи оптимизации (2.4) и (2.5), обеспечивающие построение модели трудоемкости задания 2. Для среднего времени это оказалась функция $f^3(\cdot)$ со степенной зависимостью по переменным x и кусочно-линейной зависимостью по y. Более того, зависимость от y оказалась просто линейной. Для дисперсии лучшей моделью оказалась функция $f^2(\cdot)$, степенная по x и y. Ниже приведены их явные формулы и коэффициенты детерминации R^2:

$$\mathcal{M}_z(x_1, x_2, y_1) = 4.254 \times 10^{-7} \times x_1^{-0.790} x_2^{-0.058}\left(y_1 + 9.106 \times 10^6\right) + 2.436, R_{\mathcal{M}}^2 = 0.998,$$

$$\mathcal{D}_z(x_1, x_2, y_1) = 40.792 x_1^{-1.234} x_2^{-0.211} y_1^{-0.408} + 0.002, R_{\mathcal{D}}^2 = 0.227.$$

Как и для идентификации параметров модели трудоемкости задания 1, оптимизационные задачи (2.4) и (2.5) были решены без ограничений на оптимизируемые параметры. Это было сделано намеренно для проверки свойств функций $\mathcal{M}_z(\cdot)$ и $\mathcal{D}_z(\cdot)$ по переменным x и y.

Визуально качество оценивания можно оценить по рис. 12 и 13: на них точками представлены измерения, полученные в результате нагрузочного тестирования, а поверхностями – построенные на их основе модели.

Анализируя рис. 12 и 13, а также числовые характеристики идентифицированных моделей, можно сделать следующие заключения. Во-первых, коэффициент детерминации модели сред-

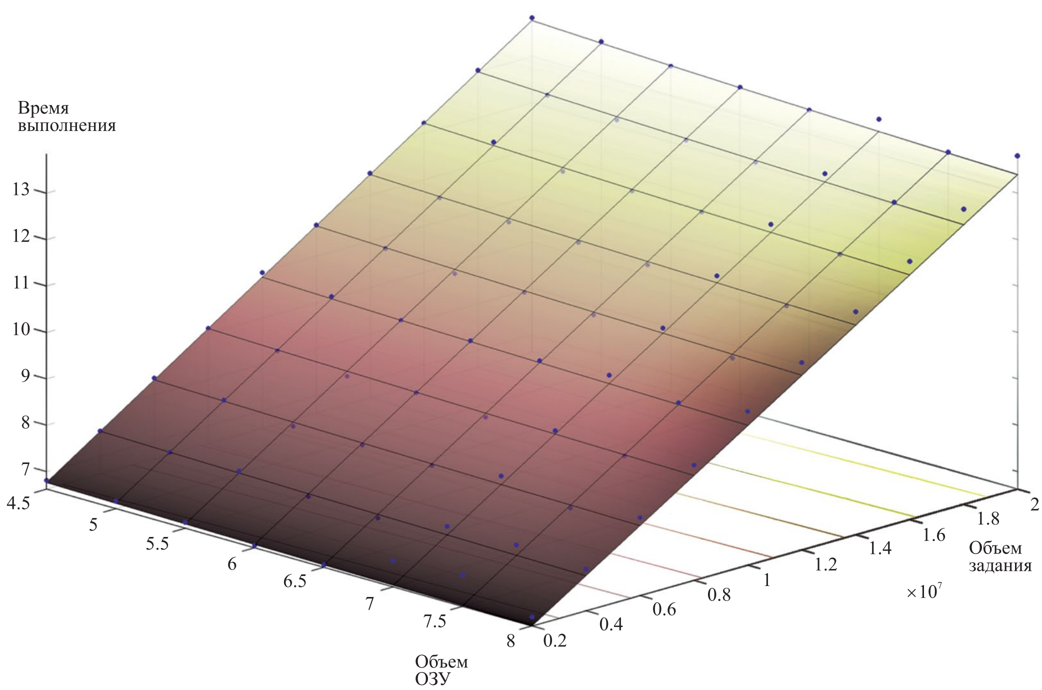


Рис. 12. Сечение модели $\mathcal{M}_z(\cdot)$ для случая 1 ядра

него времени очень высок: $R^2_{\mathcal{M}} = 0.998$, в то время как для дисперсии $R^2_{\mathcal{D}} = 0.227$. Это связано с тем, что модель $\mathcal{D}_z(\cdot)$ достаточно близка к константе. Во-вторых, рассмотрим в качестве показателя неопределенности среднее

$$\frac{1}{R}\sum_{r=1}^{R}\frac{\sqrt{\tilde{D}_z^r}}{\tilde{\mathcal{M}}_z^r}\times 100\,\%.$$

Эта величина показывает, какой процент составляет среднее квадратическое отклонение по отношению к среднему значению. Для задания 1 эта величина составляет $4.8\,\%$, в то время как для задания 2 она равна $2.4\,\%$, т.е. вдвое ниже. Коэффициент детерминации – лишь одна из возможных количественных характеристик качества модели, показывающая, насколько точно модель отображает изменчивость данных. Этот коэффициент может быть мал и в том случае, когда сами данные изменяются незначительно, что имеет место в данном случае.

Дальнейший анализ модели трудоемкости выполнялся по двумерным сечениям модели. Графически зависимость среднего выполнения $\mathcal{M}_z(\cdot, y_1)$ и дисперсии $\mathcal{D}_z(\cdot, y_1)$ от объема выполняемого задания y_1 при некоторых фиксированных значениях ресурсов $(1, x_2)$ представлена на рис. 14 и 15, т.е. для случая 1 процессорного ядра. На рисунках ломаными с маркерами показаны результаты нагрузочного тестирования, кривыми – построенная модель.

Во-первых, как и в случае задания 1 функции $\mathcal{M}_z(\cdot)$ и $\mathcal{D}_z(\cdot)$, задания № 2 на исследуемой области обладают свойством неотрицательности. Во-вторых, модель $\mathcal{M}_z(\cdot)$ также удовлетворяет свойствам 3 и 5 из [1]: неубыванию и выпуклости по переменной Y: для данного типа задания зависимость по y оказывается линейной. В-третьих, получен неожиданный эмпирический результат: для задания 2 дисперсия времени выполнения с ростом объема задания несколько убывает.

На рис. 16 и 17 представлены зависимости среднего и дисперсии времени выполнения задания в зависимости от объема ОЗУ для различных фиксированных объемов задания при использовании 1 или 4 процессорных ядер. На рисунках ломаными с маркерами показаны результаты нагрузочного тестирования, кривыми – построенная модель.

Анализ данных рисунков ведет к следующим заключениям. Начиная с объема ОЗУ 4.5 Гб среднее время выполнения задания и его дисперсия не изменяются с ростом объема ОЗУ. При

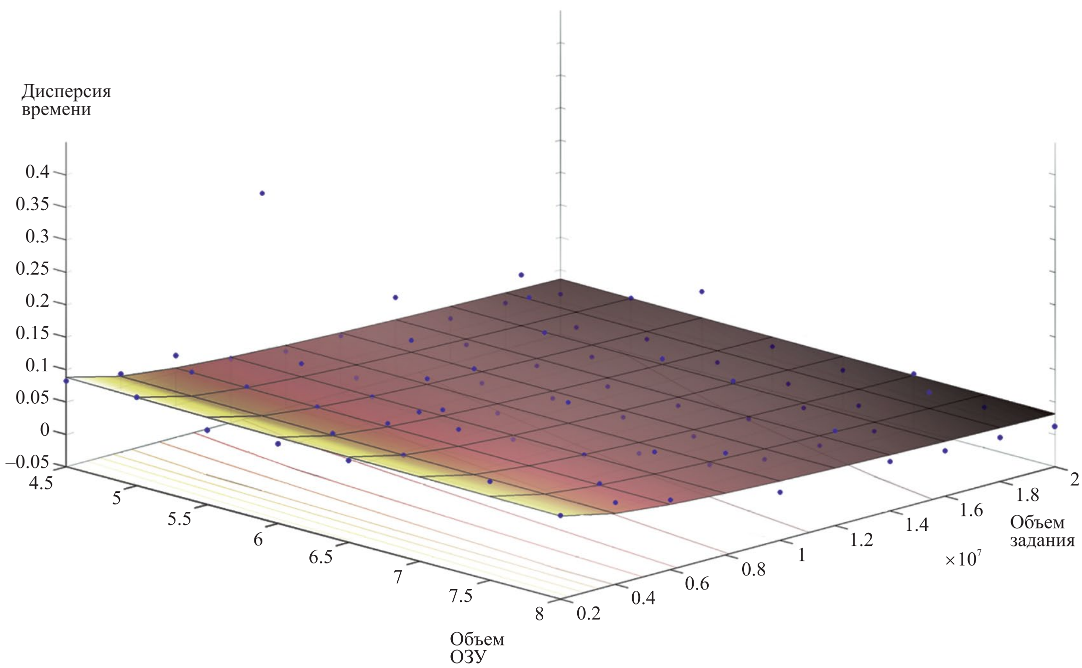


Рис. 13. Сечение модели $\mathcal{D}_z(\cdot)$ для случая 1 ядра

этом рост числа используемых процессорных ядер уменьшает как среднее времени выполнения задания, так и его дисперсию. Объяснение подобному явлению вполне очевидно: для эффективного вычисления выборочной ковариации требуется такой объем ОЗУ, чтобы все обрабатываемые данные помещались в кэш и не возникало необходимости чтения данных с диска;

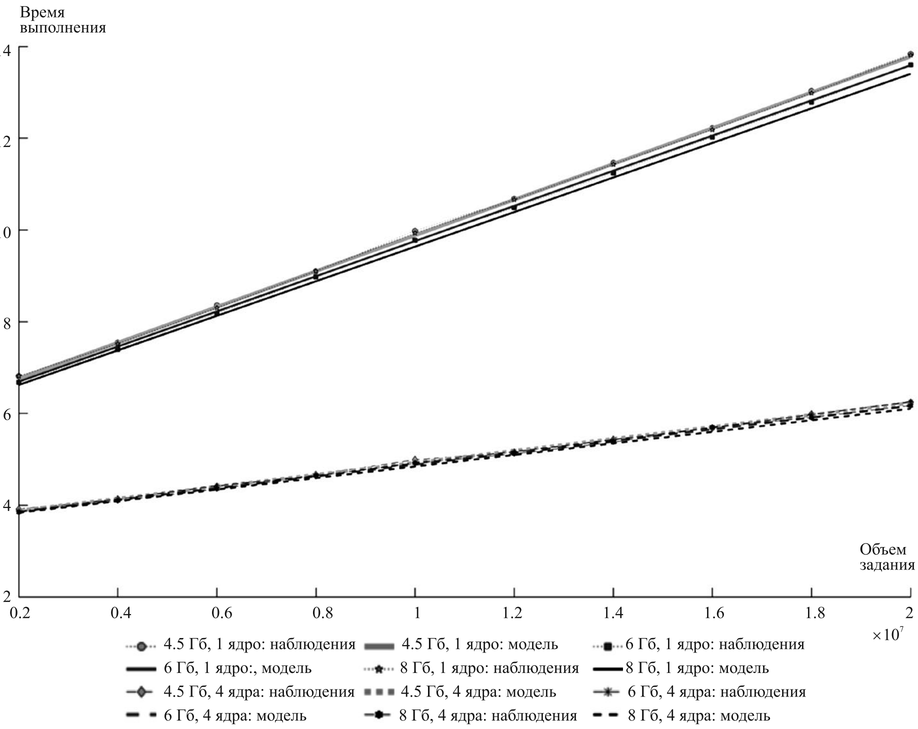


Рис. 14. Зависимость $\mathcal{M}_z(\cdot)$ от объема задания для различных фиксированных объемов ОЗУ и числа ядер

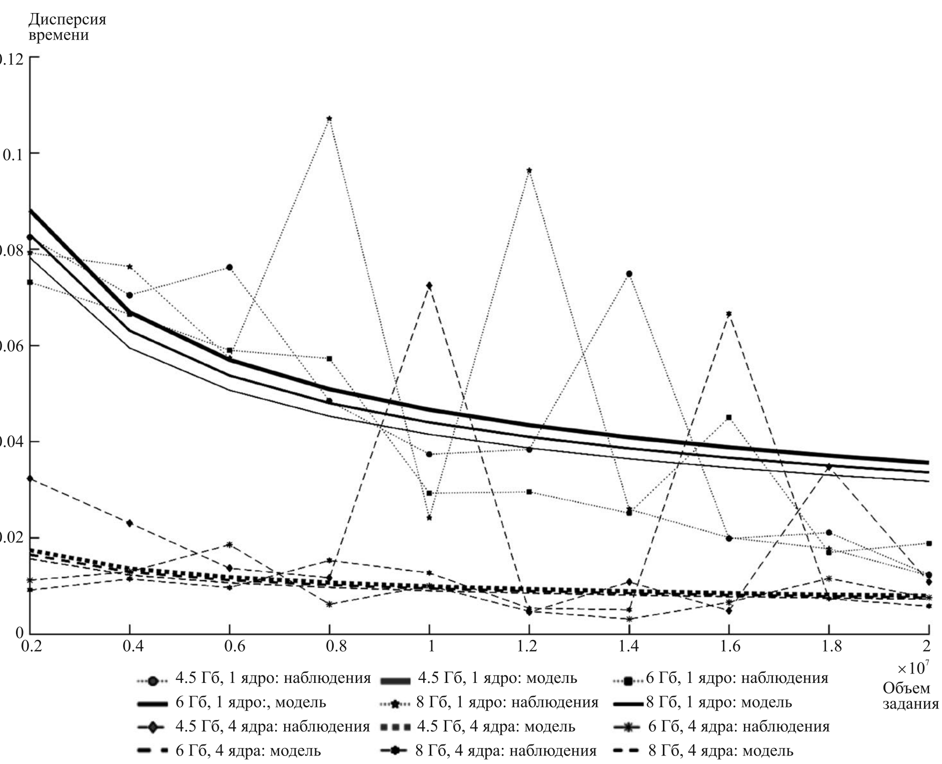


Рис. 15. Зависимость $\mathcal{D}_z(\cdot)$ от объема задания для различных фиксированных объемов ОЗУ и числа ядер

дальнейшее наращивание объема ОЗУ не ведет ни к уменьшению времени выполнения этого задания, ни к повышению устойчивости, выражающемуся в снижении дисперсии времени.

На рис. 18 и 19 представлена зависимость среднего времени и дисперсии выполнения задания от числа ядер для различных фиксированных объемов ОЗУ и размеров задания. На рисунках ломаными с маркерами показаны результаты нагрузочного тестирования, кривыми – построенная модель.

Примечательно, что число процессорных ядер не влияло на характеристики трудоемкости выполнения задания 1. Это означает, что задание 1 не допускает распараллеливания. Для задания 2, напротив, увеличение количества используемых ядер значительно снижает как среднее

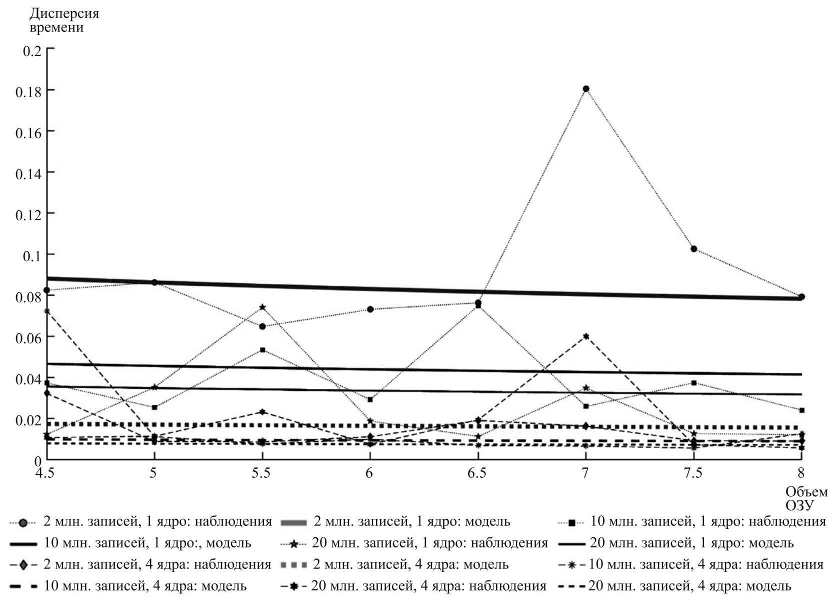


Рис. 16. Зависимость $\mathcal{M}_z(\cdot)$ от объема ОЗУ для различных фиксированных объемов задания и числа ядер

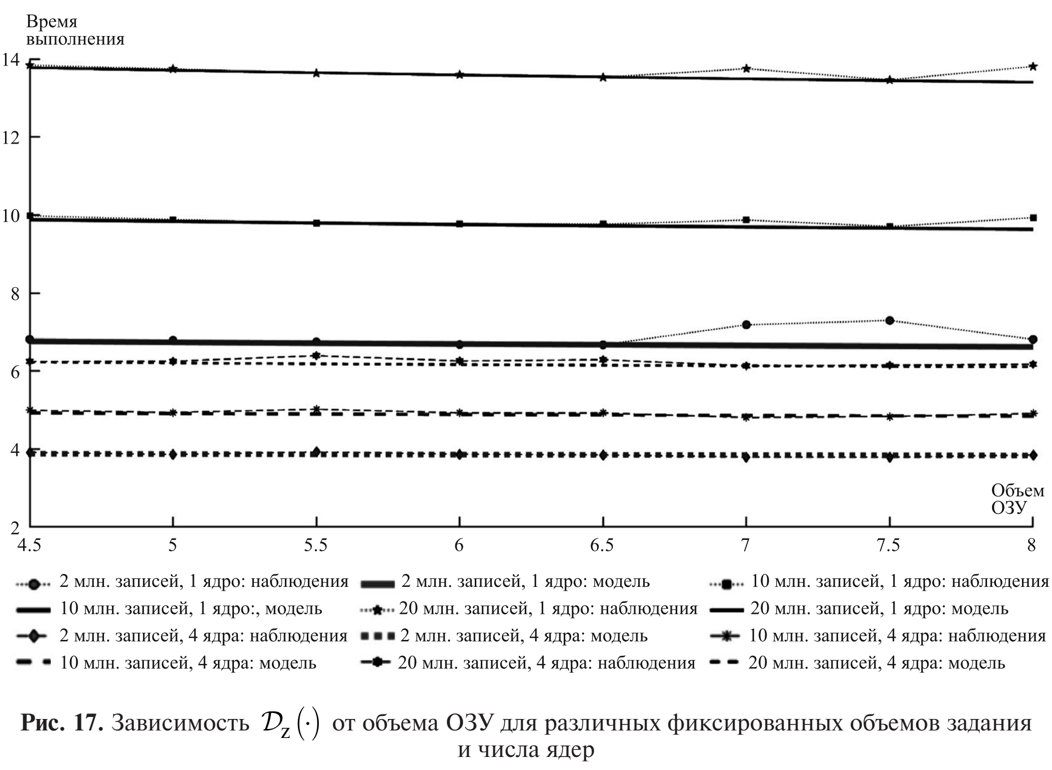


Рис. 17. Зависимость $\mathcal{D}_z(\cdot)$ от объема ОЗУ для различных фиксированных объемов задания и числа ядер

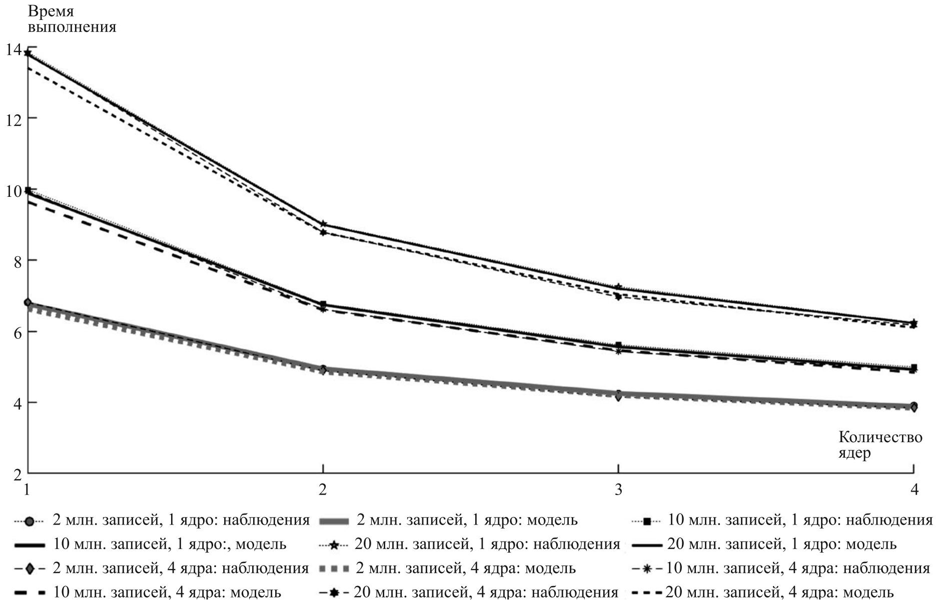


Рис. 18. Зависимость $\mathcal{M}_z(\cdot)$ от числа ядер для различных фиксированных объемов задания и ОЗУ

время выполнения задания, так и его дисперсию. Данный факт вполне объясним, потому что процедура вычисления выборочной ковариации содержит в себе ряд операций, допускающих практически полное распараллеливание. Не зная кода данной процедуры, можно предположить, что на первом шаге выполняется выбор данных, подлежащих последующему осреднению. Эти операция, по-видимому, не может быть распараллелена эффективно. Второй шаг, собственно, заключается в вычислении выборочной ковариации, и эта операция допускает практически “полное” распараллеливание: для вычисления выборочной ковариации по выборке объемом N можно задействовать от 1 до 16 процессорных ядер. На третьем шаге происходит окончательное вычисление ответа, когда процесс – сборщик собирает и совместно обрабатывает результаты рабочих процессов, задействованных в распараллеливании. Бóльшее число ядер позволяет запустить бóльшее число рабочих процессов одновременно. Так как не все операции доступны распараллеливанию, среднее время выполнения задания уменьшается не кратно числу используемых ядер, а медленнее.

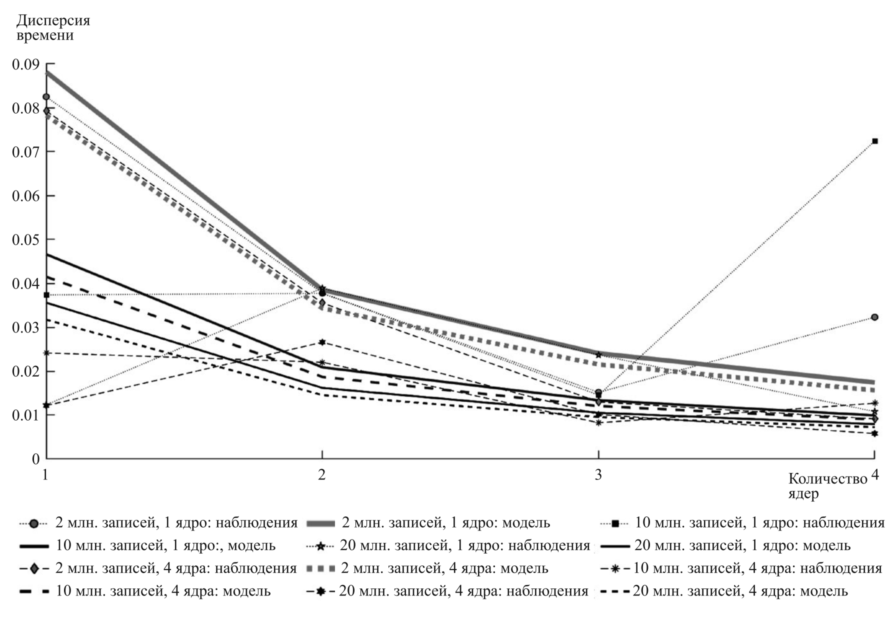


Рис. 19. Зависимость $\mathcal{D}_z(\cdot)$ от числа ядер для различных фиксированных объемов задания и ОЗУ

Заключение. Вторая часть предложенного исследования носит прикладной характер и иллюстрирует возможность построения стохастической модели трудоемкости пользовательских задач на виртуальном узле на примере двух различных процедур обработки информации, хранимой в некоторой базе данных. В качестве тестируемой была выбрана макетная БД персональных данных пассажиров с инструментарием их обезличивания и статистического анализа. Целью построения моделей двух из пяти возможных типов пользовательских заданий является проверка адекватности математического описания трудоемкости заданий, реализуемых этим макетом, а также подтверждение

возможности постановки данной задачи именно в том смысле, в котором она была сформулирована в [1],

возможности проведения нагрузочного тестирования, необходимого для последующей идентификации параметров предложенных моделей,

основных теоретических предположений о виде зависимости моментных характеристик $\mathcal{M}$ и $\mathcal{D}$ от ресурсов узла и характеристик выполняемых заданий,

приемлемого качества полученных оценок.

Проведенная проверка всех вышеперечисленных пунктов, касающихся моделей трудоемкости пользовательских заданий, связанных с обработкой информации, хранящейся в БД, дала положительный результат.

На следующих этапах исследования предполагается продемонстрировать возможности использования предложенной модели для описания других типов пользовательских заданий: обработки изображений, сжатия данных, выполнения научных вычислений, обучения нейронных сетей и пр.

Детальный анализ моделей трудоемкости заданий 1 и 2 представлен в двух предыдущих разделах. В заключение необходимо отметить следующие факты. Во-первых, минимальные требования к ресурсам узла, обеспечивающим его эффективную работу, различаются для заданий. Для задания 1 достаточным является объем ОЗУ 4 Гб, в то время как для задания 2 – 4.5 Гб.

Во-вторых, результаты нагрузочного тестирования подтверждают тот факт, что минимальные и рекомендуемые аппаратные требования [5] не вполне соответствуют реальным условиям, обеспечивающим эффективное выполнение заданий на вычислительном узле. Так, минимальный объем ОЗУ, требуемый для нормального функционирования операционной системы Астра Linux Орел, составляет 1.5 Гб, а рекомендованный – 4 Гб [5]. В то же время для обработки заданий 1 объемом до 50 000 записей за приемлемое время достаточно объема ОЗУ 1 Гб, а для обработки заданий 2 объем ОЗУ должен составлять не менее 4.5 Гб. Это означает, что характеристики минимальной и рекомендованной конфигураций узла, представляемые разработчиками ОПО, являются весьма приблизительными и должны уточняться в процессе нагрузочного тестирования.

В-третьих, в процессе проведения нагрузочного тестирования задания 2 получен неожиданный результат: с ростом объема задания среднее время его выполнения растет, а дисперсия – слабо убывает.

В-четвертых, согласно рис. 11, зависимости среднего времени выполнения задания от некоторых компонентов вектора X, определяющих используемые ресурсы узла, могут быть разрывными. Для компоненты x_1 – числа процессорных ядер – этот вывод вполне естественен, т.к. эта переменная по своему смыслу принадлежит некоторому подмножеству натуральных чисел. Но компонента x_2 – объем используемой ОЗУ – на виртуальном узле может настраиваться с достаточно малой дискретностью (1 Мб). В то же время на правой части рис. 11 области эффективного и неэффективного функционирования образуют две “полки”, разность высот между которыми визуально напоминает разрыв.

В-пятых, можно указать два признака неэффективной работы узла при выполнении того или иного типа задания. Первым признаком является значительный рост среднего времени. Второй признак – значительный рост дисперсии. В данной части исследования были получены только результаты, когда рост дисперсии в областях неэффективного функционирования узла всегда сопровождался ростом среднего времени. Тем не менее, можно предположить гипотетическую ситуацию, когда среднее время выполнения задания будет относительно невысоким, в то время как дисперсия возрастет значимо. Это означает нестабильное функционирование узла: различные части ПО начинают конкурировать между собой за недостающие ресурсы. Более того, неэффективное функционирование одного виртуального узла может влиять на функционирование другого, размещенного на тех же аппаратных ресурсах. Например, если недостаточный объем ОЗУ первого виртуального узла приводит к активному свопингу, то эта ситуация будет негативно влиять на производительность второго узла, делящего с первым жесткий диск.

Заметим, что перспектива исследований не исчерпывается построением моделей трудоемкости заданий различных типов. Во-первых, в данной работе для описания $\mathcal{M}(\cdot)$ и $\mathcal{D}(\cdot)$ были предложены функции $f^1(\cdot) - f^3(\cdot)$, обладающие свойством монотонного неубывания по переменным X. Как показали результаты нагрузочного тестирования, это убывание лишь локальное, и в некоторых областях $\mathcal{M}(\cdot)$ может расти с ростом объема используемых ресурсов X. Такую ситуацию можно наблюдать, например, на рис. 3 при обработке задания 1 объемом 350 000: рост объема ОЗУ сначала ведет к падению среднего времени обработки задания, но затем это время начинает слабо расти. Необходимо расширить класс функций $f^1(\cdot) - f^3(\cdot)$ так, чтобы иметь возможность описывать обнаруженное явление. Во-вторых, относительно функции дисперсии $\mathcal{D}(\cdot)$ в [1] сделано лишь одно очевидное предположение неотрицательности. Для описания $\mathcal{D}(\cdot)$ применяются те же функции $f^1(\cdot) - f^3(\cdot)$, что и для описания функции среднего времени $\mathcal{M}(\cdot)$. Этот выбор обоснован лишь тем, что класс $f^1(\cdot) - f^3(\cdot)$ достаточно широк. Вообще, относительно ожидаемых свойств функции дисперсии $\mathcal{D}(\cdot)$ имеется мало информации. Для повышения качества моделей необходимо определить какие-то дополнительные свойства, присущие $\mathcal{D}(\cdot)$ помимо неотрицательности, а также расширить соответствующим образом класс функций $f^1(\cdot) - f^3(\cdot)$, чтобы более точно описывать дисперсию. В-третьих, при построении моделей трудоемкости заданий 1 и 2 при обработке никак не использовались дополнительные статистические данные, планируемые для оценивания параметров Z аппаратно-программной среды узла. Этот факт обусловлен тем, что Z предполагалось применять для построения моделей, описываемых функциями $f^3(\cdot)$ с кусочно-линейной зависимостью по переменным Y. Параметры Z отвечали за локализацию точек “склейки” линейных областей. В практических примерах, представленных в данной части исследования, обработка дополнительной статистической информации не потребовалась: полученные измерения $\tilde{\mathcal{M}}_r$ и $\tilde{\mathcal{D}}_r$ хорошо приближались гладкими функциями “без изломов”. Обработка дополнительной информации может потребоваться, например, для построения моделей трудоемкости заданий другого типа (перечень возможных вариантов приведен в этом разделе выше), или для моделей трудоемкости заданий 1 и 2, но для всех возможных значений параметров (X,Y), включая и области неэффективного функционирования узла (см. рис. 2 и 11). В этом случае использование кусочно-гладких или даже разрывных функций для сглаживания наблюдений $\tilde{\mathcal{M}}_r$ и $\tilde{\mathcal{D}}_r$ может дать значительный выигрыш.

Перечисленные задачи определяют перспективу дальнейших исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Борисов А., Иванов А.* Стохастическое модели трудоемкости вычислительных задач. I. Принципы формирования, сбор статистических данных, задачи идентификации // Изв. РАН. ТиСУ. № 1. С. 22–34.
2. *Борисов А., Босов А., Иванов А.* Применение имитационного компьютерного моделирования к задаче обезличивания персональных данных. Модель и алгоритм обезличивания методом синтеза // Программирование. 2023. № 5. С. 19–34.
3. *Lagarias, J., Reeds J., Wright M., Wright P.* Convergence Properties of the Nelder-Mead Simplex Method in Low Dimensions // SIAM Journal of Optimization. 1998. V. 9. Iss. 1. P. 112–147.
4. *Себер Дж.* Линейный регрессионный анализ. М.: Мир, 1980. 456 с.
5. https://wiki.astralinux.ru/kb/minimal-nye-i-rekomenduemye-sistemnye-trebovaniya-dlya-os-187796554.html.

ИЗВЕСТИЯ РАН. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2024, № 2, С. 43–52

УПРАВЛЕНИЕ В СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ И В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

УДК 623.465.756

ОЦЕНИВАНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ПЕРЕХОДОВ МАРКОВСКОГО ДВОИЧНОГО ВХОДНОГО СИГНАЛА НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ[1]

В. А. Болдинов[a, *], В. А. Бухалёв[b], А. А. Скрынников[a, c], И. Ф. Хисматов[b]

[a]*Московский авиационный ин-т (национальный исследовательский ун-т), Москва, Россия*
[b]*Московский научно-исследовательский телевизионный ин-т, Москва, Россия*
[c]*Государственный научно-исследовательский ин-т авиационных систем, Москва, Россия*
**e-mail: viktorboldinov@mail.ru*

Поступила в редакцию 05.10.2023 г.
После доработки 24.10.2023 г.
Принята к публикации 29.01.2024 г.

Рассматривается задача оценивания неизвестных вероятностей переходов случайного марковского двоичного входного сигнала нелинейной одномерной дискретной системы на основе оценивания математического ожидания и дисперсии выходного сигнала. Определяемые выражения строятся при рассмотрении равновероятных переходов и установившегося режима алгоритма оценивания состояния системы, полученного путем аппроксимации плотности вероятности ее выходного сигнала распределением Пирсона I типа. Приведен пример сравнения теоретических расчетов с результатами имитационного математического моделирования.

Ключевые слова: распределение Пирсона I типа, система со случайной скачкообразной структурой, неизвестные вероятности переходов цепи Маркова, адаптивный алгоритм оценивания, двухмоментная параметрическая аппроксимация

DOI: 10.31857/S0002338824020045, **EDN:** VOQPZO

ESTIMATION OF PROBABILITIES OF TRANSITIONS OF MARKOV BINARY INPUT SIGNAL OF NONLINEAR SYSTEM

V.A. Boldinov[a, *], V.A. Bukhalev[b], A.A. Skrynnikov[a, c], I.F. Khismatov[b]

[a]*Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia*
[b]*Moscow Scientific Research Television Institute, Moscow, Russia*
[c]*State Scientific Research Institute of Aviation Systems, Moscow, Russia*
**e-mail: viktorboldinov@mail.ru*

Abstract. The problem of estimating unknown probabilities of transitions of a random Markov binary input signal of a nonlinear one-dimensional discrete system based on estimating the expectation and variance of the output signal is considered. The defined expressions are built on the basis of considering equally probable transitions and the steady-state mode of the algorithm for assessing the state of the system, obtained by approximating the probability density of its output signal by the Pearson type I distribution. An example of comparison of theoretical calculations with the results of imitation mathematical modeling is given.

Keywords: Pearson distribution of type I, system with random jump structure, unknown probabilities of Markov chain transitions, adaptive estimation algorithm, two-stage parametric approximation

1 Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 22-29-00708).

Введение. В [1] решалась задача оценивания неизвестных вероятностей переходов марковского двоичного входного сигнала линейной системы. В отличие от нее в статье рассматривается та же задача для нелинейной системы. Синтез алгоритма оценивания осуществляется на основе аппроксимации неизвестной плотности вероятности распределением Пирсона I типа. Его достоинством является разнообразие формы распределения, зависящее от сочетания параметров, связанных с математическим ожиданием и дисперсией простыми алгебраическими формулами. Задача решается методами теории систем со случайной скачкообразной структурой с применением метода двухмоментной параметрической аппроксимации, о которых далее подробно говорится в тексте.

Актуальность задачи состоит в следующем. Вероятности переходов марковской цепи характеризуют среднюю частоту случайных переключений входного двоичного сигнала. В некоторых авиационных системах навигации и наведения на вход пеленгационных устройств поступают сигналы помех от пространственно разнесенных объектов, воспринимаемых на выходе как единое целое [2]. Сигналы помех чередуются со случайными промежутками времени, средняя частота которых неизвестна. Алгоритм ее оценивания улучшает точность и эффективность системы управления летательного аппарата.

Марковские математические модели, применяемые для оптимизации стохастических систем, можно разделить на три класса:

1) системы с дискретным пространством состояний,

2) системы с непрерывным пространством состояний,

3) системы с дискретно-непрерывным пространством состояний (системы со случайной скачкообразной структурой (ССС)).

Соответственно этим классам случайные процессы, протекающие в них, разделяются на:

1) марковские цепи,

2) диффузионные процессы,

3) скачкообразные диффузионные процессы.

Будучи ограничены рамками статьи, проведем небольшой обзор научных работ по теории оценивания марковских процессов, представляя в основном лишь монографии и не претендуя на полный перечень многочисленных серьезных трудов по этой тематике.

Марковские цепи и диффузионные процессы.

1. Оптимальные алгоритмы:
- линейная фильтрация с аддитивным белым шумом в канале измерения [3–12],
- линейная фильтрация с небелыми аддитивными шумами в канале измерения [3–11],
- метод наименьших квадратов [10],
- метод максимального правдоподобия [3, 8, 10, 13],
- нелинейная байесовская фильтрация [3–5, 7–11, 14],
- линейное сглаживание [4–6, 8, 11],
- нелинейное сглаживание [4, 5, 8, 11],
- адаптивное оценивание [3, 7, 9–11],
- различение гипотез [14].

2. Приближенно-оптимальные алгоритмы:
- фильтрация [3–5, 7, 10, 11, 14, 15],
- сглаживание [5],
- адаптация и самообучение [3, 7, 10, 14],
- кластерный анализ [14],
- метод стохастической аппроксимации [10].

Системы ССС.

1. Оптимальные алгоритмы:

а) распознавание и фильтрация:
- линейные системы с марковской структурой [2, 5, 15–26] при аддитивно-мультипликативных возмущениях и помехах,
- нелинейные системы с условно-марковской структурой [2, 5, 17–20];

б) распознавание и сглаживание:
- линейные системы с марковской структурой [5, 18, 20],
- нелинейные системы с условно-марковской структурой [5, 18, 20].

2. Приближенно-оптимальные алгоритмы в нелинейных системах с марковской и условно-марковской структурой:
- распознавание и фильтрация [2, 5, 17, 19, 20],
- распознавание и сглаживание [5, 18, 20],
- стохастическая устойчивость [21, 27].

Оптимальные алгоритмы оценивания состояния нелинейных систем основаны на решении функциональных дифференциальных или рекуррентных уравнений для апостериорных плотностей вероятностей вектора состояний. В системах с детерминированной структурой — это вектор фазовых координат, в системах ССС — совместный вектор взаимосвязанных фазовых координат и структуры [5, 17, 18, 20]. В наиболее общей постановке данная задача решена и опубликована в статье [17] и в монографиях [4, 18, 20].

Приближенно-оптимальные алгоритмы, предназначенные для реализации в аппаратуре, описываются обыкновенными рекуррентными уравнениями для апостериорных оценок вектора состояния — математического ожидания (либо моды или медианы), ковариации ошибки оценивания и вероятностей состояний структуры [5, 18, 20].

При неполной и неточной априорной и апостериорной информации, особенно в условиях информационного противодействия и упрощенной математической модели, используемой при анализе, точность вычислений оптимальных алгоритмов не улучшает реальной точности оценивания. В то же время реализация законов распределения по сравнению с реализацией оценок вероятностных моментов требует более высокого быстродействия и объема памяти вычислительных систем.

Наиболее распространенным способом упрощения алгоритмов являются так называемые модифицированные фильтры Калмана: линеаризованный, расширенный, итерационный [10]; с низкочастотной аддитивной помехой [3]; с декомпозицией и снижением размерности вектора состояния [3, 10]; с обнулением слабокоррелированных корреляционных моментов связи в уравнениях Риккати и с использованием установившихся решений этих уравнений [3, 4]; с адаптацией к неизвестным параметрам объекта и измерителя [3, 4, 7, 10, 11, 14].

Модифицированные фильтры Калмана применялись в основном на ранних стадиях развития автоматики. По мере расширения задач, условий применения и использования существенных нелинейностей и логических элементов, при высоком уровне возмущений и помех точность этих фильтров не удовлетворяет техническим требованиям. С другой стороны, прогресс вычислительной техники позволил реализовать более сложные, но более точные приближенно-оптимальные алгоритмы.

К этой группе в первую очередь следует отнести алгоритмы, базирующиеся на аппроксимации неизвестных распределений. Наибольшее распространение получила гауссовская аппроксимация из-за так называемого эффекта нормализации, доказанного в [28] на основе центральной предельной теоремы теории вероятностей. Физическое объяснение этого эффекта — сглаживание линейными инерционными звеньями негауссовских марковских сигналов на выходе нелинейных характеристик. Гауссовская аппроксимация эквивалентна методу статистической линеаризации. Недостатком этих методов является унимодальность распределения и зависимость от табулированной функции — интеграла вероятности [20], что усложняет реализацию алгоритмов.

Приемлемого компромисса между точностью и реализуемостью, удовлетворяющего заданным техническим требованиям, можно достичь с помощью метода двухмоментной параметрической аппроксимации (ДПА) [2, 5, 15, 18–20]. Метод ДПА состоит в замене неизвестных распределений известными законами, зависящими от двух неизвестных параметров, связанных с двумя вероятностными моментами — математическим ожиданием и дисперсией — простыми алгебраическими формулами. В результате функциональные уравнения для плотностей вероятностей в системах с детерминированной структурой преобразуются в обыкновенные рекуррентные уравнения для моментов. В системах ССС аналогичные уравнения для распределения вероятностей вектора состояний $[x,s]$ преобразуются в систему уравнений для условных моментов при фиксированной структуре и вероятностей состояний структуры.

Для аппроксимации удобно применять распределения Пирсона. Эти распределения полностью определяются четырьмя параметрами, которые связаны с первыми четырьмя вероятностными моментами системой алгебраических уравнений. Если известны два любые из этих параметров, то оставшиеся два параметра связаны с двумя основными моментами: математическим ожиданием и ковариацией. Частными случаями распределения Пирсона, удовлетворяющими этим условиям, являются, например, гауссовское и усеченное гауссовское распределения, бета-распределение (и его частные случаи: закон арксинуса, равномерное и степенное распределения), гамма-распределение (и его частные случаи: показательное и показательно-степенное распределения, χ^2 -распределение, закон Эрланга), T -распределение Стьюдента.

Для аппроксимации могут использоваться такие непрерывные двухпараметрические распределения, как закон Симпсона, Релея, Максвелла, Парето, логистическое распределение и F -распределение Фишера. Возможно применение и дискретных распределений, например, биномиального, геометрического, Паскаля, Пуассона и Полиа. Параметры этих непрерывных и дискретных распределений связаны с их моментами простыми алгебраическими формулами.

Особенно удобным в прикладных задачах исследования систем ССС является применение распределения Пирсона I типа и его частного случая – бета-распределения. Они имеют весьма важное достоинство: форма плотности вероятности изменяется (в заданных пределах) в широком диапазоне в зависимости от сочетания двух неизвестных параметров, которые получаются в процессе решения замкнутой системы обыкновенных рекуррентных уравнений для математических ожиданий и ковариаций вектора состояний системы. Таким образом, формой аппроксимирующего распределения не нужно задаваться заранее – она определяется автоматически в результате нахождения указанных двух параметров и может изменяться в процессе решения. Для аппроксимации распределений сигналов с пределами $[0,\infty)$ удобно применять гамма-распределение.

Еще одно полезное свойство бета- и гамма-распределений – хорошая совместимость с функциями, описывающими типовые нелинейности: пеленгационные и ограничительные характеристики, зоны нечувствительности и проч., например при нелинейностях типа $\phi(x) = Cx^n(1-x)^m$ (рис. 1) и плотности вероятности бета-распределения $f(x) = B^{-1}(\alpha,\beta)x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}$, $x \in [0,1]$:

$$\int_0^1 \phi(x) f(x)dx = C\int_0^1 B^{-1}(\alpha,\beta)x^{\alpha+n-1}(1-x)^{\beta+m-1}dx =$$

$$= CB^{-1}(\alpha,\beta)B(\alpha+n,\beta+m)\int_0^1 B^{-1}(\alpha+n,\beta+m)x^{\alpha+n-1}(1-x)^{\beta+m-1}dx =$$

$$= C\frac{\alpha\beta(\alpha+1)(\beta+1)\cdots(\alpha+n-1)(\beta+m-1)}{\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n+m-1)},$$

где $\alpha = \gamma\bar{x}$, $\beta = \gamma(1-\bar{x})$, $\gamma = (\bar{x}-\Theta)/R$, $\bar{x} \triangleq M[x]$, $\Theta \triangleq M[x^2]$, и, в частном случае, при $n = m = 1$:

$$\int_0^1 \phi(x) f(x)dx = C(\bar{x}-\Theta).$$

В марковских системах со случайной, но не скачкообразной структурой для синтеза приближенно-оптимальных алгоритмов оценивания применяются метод разделения и кластерный анализ [14].

В статье для построения алгоритма оценивания неизвестных вероятностей переходов марковского двоичного сигнала используется аппроксимация распределением Пирсона I типа в диапазоне $[-1,1]$.

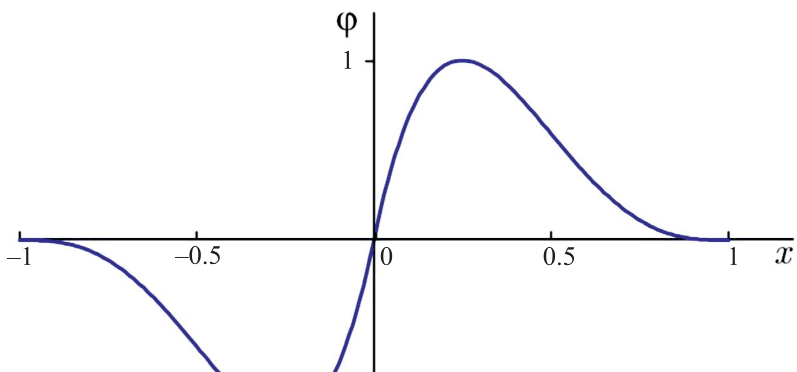


Рис. 1

1. Постановка задачи. Нелинейная система, изображенная на рис. 2, задается уравнениями

$$x_{k+1} = l\phi(x_k) + (1-l)\,u(s_k),\ \ 0 < l < 1, \tag{1.1}$$

где $k = 0,1,2,\ldots$ — дискретное время; x_k — выходной сигнал; l — коэффициент усиления в цепи обратной связи; $s_k = 1,2$ - индекс состояния структуры, описываемый марковской цепью с неизвестными распределениями равных вероятностей $q_k(s_{k+1} \mid s_k)$ переходов из s_k в s_{k+1}: $q(2 \mid 1) = q(1 \mid 2) = h$ и при $s_{k+1} = s_k$: $q(1 \mid 1) = 1 - q(2 \mid 1)$, $q(2 \mid 2) = 1 - q(1 \mid 2 |)$; $u(s_k)$ — случайный входной двоичный сигнал: $u(s_k = 1) = 1$, $u(s_k = 2) = -1$.

Вероятность переходов $h = h'\Delta t$, где Δt — шаг дискретности, h' — интенсивность переходов марковской цепи с непрерывным временем $(\Delta t \to 0)$, характеризует среднюю частоту входного сигнала. Пеленгационная характеристика $\phi(x_k)$ записывается как

$$\phi(x_k) = \begin{cases} cx_k(1 - x_k^2) & \text{при}\, x_k \in [-1,1], \\ 0 & \text{при}\, x_k \notin [-1,1], \end{cases} \tag{1.2}$$

$$c \in (0, 2.5).$$

Требуется построить алгоритм оценивания вероятности h.

2. Алгоритм оценивания вероятностей переходов. В уравнении (1.1) с равновероятными переходами математическое ожидание $\bar{u}_k$ входного сигнала $u_k(s_k)$ равно нулю. Поэтому равно нулю и установившееся математическое ожидание $\bar{x}_k$ выходного сигнла x_k системы (1.1), имеющей нелинейную характеристику $\phi(x_k)$. Дисперсия R_k сигнала x_k зависит от частоты и амплитуды входного сигнала и полосы пропускания системы, которые характеризуются параметрами h и l. Зная два любых параметра из тройки R, h, l, можно определить третий параметр. На этом основана идея построения алгоритма распознавания неизвестного параметра h.

Для нахождения зависимости R от h, l воспользуемся уравнениями для математических ожиданий и дисперсий нелинейной системы с марковской скачкообразной структурой [18, 20]:

$$p_{k+1}(s_{k+1}) = \sum_{s_k} q_k(s_{k+1} \mid s_k)\, p_k(s_k), \tag{2.1}$$

$$\bar{x}_{k+1}(s_{k+1})\, p_{k+1}(s_{k+1}) = \sum_{s_k} q_k(s_{k+1} \mid s_k)\, p_k(s_k)\left[l\bar{\phi}_k(s_k) + (1-l)u_k(s_k)\right], \tag{2.2}$$

$$\begin{gathered} \Theta_{k+1}(s_{k+1})\, p_{k+1}(s_{k+1}) = \sum_{s_k} q_k(s_{k+1} \mid s_k)\, p_k(s_k) \times \\ \times\left[l^2\Phi_k(s_k) + 2l(1-l)\bar{\phi}_k(s_k)u_k(s_k) + (1-l)^2 u_k^2(s_k)\right], \end{gathered} \tag{2.3}$$

$$\bar{x}_{k+1} = \sum_{s_{k+1}} \bar{x}_{k+1}(s_{k+1})\, p_{k+1}(s_{k+1}), \tag{2.4}$$

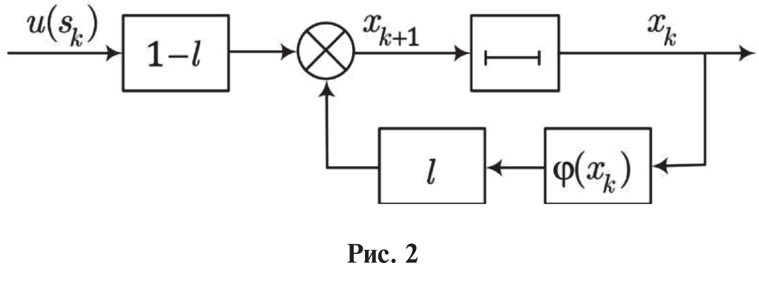


Рис. 2

$$\Theta_{k+1} = \sum_{s_{k+1}} \Theta_{k+1}(s_{k+1}) p_{k+1}(s_{k+1}), \tag{2.5}$$

$$R_{k+1} = \Theta_{k+1} - \bar{x}_{k+1}^2. \tag{2.6}$$

где $p_k(s_k)$ – вероятность состояния s_k; $\bar{x}_k(s_k)$ и $\Theta_k(s_k)$ – условные первый и второй начальные моменты x_k при фиксированном s_k; $\bar{x}_k$, Θ_k и R_k – соответственно безусловные первый и второй начальные моменты и дисперсия сигнала x_k;

$$\bar{\phi}_k(s_k) \triangleq \int_{-1}^{1} \phi_k(x_k) f_k(x_k \mid s_k) dx_k, \tag{2.7}$$

$$\Phi_k(s_k) \triangleq \int_{-1}^{1} \phi_k^2(x_k) f_k(x_k \mid s_k) dx_k, \tag{2.8}$$

где $f_k(x_k \mid s_k)$ – условная плотность вероятности x_k при фиксированном s_k.

В [1] рассматривалась линейная система с марковским двоичным входным сигналом, у которой, в отличие от системы (1.1), характеристика $\phi(x_k) = x_k$, $x_k \in [-1,1]$. Было математически строго доказано, что выходной сигнал этой системы имеет условные распределения Пирсона I типа:

$$\begin{gathered} f(x \mid 1) = \frac{(1+x)^{\lambda}(1-x)^{\nu-1}}{2^{\lambda+\nu} B(\lambda+1,\nu)}, \\ f(x \mid 2) = \frac{(1+x)^{\lambda-1}(1-x)^{\nu}}{2^{\lambda+\nu} B(\lambda,\nu+1)}, \\ x \in [-1,1], \quad \lambda > 0, \quad \nu > 0, \end{gathered} \tag{2.9}$$

где $B(\lambda+1,\nu)$ и $B(\lambda,\nu+1)$ – специальные бета-функции со следующими свойствами [29]:

$$B(\lambda,\beta) = \frac{\Gamma(\lambda)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\lambda+\beta)}, \quad \Gamma(\lambda+1) = \lambda\Gamma(\lambda),$$
$$\Gamma(\nu+1) = \nu\Gamma(\nu),$$

$$\lambda = \frac{g}{1-l}, \quad \nu = \frac{h}{1-l}, \quad \lambda > 0, \quad \nu > 0,$$

где $\Gamma(\lambda)$ – специальная гамма-функция; h, g – вероятности перехода соответственно из первого состояния во второе и наоборот.

Это обстоятельство, а также способность распределения Пирсона I типа принимать разнообразную форму в зависимости от значений его параметров λ и ν (рис. 3) дает основание аппроксимировать условные плотности вероятности $f_k(x_k \mid s_k)$ в формулах (2.7), (2.8) плотностями вероятности Пирсона I типа:

$$\begin{gathered} f_k(x_k \mid 1) = \frac{(1+x_k)^{\alpha_k}(1-x_k)^{\beta_k-1}}{2^{\alpha_k+\beta_k} B(\alpha_k+1,\beta_k)}, \\ f_k(x_k \mid 2) = \frac{(1+x_k)^{\alpha_k-1}(1-x_k)^{\beta_k}}{2^{\alpha_k+\beta_k} B(\alpha_k,\beta_k+1)}, \end{gathered} \tag{2.10}$$

$$\alpha_k = \frac{(1+\bar{x}_k)\gamma_k}{2}; \quad \beta_k = \frac{(1-\bar{x}_k)\gamma_k}{2};$$
$$\gamma_k = \alpha_k + \beta_k = \frac{1-\Theta_k}{R_k}. \tag{2.11}$$

Так как

$$\sum_{s_{k+1}} q_k(s_{k+1} \mid s_k) = 1,$$

то из уравнений (2.2), (2.4) с учетом $u_k(1) = 1$, $u_k(2) = -1$ следует

$$\bar{x}_{k+1} = l\sum_{s_k=1}^{2} p_k(s_k)\bar{\phi}_k(s_k) + (1-l)[p_k(1) - p_k(2)]; \tag{2.12}$$

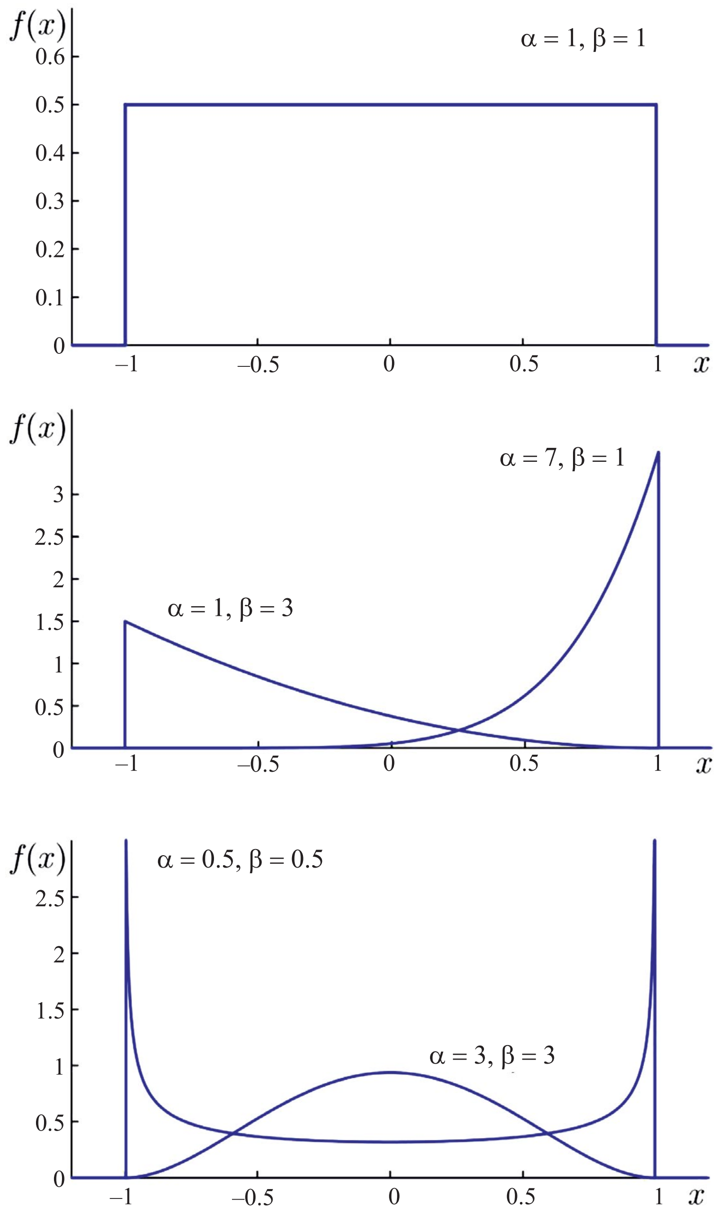


Рис. 3

$$\Theta_{k+1} = l^2 \sum_{s_k=1}^{2} p_k(s_k)\Phi_k(s_k) + 2l(1-l)\times$$
$$\times\left[p_k(1)\bar{\phi}_k(1) - p_k(2)\phi_k(2)\right] + (1-l)^2. \tag{2.13}$$

Подставив (2.10), (2.11) в (2.7), (2.8), получаем

$$\bar{\phi}_k(1) = \frac{4c\beta(\alpha+1)}{(\gamma+1)(\gamma+2)}\cdot\frac{\alpha-\beta+1}{\gamma+3}, \tag{2.14}$$

$$\bar{\phi}_k(2) = \frac{4c\alpha(\beta+1)}{(\gamma+1)(\gamma+2)}\cdot\frac{\alpha-\beta-1}{\gamma+3}, \tag{2.15}$$

$$\Phi_k(1) = \frac{16c^2\beta(\alpha+1)(\beta+1)(\alpha+2)}{(\gamma+1)\ldots(\gamma+4)}\times$$
$$\times\frac{\gamma+5+(\alpha-\beta+1)^2}{(\gamma+5)(\gamma+6)}, \tag{2.16}$$

$$\Phi_k(2) = \frac{16c^2\alpha(\alpha+1)(\beta+1)(\beta+2)}{(\gamma+1)\ldots(\gamma+4)}\times$$
$$\times\frac{\gamma+5+(\alpha-\beta-1)^2}{(\gamma+5)(\gamma+6)}. \tag{2.17}$$

При равновероятных переходах марковской цепи s_k в установившемся режиме имеем $p_k(1) = p_k(2) = 0.5$ и, как следует из (2.1) – (2.17),

$$\bar{x}_k = 0,\quad R_{k+1} = R_k = R,\quad \Theta_{k+1} = R_{k+1},\quad \bar{\phi}_{k+1}(1) = \bar{\phi}_k(1) = \phi(1),$$
$$\bar{\phi}(1) = -\bar{\phi}(2),\quad \bar{x}_{k+1}(1) = \bar{x}_k(1) = \bar{x}(1),\quad \bar{x}(1) = -\bar{x}(2),$$
$$\Phi_{k+1}(1) = \Phi_k(1) = \Phi(1),\quad \Phi(1) = \Phi(2), \tag{2.18}$$

$$\Phi(1) = \Phi(2) = \frac{c^2\gamma(\gamma+2)}{(\gamma+1)(\gamma+3)(\gamma+5)} = æR,$$
$$æ \triangleq \frac{c^2(1-R^2)}{(1+2R)(1+4R)}, \tag{2.19}$$

$$\bar{\phi}(1) = \frac{c\gamma}{(\gamma+1)(\gamma+3)} = \frac{c\gamma\bar{x}(1)}{\gamma+3};\quad \bar{x}(1) = \frac{1}{\gamma+1}, \tag{2.20}$$

откуда вытекает, что

$$\bar{\phi}(1) = \varepsilon\bar{x}(1),\quad \varepsilon = \frac{c(1-R)}{1+2R}. \tag{2.21}$$

Подставив (2.21) в (2.2), находим

$$\bar{\phi}(1) = \frac{(1-l)\mu\varepsilon}{1-l\mu\varepsilon}, \tag{2.22}$$

где $\mu \triangleq 1-2h$.

Подставив (2.22) в (2.13), получаем

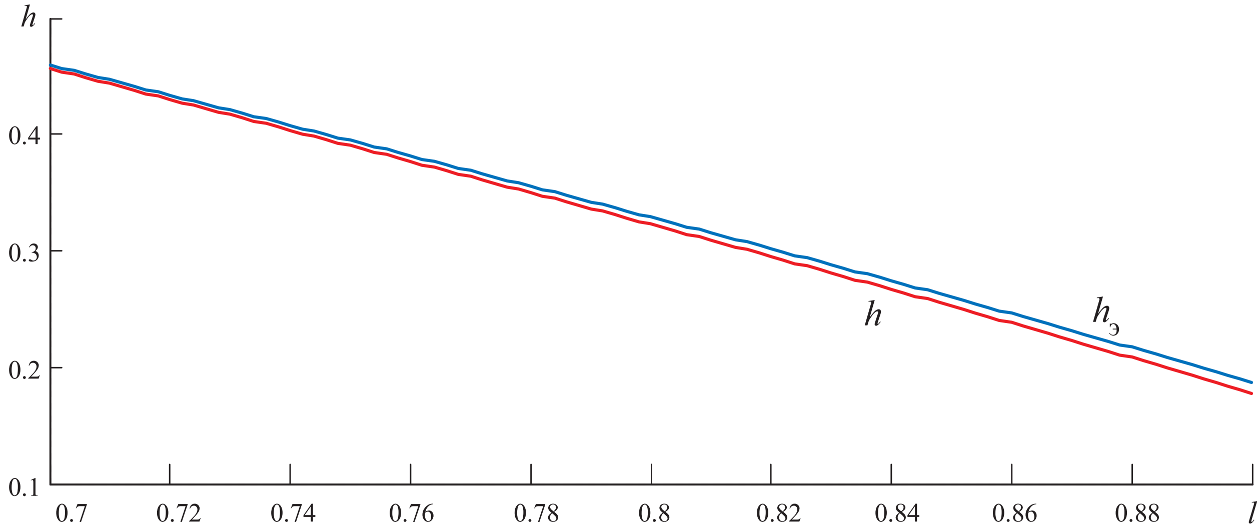


Рис. 4

$$R = \frac{(1-l)^2(1+\mu l\varepsilon)}{(1-l^2æ)(1-\mu l\varepsilon)}, \tag{2.23}$$

откуда следует

$$\mu = \frac{R(1-l^2æ)-(1-l)^2}{l\varepsilon\left[R(1-l^2æ)+(1-l)^2\right]}, \qquad h = \frac{1-\mu}{2}. \tag{2.24}$$

Как видно из формул (2.19) – (2.24), для определения h нужно знать l и R. Дисперсия R может быть оценена любым стандартным способом, используемым в инженерной практике с помощью аналоговой или цифровой техники. Например, алгоритмами фильтрации или сглаживания (на закрепленном интервале, в закрепленной точке, с постоянным запаздыванием) [5], или так называемым методом осреднения [30], применяемым в авиационной технике. Он состоит в следующем: измеряемый сигнал проходит через низкочастотный фильтр, полоса пропускания которого намного уже полосы пропускания исследуемой системы. На выходе фильтра имеем оценку среднего значения $\bar{x}$. Параллельно с этим сигнал пропускается через квадратичный детектор и аналогичный низкочастотный фильтр, на выходе которого получается оценка среднего квадрата Θ. Вычитанием $\Theta - \bar{x}^2 = R$ находим оценку дисперсии. После чего h при известном l определяется согласно (2.24).

3. Пример. При $R = 0.2$ и $c = 1.5$ согласно (2.19), (2.21), получаем $æ = 1$, $\varepsilon = 1$, откуда из (2.24) следует

$$\mu = \frac{1}{l}\cdot\frac{(1+l)-5(1-l)}{(1+l)+5(1-l)} = \frac{1.5l-1}{l(1.5-l)}, \qquad h = \frac{1-\mu}{2}. \tag{3.1}$$

Зависимость $h(l)$ при $R = 0.2$, рассчитанная по формуле (3.1), изображена на рис. 4. Сравнение ее с кривой, найденной путем имитационного математического моделирования $h_э(l)$, показывает удовлетворительную для практики точность разработанного алгоритма оценивания вероятности переходов марковского двоичного сигнала.

Заключение. Решена задача оценивания неизвестных вероятностей переходов марковского двоичного входного сигнала нелинейной одномерной дискретной системы на основе использования известных оценок математического ожидания и дисперсии выходного сигнала. На базе методов теории систем со случайной скачкообразной структурой и двухмоментной параметрической аппроксимации неизвестных плотностей вероятностей распределением Пирсона I типа получен приближенно-оптимальный рекуррентный алгоритм оценивания состояния системы. Выражения для определения искомых оценок заданы рассмотрением установившегося режима разработанного рекуррентного алгоритма при условии равновероятных переходов случайного двоичного входного сигнала. Как показывают расчеты, теоретические результаты близки к результатам, полученным путем имитационного математического моделирования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бухалёв В.А., Скрынников А.А., Болдинов В.А.* Адаптивное распознавание марковского двоичного сигнала линейной системы на основе распределения Пирсона I типа // АиТ. 2022. № 8. С. 159–168.
2. *Бухалёв В.А., Скрынников А.А., Болдинов В.А.* Алгоритмическая помехозащита беспилотных летательных аппаратов. М.: Физматлит, 2018. 192 с.
3. *Аоки М.* Оптимизация стохастических систем. М.: Наука, 1971. 424 с.
4. *Брайсон А.Е., Хо Ю Ши.* Прикладная теория оптимального управления. М.: Мир, 1972. 544 с.
5. *Бухалёв В.А.* Оптимальное сглаживание в системах со случайной скачкообразной структурой. М.: Физматлит, 2013. 188 с.
6. *Медич Дж.С.* Стохастически оптимальные линейные оценки и управление. М.: Энергия, 1973. 440 с.
7. *Саридис Дж.Н.* Самоорганизующиеся стохастические системы управления. М.: Наука, 1980. 401 с.
8. *Сейдж Э.П., Мелса Дж.Л.* Теория оценивания и ее применение в связи и управлении. М.: Связь, 1976. 496 с.
9. *Стратонович Р.Л.* Условные марковские процессы и их применение в теории оптимального управления. М.: МГУ, 1966.
10. *Бар-Шалом Я., Бревер Г., Джонсон С. и др.* Фильтрация и стохастическое управление в динамических системах / Под ред. К.Т. Леондеса. М.: Мир, 1980. 408 с.
11. *Elliott R., Aggoun L., Moore J.* Hidden Markov Models: Estimation and Control. N.Y.: Springer, 1995. 382 p.
12. *Kalman R.E., Busy R.S.* New Results in Linear Filtering and Prediction Theory // Trans. ASME, J. Basic Engineering. 1961. V. 83D. P. 95–108.
13. *Dempster A.P. , Laird N.M. , Rubin D.B.* Maximum Likelihood from Incomplite Data via the EM Algorithm // J. Royal Statistical Society of London. 1977. Ser. B. V. 91. № 1. P. 1–38.
14. *Патрик Э.* Основы распознавания образов. М.: Сов. радио, 1980. 408 с.
15. *Бухалёв В.А., Болдинов В.А., Прядкин С.П., Скрынников А.А.* Двухмоментная параметрическая аппроксимация распределений в информационно-управляющих системах навигации и наведения // Вестник компьютерных и информационных технологий. 2016. № 8. С. 8–15.
16. *Артемьев В.М.* Теория динамических систем со случайными изменениями структуры. Минск: Вышэйш. шк., 1979. 160 с.
17. *Бухалёв В.А.* Оптимальная фильтрация в системах со случайной скачкообразной структурой // АиТ. 1976. № 2. С. 44–54.
18. *Бухалёв В.А.* Распознавание, оценивание и управление в системах со случайной скачкообразной структурой. М.: Наука, 1996. 287 с.
19. *Бухалёв В.А., Скрынников А.А., Болдинов В.А.* Игровое управление системами со случайной скачкообразной структурой. М.: Физматлит, 2021. 176 с.
20. *Бухалёв В.А., Скрынников А.А., Болдинов В.А.* Системы со случайной скачкообразной структурой. М.: ИД Академии Жуковского, 2022. 272 с.
21. *Пакшин П.В.* Дискретные системы со случайными параметрами и структурой. М.: Наука, 1994. 304 с.
22. *Mariton M.* Jump Linear Systems in Automatic Control. N.Y.: Taylor & Francis, 1990.
23. *Piers B.D., Sworder D.D.* Bayes and Minimax Controllers for a Linear Systems for Stochastic Jump Parameters // IEEE Trans. AC-16. 1971. No. 4. P. 677–685.
24. *Robinson V.G., Sworder D.D.* A Computational Algorithm for Design of Regulator for Linear Jump Parameters Systems // IEEE Trans. AC-19. 1974. № 1. P. 47–49.
25. *Sworder D.D.* Bayes Controllers With Memor for a Linear Systems with Jump Parameters // IEEE Transactions on Automatic Control. 1972. V. 17. Iss. 1. P. 119–121.
26. *Loparo K.A., Roth Z.T., Eckert S.J.* Nonlinear Filtering for Systems with Random Structure // IEEE Trans. AC-31. 1986. № 1. P. 37–47.
27. *Kats I. Ya, Martynyuk A.A.* Stability and Stabilization of Nonlinear Systems with Random Structures. N.Y.: Taylor & Francis, 2003. 256 p.
28. *Пугачёв В.С., Синицын И.Н.* Теория стохастических систем. М.: Логос, 2004. 1000 с.
29. *Корн Р., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1984.
30. *Бендат Дж., Пирсол А.* Измерение и анализ случайных процессов. М.: Мир, 1971. 408 с.

ИЗВЕСТИЯ РАН. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2024, № 2, С. 53–66

СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

УДК 629

ТЕОРЕТИКО-ИГРОВОЙ ПОДХОД К УПРАВЛЕНИЮ СОСТАВОМ И СТРУКТУРОЙ ТРИАНГУЛЯЦИОННОЙ ИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ В УСЛОВИЯХ АПРИОРНОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Г. А. Угольницкий[a], *, Е. Н. Чепель[a], **
[a]*Южный федеральный ун-т, Ростов-на-Дону, Россия*
**e-mail: gaugolnickiy@sfedu.ru*
***e-mail: evgeny_c@bk.ru*

Поступила в редакцию 24.07.2023 г.
После доработки 22.10.2023 г.
Принята к публикации 29.01.2024 г.

Рассмотрена задача управления структурой и составом триангуляционной измерительной системы в теоретико-игровой постановке. В рамках указанной задачи предложен подход кооперативного поиска размещения пунктов и метод оценивания временного показателя функционирования системы. Поиск размещения пунктов триангуляционной измерительной системы использует инструментарий многоагентных потенциальных игр. Определены критерии выбора размещения пунктов и вид потенциальной функции. Управление составом и структурой триангуляционной измерительной системы основано на применении результатов работы кластерно-вариационного метода. Представлено структурно-функциональное описание имитационной модели для решения задачи оценивания временного показателя функционирования триангуляционной измерительной системы. Приведенные результаты имитационного моделирования подтверждают практическую эффективность предложенных подходов.

Ключевые слова: излучающая цель, пеленгационные измерения, теория игр, многоагентная система, кластерный анализ, пассивная локация

DOI: 10.31857/S0002338824020067, **EDN:** VOKHAW

A GAME-THEORETIC APPROACH TO MANAGING THE COMPOSITION AND STRUCTURE OF A BEARING-ONLY MEASUREMENT SYSTEM IN CONDITIONS OF A PRIORI UNCERTAINTY

G. A. Ugolnickiy[a], *, E. N. Chepel[a], **
[a]*Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia*
**e-mail: gaugolnickiy@sfedu.ru,*
***e-mail: evgeny_c@bk.ru*

The problem of managing the composition and structure of a bearing-only measurements system (BOMS) in a game-theoretic formulation is considered. An approach of cooperative search for the placement of BOMS points and a method for estimating the work-time indicator of the system are proposed. The search for the placement of BOMS points uses the toolkit of multi-agent potential games. The criteria for selecting the placement of points and the type of potential function are determined. The management of the composition and structure of the BOMS is based on the results of the cluster-variation method. A structural and functional description of the simulation model is presented. The above results of simulation modeling confirm the practical effectiveness of the proposed approaches.

Keywords: radiating target, bearing-only measurements, game-theory, multi-agent, cluster analysis, passive location

Введение. Перспективным направлением повышения точности и помехозащищенности оценивания параметров движения цели является создание многопозиционных систем пассивной локации [1–12]. При этом рассматриваются системы как со стационарными, так и с подвижными позициями. Среди методов пассивной локации, с точки зрения практической реализации, наиболее популярным выступает триангуляционный метод [7–12]. В [13–15] развивается кластерно-вариационный метод решения задачи триангуляции, который является альтернативным по отношению к известным методам пассивной локации, например [16–20]. Кластерно-вариационный метод (КВМ) наряду с формированием устойчивых оценок местоположения цели в условиях существенной априорной неопределенности предоставляет информацию о каналах с недостоверными измерениями. Ошибки измерений могут иметь различную природу происхождения: случайные, обусловленные топологией триангуляционной измерительной системы (ТИС) и условиями наблюдения цели, возникающие в результате действия искусственных помех (например, в условиях конфликта [1, 5, 6]). Известно [12, 18–20], что в зависимости от топологии ТИС, условий наблюдения и выбранного алгоритма численной оптимизации задача определения координат цели может приводить как к корректным, так и некорректным результатам, т. е. к получению плохих триангуляционных оценок местоположения цели. Попытка учесть указанные факторы приводит к постановке следующих задач: поиск топологий ТИС, обеспечивающих максимизацию корректных оценок координат цели для некоторой области; перемещение пунктов ТИС с целью минимизации влияния искусственных помех и максимизации времени успешного функционирования ТИС. В [21, 22] приведен теоретико-игровой метод решения задачи совместного поиска и наблюдения группой беспилотных летательных аппаратов (БПЛА) в некоторой области. Применяется многопользовательская потенциальная игра с ограниченным набором действий. Управление движением осуществляется посредством двоичного логарифмически-линейного обучения, что обеспечивает оптимальное покрытие исследуемого региона [23, 24]. Адаптация указанного теоретико-игрового подхода с учетом особенностей измерения и обработки сигналов пунктами ТИС заключается в определении вида потенциальной функции (функции глобальной полезности). Предложен ряд критериев, на базе которых формируются функции глобальной и индивидуальной полезности. Проведен сравнительный анализ решений, полученных для некоторых комбинаций критериев. Задача перемещения пунктов ТИС сформулирована в виде модели противоборства наблюдателя и противника, где наблюдатель управляет топологией ТИС, а противник осуществляет формирование помех с целью нарушения работы ТИС. Противник располагает территориально распределенной системой постановки помех (СПП), при помощи которой осуществляет формирование сигнала-помехи. Наблюдатель, используя для обработки измерений КВМ, имеет возможность обнаружения пунктов ТИС, попадающих в зону действия сигнала-помехи СПП. Предложен алгоритм противодействия наблюдателя действиям противника. Приведенные результаты имитационного моделирования подтверждают практическую эффективность алгоритма противодействия и позволяют провести оценку времени функционирования ТИС.

1. Поиск размещения пунктов ТИС. Пусть $\{P_n\}_{n=1}^{N} = \left\{[x_n^p, y_n^p]\right\}_{n=1}^{N}$ – измерительные пункты ТИС, где $P_n \in \mathbf{P}$, $\mathbf{P} = \{[x,y] : 0 \le x \le 1, -1 \le y \le 0\}$. Рабочая область $\mathbf{S}$ – это регион, в котором ожидаем появление целей. Задача состоит в поиске размещения пунктов ТИС, при котором будет обеспечено корректное наблюдение целей, расположенных в рабочей области. Используя обозначения из [21], определим игру $G\left(I, A, \{U_i, i \in I\}\right)$, где $I = \left\{\overline{1,N}\right\}$ – множество игроков (агентов), $A = A_1 \times A_2 \times ... \times A_N$ – множество совместных действий агентов, причем A_i – множество действий, доступных i-му агенту, $\{U_i, i \in I\}$ – множество функций полезности, где $U_i : A_i \to \mathbf{R}$ – функция полезности i-го агента. Вектор $a = (a_1, a_2, ..., a_N)$ – коллективные действия агентов (пунктов наблюдения), будем писать $a = (a_i, a_{-i})$, где $a = (a_i, a_{-i})$, где a_i – действие i-го пункта, а a_{-i} – действия остальных пунктов, исключая i-й. Задача решается в дискретном варианте, для этого покрываем области размещения пунктов и целей сеткой: $\mathbf{P}_m$ – узлы сетки на $\mathbf{P}$, $\mathbf{S}_k$ – узлы сетки на $\mathbf{S}$. Набор действий $C_{a_i(t-1)}$ (позиций для перемещения), доступных i-му агенту в момент времени t, зависит от его текущей позиции и выбирается из некоторой ее окрестности. Радиус окрестности определяется константой r_C, которая характеризует возможности перемещения агента за один шаг игры. При этом $a_i(t-1) \in C_{a_i(t-1)}$, т.е. агент может выбрать действие, в результате которого он останется в текущей позиции. Например, на рис.1 маркером $\times$ отмечены доступные позиции для перемещения агента №1 для параметра $r_C = 0.25$.

Таким образом, измерительные пункты рассматриваются в качестве агентов, при этом агенты взаимодействуют и в зависимости от своих возможностей и окружающей обстановки

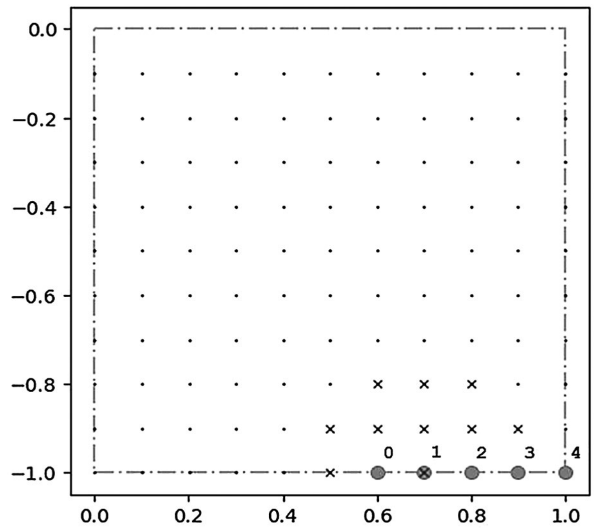


Рис. 1. Позиции для перемещения агента №1 на текущем шаге

формируют множество доступных действий. В результате обмена информацией агенты договариваются о действиях, обеспечивающих желаемое состояние всей группы.

В [20] приведен расчет эллипсов неопределенности триангуляционного метода для двух измерительных пунктов при фиксированных ошибках угловых измерений. На основе полученных расчетов сделан вывод, что точность измерения наиболее высока, если угол пересечения линий положения достаточно близок к прямому, и заметно снижается, если линии положения пересекаются под острыми углами. Под линиями положения понимается геометрическое место точек возможного местонахождения источника излучения. Понятно, что при ограничениях на область размещения пунктов ТИС получить наилучшие или близкие к ним условия наблюдения для всех целей рабочей области не представляется возможным. Задача заключается в поиске размещения пунктов ТИС, при котором обеспечиваются указанные условия наблюдения для наибольшего количества целей рабочей области. Поиск расположения пунктов ТИС основан на двух критериях: максимизация расстояний между пунктами и минимизации косинуса угла между пеленгами.

С учетом указанных критериев функция глобальной полезности будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{gathered}\Phi(a) = \Phi(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_N) = \\ = \min_{i,j \in \overline{1,N}} \left(\left\| \mu_i - \mu_j \right\| \right) \sum_{i,j \in \overline{1,N}, g \in \mathbf{S}_k} \left[1 - f\left(\mu_i, \mu_j, g \right) \right],\end{gathered} \tag{1.1}$$

где $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_N \in \mathbf{P}_m$ – позиции, в которые перемещаются пункты ТИС в результате действий $a_1, a_2, \ldots, a_N$, $\mathbf{P}_m$ – узлы сетки на $\mathbf{P}$, $\mathbf{S}_k$ – узлы сетки на $\mathbf{S}$,

$$f\left(\mu_i, \mu_j, g \right) = \left| \frac{\left\| g - \mu_i \right\|^2 + \left\| g - \mu_j \right\|^2 - \left\| \mu_i - \mu_j \right\|^2}{2 \left\| g - \mu_i \right\| \left\| g - \mu_j \right\|} \right|$$

– модуль косинуса угла между пеленгами цели g из позиций μ_i и μ_j (теорема косинусов). В (1.1) множитель

$$\min_{i,j \in \overline{1,N}} \left(\left\| \mu_i - \mu_j \right\| \right)$$

отвечает критерию максимизации расстояний между пунктами ТИС, при увеличении минимального расстояния между пунктами ТИС будет увеличиваться и значение функции полезности. Значение $\left[1 - f\left(\mu_i, \mu_j, g \right) \right]$ отвечает за условия наблюдения цели для пары пунктов i, j

и изменяется в диапазоне от 0 до 1. Расположение пары пунктов, обеспечивающее близость угла между пеленгами, к прямому углу для наибольшего количества целей рабочей области соответствует максимальному значению суммы в (1.1). При этом функция индивидуальной полезности для i -го пункта принимает вид

$$U_i(a_i, a_{-i}) = \Phi(\mu_1, \mu_2, ..., \mu_N) - \\ - \Phi(\mu_1, \mu_2, ...\mu_{i-1}, \mu_{i+1}, ..., \mu_N). \tag{1.2}$$

Каждый агент для позиций $\hat{a}_i \in C_{a_i(t-1)}$ проводит расчет вероятностей в соответствии с алгоритмом двоичного логарифмически-линейного обучения [21]:

$$\begin{cases} P(a_i(t) = a_i(t-1)) = \dfrac{\exp\left(U_i(a(t-1))/\tau\right)}{\exp\left(U_i(a(t-1))/\tau\right) + \exp\left(U_i(\hat{a}_i, a_{-i}(t-1))/\tau\right)}, \\ P(a_i(t) = \hat{a}_i) = \dfrac{\exp\left(U_i(\hat{a}_i, a_{-i}(t-1))/\tau\right)}{\exp\left(U_i(a(t-1))/\tau\right) + \exp\left(U_i(\hat{a}_i, a_{-i}(t-1))/\tau\right)}, \end{cases} \tag{1.3}$$

где параметр τ используется для учета шума моделью и характеризует вероятность выбора неправильного действия агентом [21, 23]. При расчете вероятностей i-м агентом полагаем, что остальные агенты не осуществляют смену позиции.

Также рассмотрен вариант функции глобальной полезности с использованием только критерия максимизации расстояний между пунктами:

$$\Phi(a) = \Phi(\mu_1, \mu_2, ..., \mu_N) = \\ = \min_{i,j \in \overline{1,N}} \left(\|\mu_i - \mu_j\|\right) \sum_{i,j \in \overline{1,N}} \left[\|\mu_i - \mu_j\|\right]. \tag{1.4}$$

Здесь второй множитель будет расти при увеличении расстояния между любыми двумя пунктами, а множитель

$$\min_{i,j \in \overline{1,N}} \left(\|\mu_i - \mu_j\|\right)$$

осуществляет компенсацию так, чтобы рост функции полезности не достигался только увеличением расстояния какого-то одного пункта от остальных.

Проводилось имитационное моделирование на основе трех алгоритмов управления перемещением.

Алгоритм A_1. Выбор агента для перемещения происходит случайно. Итоговое действие a_i^* также выбирается случайно из множества доступных действий $\hat{a}_i \in C_{a_i(t-1)}$, и для него рассчитываются вероятности по формуле (1.3). Выбор агентов и их действий производится с равной вероятностью. Если $P(a_i(t) = \hat{a}_i) > P(a_i(t) = a_i(t-1))$, то агент совершает выбранное действие, в противном случае остается на месте.

Алгоритм A_2. Каждый агент вычисляет вероятности по формуле (1.3) для каждого доступного действия $\hat{a}_i \in C_{a_i(t-1)}$, путем сравнения вероятностей выбирает наилучшее действие:

$$a_i^{\max} = \arg\max_{C_{a_i(t-1)}} \left(\left\{P(a_i(t) = \hat{a}_i) \middle| P(a_i(t) = \hat{a}_i) > P(a_i(t) = a_i(t-1))\right\}\right) \cdot$$

Если таких действий несколько, то выбор итогового действия осуществляется случайно. Затем производится ранжирование наилучших действий агентов $\left\{a_i^{\max}, i \in I\right\}$. Перемещение делает тот агент, который предложил наилучшее действие среди всех агентов, т.е. агент с индексом:

$$i^* = \arg\max_{i \in I} \left[P\left(a_i(t) = a_i^{\max}\right)\right].$$

Алгоритм A_3. Выбор агента для перемещения происходит случайно. Итоговое действие a_i^* выбирается из доступных действий $\hat{a}_i \in C_{a_i(t-1)}$ путем сравнения вероятностей.

Результаты имитационного моделирования на основе алгоритмов A_1, A_2, A_3 с использованием функций глобальной полезности (1.1) и (1.4) приведены в разд. 3.

2. Задача противоборства наблюдателя и противника. Пусть $\{P_n\}_{n=1}^N = \{[x_n^p, y_n^p]\}_{n=1}^N$ – измерительные пункты ТИС, где $P_n \in \mathbf{P}$, $\mathbf{P} = \{[x, y] : 0 \le x \le 1, -1 \le y \le 0\}$. $\{S_m\}_{m=1}^M = \{[x_m^s, y_m^s]\}_{m=1}^M$ – пункты СПП, где $S_m \in \mathbf{S}$, $\mathbf{S} = \{[x, y] : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$, ρ – высота треугольника помех, γ – половина угла при вершине треугольника помех, $\alpha_m \in [-\pi, \pi]$ – угол поворота сектора помех m-го пункта (угол считается от отрицательного направления оси абсцисс). Характеристиками пункта СПП являются угол γ и дальность ρ (будем считать, что характеристики всех пунктов одинаковые). Угол характеризует сектор, в котором пункт может обеспечить помеху заданного уровня, а дальность – максимальное удаление от пункта в пределах сектора, для которого также сохраняется заданный уровень излучаемой помехи. Считаем, что область постановки помехи – равнобедренный треугольник, одна из вершин которого совпадает с положением соответствующего пункта, координаты двух оставшихся вершин (рис. 2)

$$\{B_m\}_{m=1}^M = \{[x_m^s - \rho_\gamma \sin(\alpha_m + \gamma), y_m^s - \rho_\gamma \cos(\alpha_m + \gamma)]\}_{m=1}^M$$

$$\{C_m\}_{m=1}^M = \{[x_m^s - \rho_\gamma \sin(\alpha_m - \gamma), y_m^s - \rho_\gamma \cos(\alpha_m - \gamma)]\}_{m=1}^M, \ \rho_\gamma = \rho / \cos(\gamma)$$

Пусть $p = [x_p, y_p]$ – точка, $[a, b]$ – отрезок ($a = [x_a, y_a]$ и $b = [x_b, y_b]$), ABC – треугольник ($A = [x_A, y_A]$, $B = [x_B, y_B]$ и $C = [x_C, y_C]$). Тогда

$$d^{[1]}(p, ab) = \begin{cases} \sqrt{(x_a - x_p + (x_b - x_a)t)^2 + (y_a - y_p + (y_b - y_a)t)^2}, 0 < t < 1, \\ \sqrt{(x_a - x_p)^2 + (y_a - y_p)^2}, t \le 0, \\ \sqrt{(x_b - x_p)^2 + (y_b - y_p)^2}, t \ge 1 \end{cases}$$

– расстояние от точки p до отрезка $[a, b]$, где

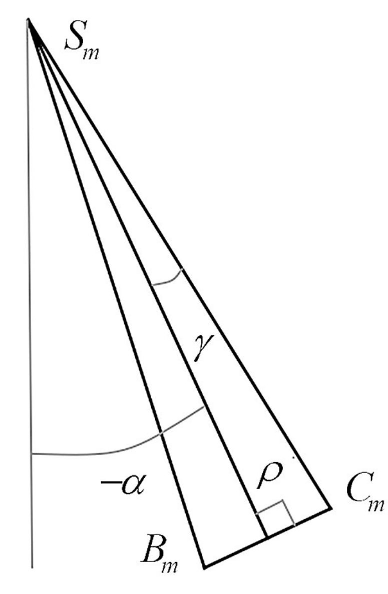


Рис. 2. Геометрическое представление зоны помех пункта СПП

$$t = \frac{(x_p - x_a)(x_b - x_a) + (y_p - y_a)(y_b - y_a)}{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2},$$

$$d^{\Delta}(p, ABC) = \begin{cases} \left\| -(d^{[\,]}(p, AB), d^{[\,]}(p, BC), d^{[\,]}(p, CA)) \right\|_{\infty}, S_{ABC} \neq S_{ABp} + S_{BCp} + S_{CAp}, \\ -\left\| -(d^{[\,]}(p, AB), d^{[\,]}(p, BC), d^{[\,]}(p, CA)) \right\|_{\infty}, S_{ABC} = S_{ABp} + S_{BCp} + S_{CAp} \end{cases}$$ – расстояние

от точки до треугольника, $\|\bullet\|_{\infty} = \max_i |x_i|$, S_{ABC}, S_{ABp}, S_{BCp}, S_{CAp} – площади соответствующих треугольников. Введенное расстояние от точки до треугольника – это минимальное расстояние до точек, лежащих на отрезках, которые образуют треугольник. Расстояние положительно для точек, лежащих вне треугольника, отрицательно для точек, лежащих внутри треугольника, и равно нулю для точек на его границе.

Применительно к нашей задаче условие $d^{\Delta}(P_n, S_m B_m C_m) \leq 0$ означает, что измерительный пункт P_n находится в зоне помех пункта S_m. Будем считать, что попадание в указанную область измерительного пункта с вероятностью 1 приводит к недостоверным измерениям. Пусть $\mathbf{K} = \{n : \exists m, d^{\Delta}(P_n, S_m B_m C_m) \leq 0\}$ – множество номеров измерительных пунктов, которые находятся внутри хотя бы одной зоны помех, следовательно, $|\mathbf{K}|$ – количество измерительных пунктов, находящихся в зоне помех, а $N - |\mathbf{K}|$ – количество рабочих измерительных пунктов. Задачу наблюдателя для случая фиксированной конфигурации противника можно записать следующим образом:

$$\begin{cases} J(u_p, u_s) = |N - \mathbf{K}| \to \max\limits_{u_p}, \\ |\mathbf{K}| < \lfloor N / 2 \rfloor + 1, \\ \forall i, j \in \overline{1, N} : \left\| P_i - P_j \right\| > B_{\min}, \\ \forall i, j, k \in \overline{1, N} : \dfrac{y_k^p - y_i^p}{y_j^p - y_i^p} \neq \dfrac{x_k^p - x_i^p}{x_j^p - x_i^p}, \end{cases} \tag{2.1}$$

где $u_p = [P_1 ... P_N]$, $u_s = [\alpha_1, S_1 ... \alpha_M, S_M]$, $\lfloor \bullet \rfloor$ – округление до целого в меньшую сторону, $\|\bullet\|$ – евклидова норма. Здесь выполнение условия $|\mathbf{K}| < \lfloor N / 2 \rfloor + 1$ обеспечивает необходимое для функционирования ТИС количество рабочих измерительных пунктов (более половины общего количества). Оставшиеся два ограничения — это требования к топологии ТИС: $B_{\min}$ – минимально допустимое расстояние между пунктами ТИС, никакие три измерительных пункта ТИС не должны лежать на одной прямой. Значение целевой функции $J(u_p, u_s)$ представляет собой количество рабочих измерительных пунктов. Наблюдатель максимизирует это количество с учетом указанных ограничений. Задача противника состоит в ее минимизации:

$$\begin{cases} J(u_p, u_s) = |N - \mathbf{K}| \to \min\limits_{u_s}, \\ |\mathbf{K}| \geq \lfloor N / 2 \rfloor + 1. \end{cases} \tag{2.2}$$

Здесь минимизация проводится по вектору u_s при фиксированном векторе u_p.

Параметров, по которым проводится минимизация, у противника больше (позиция пункта помех и угол поворота антенны), при этом есть всего одно ограничение. Условие $|\mathbf{K}| \geq \lfloor N / 2 \rfloor + 1$ требует, чтобы для значения, обеспечивающего минимум целевой функции, количество измерительных пунктов ТИС, которым поставлена помеха, превышало бы половину от общего их числа (только в этом случае ТИС становится неработоспособной).

Обобщенный алгоритм функционирования.

Движущийся измерительный пункт противника (ИПП) осуществляет радиолокационный мониторинг области расположения наблюдателя.

Наблюдатель при помощи ТИС решает задачу местоопределения ИПП и посредством пункта постановки помех препятствует проведению мониторинга своей области расположения.

Оператор ИПП сообщает о факте постановки помех в управляющий центр.

Управляющий центр противника, получив сообщение о факте постановки помех своему измерительному пункту, принимает решение о постановке помех ТИС наблюдателя.

Постановка помехи осуществляется из стационарного положения. Сектор постановки помехи изменяется путем поворота излучающей антенны без прерывания процесса постановки помехи.

Если текущая конфигурация СПП не позволила противнику возобновить решение задачи радиомониторинга, то необходимо изменить конфигурацию СПП и осуществить постановку помехи в соответствии с новой конфигурацией.

Наблюдатель при оценке местоположения измерительного пункта противника осуществляет обнаружение недостоверных измерений и получает информацию о том, какие пункты ТИС попали в зону действия СПП.

По результатам обнаружения недостоверных каналов и местоположения пунктов СПП наблюдатель принимает решение о перемещении пунктов ТИС из зоны помех.

Окончание игры.

Если более половины измерительных пунктов ТИС находятся в зоне помех и наблюдатель не имеет возможности изменить конфигурацию, либо не существует конфигурации ТИС, при которой в зоне помех находится менее половины пунктов.

Если менее половины измерительных пунктов находятся в зоне помех и противник либо не имеет возможности изменить конфигурацию, чтобы подавить более половины пунктов, либо такой конфигурации не существует.

Задача: произвести оценку времени функционирования ТИС и СПП. При решении задачи исходим из следующих предположений.

Известно количество пунктов ТИС N и значения параметра $B_{\min}$.

Известно количество пунктов СПП M и значения параметров ρ, γ.

Поскольку ТИС является системой пассивной радиолокации, то противнику не доступна оценка местоположения пунктов ТИС, а известен только район расположения.

Начальное положение пунктов помех наблюдателю не известно, но известен район их расположения.

Доступна оценка местоположения пунктов СПП при условии работоспособности ТИС.

При постановке помех более чем половине пунктов ТИС возникают проблемы с определением недостоверных пунктов. Будем считать, что по истечении некоторого времени t_d (штраф) наблюдатель обнаруживает факт неработоспособности ТИС (информация от внешних систем) без знания о том, какие конкретно каналы являются неработоспособными.

Определить эффективность применяемой конфигурации СПП можно только косвенно. В результате подавления более половины пунктов ТИС решение задачи местоопределения движущейся цели даст ложную цель. Наблюдатель прекратит воздействие на истинную цель, и по прекращению такого воздействия противник может судить об эффективности применяемой конфигурации. Значит, на определение эффективности конфигурации СПП нужно время t_e.

Пункты ТИС могут изменять свое местоположение посредством перемещения по линейной траектории с постоянной скоростью. В процессе движения решение задачи местоопределения ИПП отсутствует.

Пункты СПП могут изменять свое местоположение посредством перемещения по линейной траектории с постоянной скоростью. В процессе движения постановка помехи отсутствует.

Рассматриваем дискретный вариант задачи, где пункты ТИС и СПП располагаются в узлах $\mathbf{P}_l$ – сетки на $\mathbf{P}$ и узлах $\mathbf{S}_k$ – сетки на $\mathbf{S}$ соответственно.

Пусть N, M, $B_{\min}$, ρ, γ – фиксированные значения. Решение задачи можно разбить на этапы.

1. С учетом значения $B_{\min}$ формируем множество $\mathbf{G}$ допустимых расположений пунктов ТИС на всевозможных сочетаниях N позиций на сетке $\mathbf{P}_l$.

2. Формируем множество расположений помеховых средств (без учета угла поворота антенны). На базе полученного множества отбираем эффективные расположения пунктов $\mathbf{H}$. Критерием эффективности служит множество $\mathbf{G}^h \subset \mathbf{G}, h \in \mathbf{H}$. ТИС принадлежит множеству $\mathbf{G}^h$ в том случае, если его работоспособность может быть нарушена при расположении пунктов помех h путем реализации какой-либо комбинации поворота излучающих антенн. В процессе формирования множества эффективных конфигураций помеховых средств $\mathbf{H}$ происходит исключение таких конфигураций $h \in \mathbf{H}$, для которых $\exists g \in \mathbf{H}$: $\mathbf{G}^h \subset \mathbf{G}^g$. Отметим, что помеховую конфигурацию h, кроме множества $\mathbf{G}^h$, характеризует количество комбинаций $|\mathbf{A}|$ поворотов излучающих антенн, посредством реализации которых осуществляется подавление всех ТИС из $\mathbf{G}^h$, здесь $\mathbf{A}$ – множество эффективных комбинаций углов поворота антенн. Элементы

множества $\mathbf{H}$ обладают следующим свойством: $\forall h_1, h_2 \in \mathbf{H} : \mathbf{G}^{h_1} \Delta \mathbf{G}^{h_2} \neq \varnothing$, где Δ – симметрическая разность множеств.

3. Анализ полученных множеств $\mathbf{G}$ и $\mathbf{H}$. Возможны следующие условия.

3.1. Существует, по крайней мере, одно допустимое расположение пунктов ТИС, которое сохраняет работоспособность при любом расположении пунктов помех: $\exists g \in \mathbf{G}: \forall h \in \mathbf{H}, g \notin \mathbf{G}^h$ – конфигурация, устойчивая к помехам.

3.2. Существует, по крайней мере, одно расположение пунктов помех, для которого, путем реализации какой-либо комбинации поворота излучающих антенн, можно вывести из строя любую ТИС: $\exists h \in \mathbf{H} : \forall g \in \mathbf{G}, g \in \mathbf{G}^h$.

3.3. Условия подпунктов 3.1 и 3.2 не выполняются.

4. Нахождение решения задачи противоборства с учетом результатов анализа множеств $\mathbf{G}$ и $\mathbf{H}$.

При условии 3.1 у наблюдателя есть беспроигрышная стратегия. Выбрав такую конфигурацию, наблюдатель при любых помеховых конфигурациях сохраняет ее работоспособность, т.е. решает задачу местоопределения. Попадание какого-либо из пунктов ТИС в помеховую зону может несколько снизить точность местоопределения. При этом наблюдатель имеет возможность сменить позицию на более выгодную (при существовании нескольких конфигураций, устойчивых к помехам). В то же время для противника срыв решения задачи местоопределения предполагает подавление более половины пунктов ТИС. При использовании наблюдателем только устойчивых конфигураций такая ситуация невозможна. Противнику недоступны сведения о результативности той или иной помеховой конфигурации, т.е. он не может влиять даже на точность местоопределения наблюдателем. В данной ситуации противнику нет смысла начинать игру, поскольку он не сможет, даже временно, помешать решению задачи местоопределения наблюдателем. Решая данную задачу, наблюдатель делает невозможным проведение радиомониторинга противником. В условиях 3.2 противник, используя единственное расположение пунктов помех, может вывести из строя любую конфигурацию ТИС путем выбора комбинации поворота излучающих антенн. Учитывая малое время на реализацию поворота антенн по сравнению с перемещением пунктов в данной ситуации, наблюдателю нет смысла начинать игру, поскольку пункты ТИС большую часть времени будут перемещаться и не смогут обеспечивать противодействие проведению радиомониторинга противником. Значит, условия 3.1 и 3.2 позволяют путем проведения анализа параметров и количества средств противника и наблюдателя до начала игры ответить на вопрос: «Имеет ли смысл начинать игру при текущем составе средств?».

При условии 3.3 и противник, и наблюдатель для решения своих задач должны осуществлять перемещение пунктов, поскольку у наблюдателя не существует устойчивой к помехам конфигурации ТИС, а у противника нет такой конфигурации, которая может вывести из строя любую ТИС. Противник на основе множества эффективных конфигураций $\mathbf{H}$ ищет такие комбинации конфигураций (пары, тройки и т.д.), реализация которых позволяет вывести из строя любую ТИС из $\mathbf{G}$. Выбирает комбинацию, которая обеспечивает минимальное время перехода между конфигурациями. Применяет конфигурации из выбранной комбинации до нарушения работы ТИС. Наблюдатель перемещает пункты ТИС с целью обеспечения работоспособности. При перемещении пунктов ТИС или СПП, кроме расстояния между позициями, следует учитывать следующие параметры: время на приведение пункта ТИС из рабочего состояния в транспортное, т.е. подготовка к перемещению, скорость перемещения пункта ТИС, время на приведение пункта ТИС из транспортного состояния в рабочее, работоспособность обслуживающего персонала. Кривая работоспособности персонала пункта может выглядеть, как на рис. 3. Поскольку в составе одной ТИС/СПП могут использоваться различные пункты, то благодаря их характеристикам указанные выше значения могут существенно различаться. Кривая работоспособности учитывает квалификацию экипажа и влияние усталости на эффективность работы в зависимости от времени, затраченного на перемещение пункта. Время перемещения пункта p с позиции i в позицию j определяется по формуле $t_{p,i,j} = \rho_{i,j} v_p + (t_i + t_j) E_p(c_p)$, где $\rho_{i,j}$ – расстояние между пунктами, v_p – скорость перемещения пункта, t_i – время подготовки пункта к перемещению, t_j – время подготовки пункта к работе, $E_p(\bullet)$ – функция работоспособности экипажа пункта. Отметим, что наблюдатель решает задачу поиска новой ближайшей позиции ТИС, принадлежащей множеству безопасных конфигураций, с учетом характеристик каждого агента, исходя из критерия минимизации величины $t_{p,i,j}$. Для противника же не стоит задача поиска ближайшей позиции, поскольку он должен реализовать все конфигурации комбинации.

Последовательность действий при противоборстве представлена на рис. 4. Системы наблюдателя и противника могут пребывать в двух состояниях: система решает возложенные на нее задачи и работа системы нарушена. Пока противник осуществляет перемещение пунктов

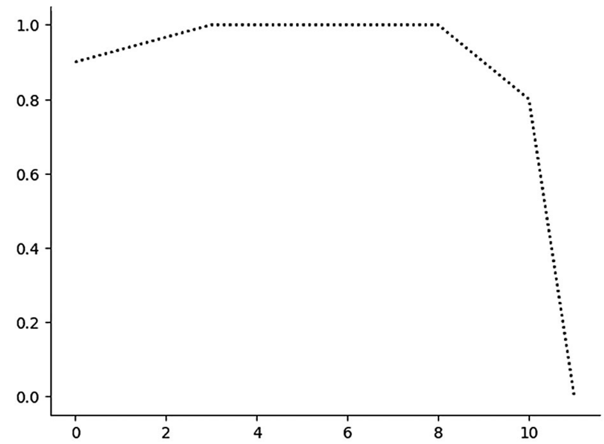


Рис. 3. Кривая работоспособности

и поворот антенн, система наблюдателя успешно противодействует решению задачи радиомониторинга. И наоборот, пока наблюдатель перемещает пункты или ТИС находится в неработоспособном состоянии, противник решает задачу радиомониторинга. Таким образом, при подсчете времени пребывания системы в каждом из состояний, кроме времени, требуемого на перемещения пунктов, нужно учитывать, что противнику требуется время на поворот антенн и определение эффективности реализованной конфигурации. Считаем, что время, затрачиваемое на реализацию конкретной комбинации углов поворота антенн, учтено во времени t_e. А наблюдатель при потере работоспособности ТИС ожидает штрафное время t_d и только после этого осуществляет перемещение.

3. Моделирование поиска размещения пунктов ТИС. Моделирование проводилось для ТИС из пяти измерительных пунктов. Начальное расположение пунктов представлено на рис.1, $r_C = 0.2$, $\tau = 0.1$. Использовались функции глобальной полезности (1.1) и (1.4) и рабочие области $\mathbf{S}_1 = \{[x, y] : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$ и $\mathbf{S}_2 = \{[x, y] : -1 \le x \le 2, -2 \le y \le 1\} - \{[x, y] : 0 \le x \le 1, -1 \le y \le 0\}$. Отметим, что для рабочей области $\mathbf{S}_1$ и функции глобальной полезности (1.1) начальное положение пунктов оказывает существенное влияние на итоговое решение, полученное алгоритмами A_1, A_2 и A_3. Например, начальное положение пунктов в верхней части области размещения приводит к решению, соответствующему локальному максимуму. Критерий, основанный на угле между пеленгами, на позициях, близких к рабочей области (верхняя часть области размещения), принимает значения, близкие к максимальным, а критерий, базирующийся на расстояниях между пунктами из текущего положения, не может компенсировать его влияние. При использовании рабочей области $\mathbf{S}_2$ применение алгоритмов A_1 и A_3 также не дает стабильного решения. В процессе перемещения возникают такие размещения пунктов, на которых функция глобальной полезности (1.1) имеет локальный максимум и на дальнейших итерациях ни один из пунктов не изменяет своего положения, поскольку любое перемещение уменьшает значение индивидуальной полезности (1.2). Следовательно, группа агентов достигает равновесного состояния, но достигнутое равновесие не всегда обеспечивает максимум функции глобальной полезности. Применение алгоритма A_2 для $\mathbf{S}_2$ позволяет получить стабильное решение, на котором функция полезности достигает глобального максимума. При этом алгоритму A_2 требуется 25 итераций на поиск решения, а итоговое размещение представлено на рис. 5. Отметим, что в итоговом решении пункты размещены на максимально возможном расстоянии друг от друга. Учитывая это наблюдение, рассмотрим вариант функции глобальной полезности (1.4). При использовании рабочей области $\mathbf{S}_1$ и функции глобальной полезности (1.4) алгоритмы A_1, A_3 также не обеспечивают стабильного решения, а применение алгоритма A_2 позволяет получить решение, на котором (1.4) достигает глобального максимума вне зависимости от начального положения пунктов. Использование алгоритма A_2 для рабочей области $\mathbf{S}_2$ с помощью функции (1.4) также обеспечивает решение, на котором полезность достигает глобального максимума. При этом алгоритму A_2 требуется 20 итераций на поиск решения. Траектории движения пунктов ТИС в процессе поиска решения представлены на рис. 6. Отметим, что достижение глобального максимума функций (1.1) и (1.4) на рабочей области $\mathbf{S}_2$ обеспечивается размещением, приведенным на рис. 5. Это же размещение является решением

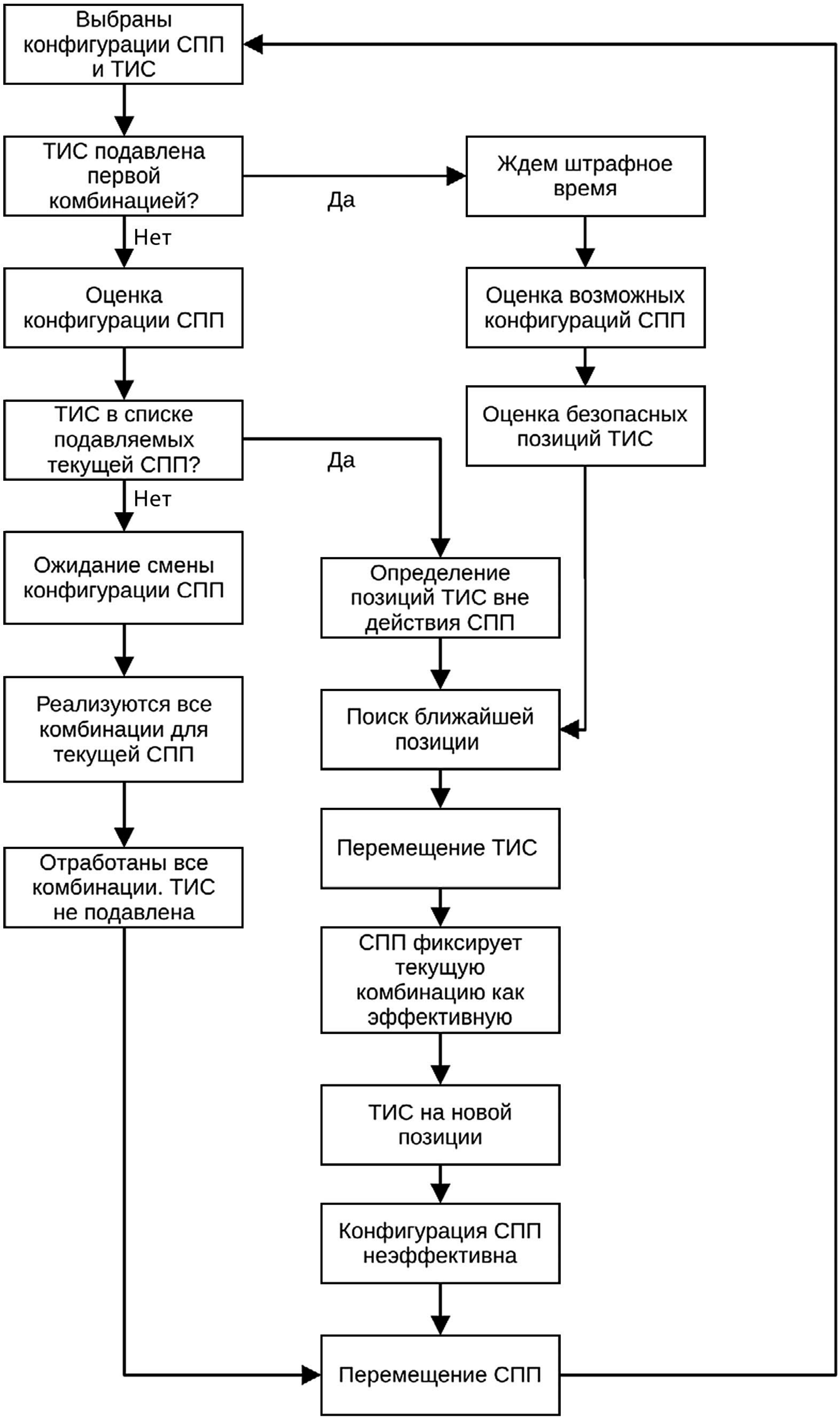


Рис. 4. Алгоритм противодействия

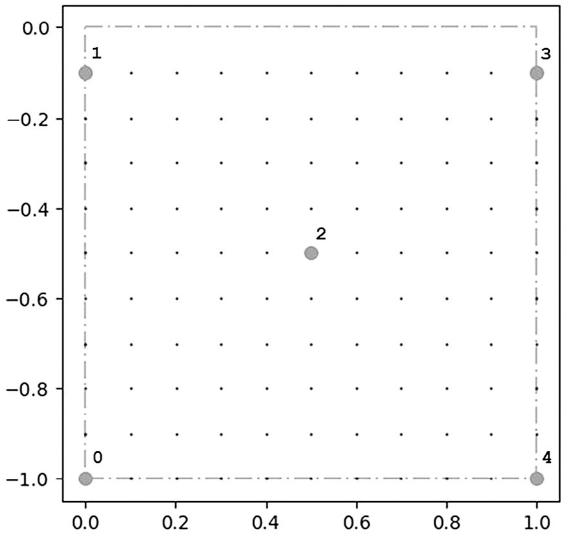


Рис. 5. Итоговое размещение пунктов ТИС

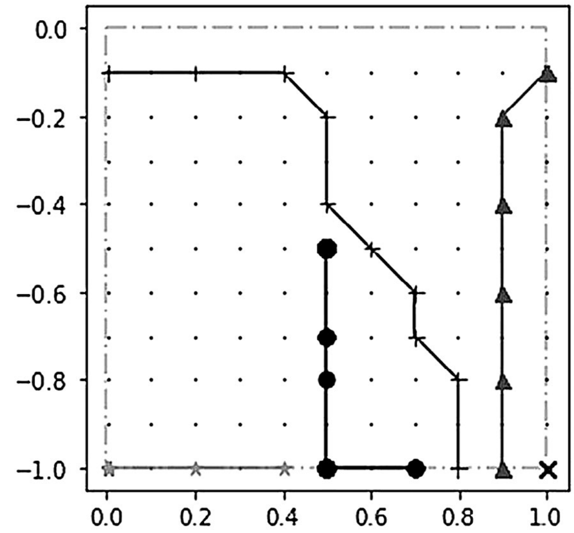


Рис. 6. Траектории движения пунктов ТИС для A_2, (1.4)

задачи с функцией полезности (1.4) и рабочей областью $\mathbf{S}_1$, а размещение, обеспечивающее достижение глобального максимума (1.1) для рабочей области $\mathbf{S}_1$, близко к вышеуказанному размещению (пункты 0 и 4 имеют ординату 0.9). Таким образом, решение, найденное алгоритмом A_2 при помощи функции (1.4) для рабочей области $\mathbf{S}_1$, может быть использовано в качестве начального приближения положения пунктов при решении задачи с функцией глобальной полезности (1.1).

4. Имитационное моделирование противоборства наблюдателя и противника. Рассмотрим ситуацию, когда ТИС наблюдателя состоит из пяти измерительных пунктов, а у противника – два пункта постановки помех. При этом $\rho = 1.0$, $\gamma = 12^\circ$, $B_{\min} = 0.5$, $\mathbf{P}_l$ и $\mathbf{S}_k$ содержат по 90 узлов, равномерно покрывающих области $\mathbf{P}$ и $\mathbf{S}$ соответственно. Диапазон углов поворота антенн при выбранном расположении областей $\mathbf{P}$ и $\mathbf{S}$ имеет вид $[-\pi/2 - \gamma, \pi/2 + \gamma]$. При моделировании используются значения углов в 20 узлах сетки, равномерно покрывающей указанный диапазон.

Множество $\mathbf{G}$ формируется с учетом $B_{\min}$ методом Монте-Карло. Случайным образом (равномерный закон распределения) осуществлялся выбор из всевозможных сочетаний N позиций на сетке $\mathbf{P}_l$ (общее количество C_{90}^5) измерительных позиций ТИС. Конфигурации, не удовлетворяющие условию $\forall i, j \in \overline{1,N}\ \left\| P_i - P_j \right\| > B_{\min}$, отсеивались. Для прошедших отсев ТИС вычислялись площади треугольников, образованных всевозможными тройками измерительных позиций: если $\exists i, j, k \in \overline{1,N} : S_{P_i P_j P_k} < S_{\min}$, то ТИС также отсеивается, где $S_{P_i P_j P_k}$ – площадь треугольника, образованного пунктами i, j, k, $S_{\min}$ – площадь равностороннего треугольника со стороной $B_{\min}$. В результате учета указанных ограничений на расположение измерительных пунктов ТИС отсев прошли 708 конфигураций. Формирование эффективных конфигураций помеховых средств происходит на основе полученного множества $\mathbf{G}$. Случайным образом (равномерный закон распределения) осуществляется выбор расположения помеховых средств из всевозможных сочетаний M позиций на сетке $\mathbf{S}_k$ (общее количество C_{90}^2). Для двух помеховых пунктов количество всевозможных комбинаций углов при выбран-

Таблица 1. Характеристики пунктов ТИС и СПП

Пункты	v_p, ед/ч	$(t_i + t_j)$	t_d	t_e
		ч		
ТИС 1-5	1.0	0.5	0.5	–
СПП 1,2	2.5	0.3	–	0.015

Таблица 2. Результаты моделирования

Номер набора конфигураций СПП	Среднее время работы, ч		Количество побед	
	СПП	ТИС	противника	наблюдателя
8	15.2	10.8	30	970
6	15.0	10.8	61	939
14	14.9	10.7	121	879
18	16.4	10.6	134	866
7	15.2	10.5	159	841
20	15.2	10.5	164	836
27	14.6	10.3	185	815
13	15.8	10.4	192	808
12	15.4	10.2	231	769
19	16.2	10.3	272	728
25	16.0	10.2	301	699
24	15.2	9.9	348	652
26	14.0	10.0	393	607
2	14.0	9.8	472	528
1	12.2	10.5	502	498
10	12.9	9.7	551	449
16	13.0	9.6	561	439
22	13.4	9.6	567	433
11	12.2	10.0	587	413
4	12.5	9.9	606	394
17	12.3	9.9	613	387
5	12.1	10.0	619	381
23	12.5	10.2	632	368
21	13.1	9.5	664	336
9	12.8	9.4	677	323
3	12.1	9.9	682	318
15	12.8	9.4	699	301

ной сетке равно 400. Комбинации обладают различной эффективностью, поэтому множество всевозможных комбинаций углов поворота также подвергается процедуре фильтрации. Отсеиваются комбинации, реализация которых не позволяет нарушить работоспособность какой-либо ТИС множества $\mathbf{G}$, а также дублирующие (в смысле множества подавляемых ТИС). Таким образом, в зависимости от расположения пунктов подавления относительно области $\mathbf{P}$ количество эффективных комбинаций $\mathbf{A}$ будет различным. Если $\exists g \in \mathbf{H} : \mathbf{G}^h = \mathbf{G}^g$, то из множества $\mathbf{H}$ исключается та конфигурация, для которой величина параметра $|\mathbf{A}|$ больше. Полученное множество $\mathbf{H}$ состоит из 183 конфигураций таких, что $\forall h_1, h_2 \in \mathbf{H} : \mathbf{G}^{h_1} \Delta \mathbf{G}^{h_2} \neq \varnothing$, где Δ – симметрическая разность множеств. Значит, множества подавляемых ТИС каждой конфигурации содержат не менее одной ТИС, которые нельзя подавить, используя другие конфигурации. Отметим, что при выбранных значениях параметров реализована ситуация из условия 3.3, т.е. варианты $\exists g \in \mathbf{G} : \forall h \in \mathbf{H}, g \notin \mathbf{G}^h$ и $\exists h \in \mathbf{H} : \forall g \in \mathbf{G}, g \in \mathbf{G}^h$ не выполняются. Анализ различных комбинаций применения эффективных конфигураций выявил, что при текущей ситуации для подавления любой ТИС из $\mathbf{G}$ нужно использовать не менее трех эффективных конфигураций. На основе 183 эффективных конфигураций средств подавления получены 35 таких троек. Противник, последовательно применяя конфигурации из указанных наборов, может вывести из строя любую ТИС из множества $\mathbf{G}$. Понятно, что эти наборы конфигураций СПП осуществляют подавление конфигураций ТИС последовательно и смена наблюдателем конфигураций ТИС может помешать этому. Для ответа на вопросы «в течение какого времени система наблюдателя препятствует проведению радиомониторинга противником?» и «в течение какого времени система наблюдателя не выполняет свои функции?» проводилось имитационное моделирование. Характеристики пунктов ТИС и СПП представлены в табл. 1, а кривые работоспособности идентичны для всех экипажей и приведены на рис. 3.

Имитационное моделирование проводилось следующим образом: для выбранного набора эффективных конфигураций случайным образом выбирается текущая конфигурация, для нее также случайно выбирается комбинация углов поворота антенн. Из множества допустимых конфигураций ТИС случайным образом выбирается текущая конфигурация. Выполняется шаг алгоритма противодействия (рис. 4) до тех пор, пока у пунктов ТИС и СПП есть возможность перемещаться. В процессе решения алгоритма ведется подсчет времени успешной работы систем противника и наблюдателя. Если в результате выполнения шагов алгоритма есть необходимость в перемещении пунктов ТИС/СПП, а соответствующие пункты не могут осуществить перемещение, то фиксируем победу противника/наблюдателя. Проводится 1000 повторений вышеприведенного эксперимента. Результаты моделирования показывают, что при заданных характеристиках пунктов и экипажей ряд наборов конфигураций СПП позволяет противнику в лучшем случае одерживать победу в 5–6% случаев и в среднем проводить радиомониторинг области размещения наблюдателя около 8–9 ч, но итоговая победа в большинстве случаев остается за наблюдателем.

Увеличив угол до $\gamma = 15^\circ$ и оставив прочие характеристики без изменений, получим, что на множестве $\mathbf{H}$ (200 эффективных конфигураций) существует 27 наборов по две конфигурации, позволяющие подавить любую ТИС из множества $\mathbf{G}$. Результаты моделирования представлены в табл. 2. Следовательно противник может выбрать ряд наборов, использование которых позволяет одерживать победу в 50–70% случаев, при этом даже в результате проигрыша среднее время работы СПП увеличилось с 8–9 до 14–15 ч.

Если наряду с $\gamma = 15^\circ$ увеличить дальность действия пунктов СПП до значения $\rho = 1.1$, то мы попадаем в ситуацию условия 3.2, где у противника существуют такие эффективные конфигурации, которые способны подавить любую ТИС из множества $\mathbf{G}$ без перемещения пунктов. Одна из таких конфигураций осуществляет подавление, используя 25 угловых комбинаций. С учетом принятого значения $t_e = 0.015$ подавление любой ТИС произойдет максимум в течение 22.5 мин. У наблюдателя при этом нет безопасных позиций, куда он мог бы заблаговременно переместить измерительные пункты.

Заключение. Проведенное моделирование показывает, что предложенный теоретико-игровой подход позволяет находить оптимальное (в смысле указанных критериев) размещение пунктов ТИС. Метод позволяет агентам действовать в соответствии с особенностями окружающей обстановки и принимает во внимание их возможности по перемещению. При этом информационное взаимодействие агентов обеспечивает желаемое состояние всей группы. Имитационное моделирование решения задачи противоборства наблюдателя и противника показывает, что предложенный подход позволяет оценить время работы и вероятность победы наблюдателя (противника) или указать на недостаточность средств для осуществления противодействия. Указанная оценка доступна и в случае различных технических характеристик пунктов и/или уровней подготовки экипажей, а также учитывает работоспособность экипажей ТИС/СПП.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мельников Ю.П., Попов С.В.* Радиотехническая разведка. Методы оценки эффективности местоопределения источников излучения. М.: Радиотехника, 2008.
2. *Сытенький В.Д.* Пассивная локация на основе амплитудных измерений // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 2011. № 1. С. 69–75.
3. *Колесса А.Е.* Оценивание координат совокупности объектов, наблюдаемых многопозиционной системой пеленгаторов // РЭ. 1987. Т.32. № 12. С. 2534–2540.
4. *Булычев Ю.Г., Бурлай И.В.* Пеленгация в условиях априорной неопределенности // Изв. РАН. ТиСУ. 2002. № 5. С. 46–51.
5. *Радзиевский А.Г., Сирота А.А.* Информационное обеспечение радиоэлектронных систем в условиях конфликта. М.: ИПРЖР, 2001.
6. *Смирнов Ю.А.* Радиотехническая разведка. М.: Воениздат, 2001.
7. *Amelin K, Miller A.* An Algorithm for Refinement of the Position of a Light UAV on the Basis of Kalman Filtering of Bearing Measurements // J. Communications Technology and Electronics. 2014. V. 59. No. 6. P. 622–631.
8. *Miller A.* Development of the Motion Control on the Basis of Kalman Filtering of Bearing-only Measurements // Automation and Remote Control. 2015. V. 76. No. 6. P. 1018–1035.

9. *Miller A., Miller B.* Stochastic Control of Light UAV at Landing with the Aid of Bearing-only Observations // Proc. SPIE. Eight Intern. Conf. on Machine Vision (ICMV 2015). Barcelona 2015. V. 9875, 987529. P. 1–10. Doi: 10.1117/12.2228544A.
10. *Karpenko S., Konovalenko I., Miller A., Miller B., Nikolaev D.* UAV Control on the Basis of 3D Landmark Bearing-Only Observations // Sensors. 2015. Iss. 15(12). P. 29802–29820. Doi: 10.3390/s151229768
11. *Karpenko S., Konovalenko I., Miller A., Miller B., Nikolaev D.* Visual Navigation of the UAVs on the Basis of 3D Natural Landmarks // Proc. SPIE. Eight Intern. Conf. on Machine Vision (ICMV 2015). Barcelona 2015. V. 9875. 98751I. P. 1–10. Doi: 10.111712.2228793.
12. *Кондратьев В.С., Котов А.Ф., Марков Л.Н.* Многопозиционные радиотехнические системы. М.: Радио и связь, 1986.
13. *Булычев Ю.Г., Головской В.А.* Обработка измерений угломерных систем в условиях априорной неопределенности в регуляризированной постановке // РЭ. 2010. Т. 55. № 1. С. 71–77.
14. *Булычев Ю.Г., Чепель Е.Н.* Мультиструктурный метод триангуляционного оценивания параметров движения излучающей цели в условиях априорной неопределенности // Изв. РАН. ТиСУ. 2019. № 6. С. 26–42.
15. *Булычев Ю.Г., Чепель Е.Н.* Оптимизация кластерно-вариационного метода построения многопозиционной пеленгационной системы для условий априорной неопределенности // АиТ. 2023. № 4. С. 96–114.
16. *Bar-Shalom Y., Rong Li X., Kirubarajan T.* Estimation with Applications to Tracking and Navigation: Theory, Algorithms and Software. N.Y.: John Wiley &Sons, 2004. https://doi.org/10.1002/0471221279.
17. *Lin X., Kirubarajan T., Bar-Shalom Y., Maskell S.* Comparison of EKF, Pseudo-measurement and Particle Filters for a Fearing-only Target Tracking Problem // SPIE Proceedings. 2002. V. 4728. P. 240–250. https://doi.org/10.1117/12.478508.
18. *Черняк В.С.* Многопозиционная радиолокация. М.: Радио и связь, 1993.
19. *Булычев Ю.Г., Булычев В.Ю., Ивакина С.С. и др.* Обоснование методов оптимального оценивания параметров движения цели в триангуляционной измерительной системе // Изв. РАН. ТиСУ. 2015. № 4. С. 94–110.
20. Теоретические основы радиолокации / Под ред. Я.Д. Ширмана. М.: Сов. радио, 1970.
21. *Pei Li, Haibin Duan*. A Potential Game Approach to Multiple UAV Cooperative Search and Surveillance // Aerospace Science and Technology. 2017. V. 68. September.
22. *G. Arslan, J.R. Marden, J.S. Shamma*. Autonomous Vehicle–target Assignment: a Game-theoretical Formulation // J. Dyn. Syst. Meas. Control 2007. V. 129 P. 584–596.
23. *J. R. Marden and J. S. Shamma*. Revisiting Log-linear Learning: Asynchrony, Completeness and Payoff-based Implementation // 48th Annual Allerton Conf. on Communication, Control, and Computing (Allerton). Monticello, IL, USA, 2010. P. 1171–1172.
24. *L. Blume*. The Statistical Mechanics of Strategic Interaction // Games and Economic Behavior. 1993. V. 5. P. 387–424.

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

УДК 531.53

О ДИАГРАММАХ ФУНКЦИЙ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ В ЗАДАЧЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ПЛАТФОРМЫ С ОСЦИЛЛЯТОРАМИ

© 2024 г. О. Р. Каюмов[a], *

[a]Филиал ОмГПУ, г. Тара, Россия

**e-mail: Oleg_Kayumov@mail.ru*

Поступила в редакцию 04.10.2023 г.
После доработки 10.12.2023 г.
Принята к печати 29.01.2024 г.

Рассматривается задача оптимального по быстродействию перемещения твердого тела, движущегося поступательно вдоль горизонтальной прямой и несущего n линейных осцилляторов. Единственная управляющая сила приложена к платформе и ограничена по модулю, трение отсутствует. Система переводится из состояния покоя на заданное расстояние с гашением колебаний. Исследуется эволюция функций оптимального управления в зависимости от дальности перемещения. Предлагается общий подход к построению наглядной диаграммы, отражающей такую эволюцию. Для этого используется геометрическая интерпретация необходимых условий оптимальности как свойств вспомогательной «контрольной» кривой в n-мерном пространстве. Приведены численные примеры построения диаграмм функций оптимального управления платформой с тремя осцилляторами.

Ключевые слова: диаграммы функций оптимального управления, платформа с осцилляторами

DOI: 10.31857/S0002338824020079, **EDN:** VOJEHR

ON THE OPTIMAL CONTROL FUNCTION DIAGRAMS IN THE PROBLEM OF THE MOVEMENT OF A PLATFORM WITH OSCILLATORS

O. R. Kayumov[a], *

[a]Branch of Omsk State Pedagogical University, Tara, Omsk Oblast, 646535 Russia

**e-mail: Oleg_Kayumov@mail.ru*

We consider the problem of the time-optimal movement of a rigid body moving translationally along a horizontal straight line and carrying n-linear oscillators. The only control force is applied to the platform and is limited in magnitude, there is no friction. The system is transferred from a state of rest to a specified distance with vibration damping. The evolution of optimal control functions depending on the distance of movement is investigated. A general approach to constructing a visual diagram reflecting such evolution is proposed. To do this, a geometric interpretation of the necessary optimality conditions is used as properties of an auxiliary "control" curve in n-dimensional space. Numerical examples of constructing diagrams of optimal control functions for a platform with three oscillators are given.

Keywords: Optimal Control Function Diagrams, Platform with Oscillators

Введение. Рассматривается система, состоящая из несущего твердого тела и прикрепленных к нему n линейных пружин с материальными точками на концах (рис. 1). Пружины параллельны горизонтальной оси, вдоль которой платформа движется поступательно. К ней приложена единственная управляющая сила, ограниченная по модулю наперед заданной величиной. Такая модель может приближенно описывать малые перемещения платформы с упругими звеньями или сосуда, частично заполненного жидкостью. Постановки задач управления подобными объектами сформулированы в [1], где с помощью принципа максимума Понтрягина [2] была решена задача наибыстрейшего перемещения платформы с одним осциллятором. Оптимальное управление оказалось кусочно-постоянным с тремя переключе-

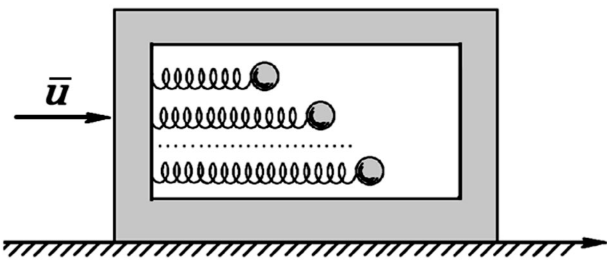


Рис. 1. Модель платформы с осцилляторами

ниями [1, 3]. В общем случае (для платформы с n осцилляторами) задача до сих пор не была решена. Управляемость такой системы гарантирована, если частоты собственных колебаний осцилляторов попарно различны [1, 4]. Несмотря на линейность системы, управление при дефиците внешних воздействий представляет известную сложность. Задачи перемещения таких объектов с гашением колебаний за конечное время в последнее время рассматривались в [5–7]. Были построены алгоритмы, достигающие цели при действии неизвестных возмущений и при неизмеряемых состояниях осцилляторов [8, 9]. В работе [10] предложен закон управления, переводящего платформу с n осцилляторами за конечное время в требуемое состояние покоя при неполной информации о состоянии и возмущениях, причем для некоторого типа начальных состояний найдена асимптотика времени движения в зависимости от числа n.

В задаче оптимального по быстродействию перемещения платформы с n осцилляторами из одного состояния равновесия в другое, когда трение отсутствует, а фазовое состояние системы в каждый момент измеримо, удается использовать симметрию краевых условий. На этой основе функция оптимального управления была выражена через значения первых n моментов переключения, предварительно определяемых из системы нелинейных уравнений [11]. Для случая $n = 2$ оптимальные режимы иллюстрировались на фазовой плоскости одного из осцилляторов [11], а также путем построения наглядного изображения, названного диаграммой функций оптимального управления [12]. Алгоритм построения диаграммы опирался на свойства вспомогательной «контрольной» кривой, геометрически отразившие решения сопряженной системы из принципа максимума Понтрягина. В настоящей работе этот подход обобщается на случай n осцилляторов с учетом того, что для малых перемещений платформы оптимальное управление на полутраектории имеет не более n переключений [13].

1. Постановка задачи и ее свойства симметрии. Повторяя использованные в [11] преобразования координат и времени, приведем уравнения движения системы (рис. 1) к форме с безразмерными переменными и временем:

$$\ddot{x}_0 = u, \qquad \ddot{x}_i + \omega_i^2 x_i = u, \quad i = \overline{1,n}, \quad |u| \le 1, \tag{1.1}$$

где u – управляющая сила, а значения частот пронумерованы в порядке возрастания ($1 = \omega_1 < \omega_2 < \ldots < \omega_n$). Переменные под знаками производных являются линейными комбинациями координат платформы и осцилляторов, причем одновременное обращение в нуль значений x_i, $i = \overline{1,n}$, соответствует ненапряженным состояниям пружин, а положение несущего тела характеризуется переменной x_0. Если ее значение при требуемом перемещении платформы меняется на величину $2b$, то в середине этого отрезка назначим начало отсчета координаты x_0. Аналогичную «удвоенную» запись введем и для искомого общего времени $2T$ движения системы, что придаст краевым условиям симметричный вид.

Задача оптимального по быстродействию перемещения платформы с n осцилляторами формулируется следующим образом: требуется определить управление $u(t)$, $t \in [0, 2T]$, переводящее систему (1.1) из состояния

$$x_0(0) = -b, \quad x_i(0) = \dot{x}_i(0) = 0, \quad i = \overline{1,n}, \tag{1.2}$$

за наименьшее время $2T$ (заранее неизвестное) в состояние

$$x_0(2T) = b. \quad x_i(2T) = \dot{x}_i(2T) = 0. \quad i = \overline{1,n}. \tag{1.3}$$

Поставленную задачу быстродействия будем рассматривать для взаимной вариационной задачи на максимум дальности $2b$ при заданном времени $2T$ (ввиду их монотонной взаимозависимости). Обобщая результаты [12], исследуем также эволюцию функций оптимального управления $u(t)$, $t \in [0, 2T]$, с изменением значения T.

На основе принципа максимума Понтрягина было показано [11], что в задаче оптимального быстродействия (1.1) – (1.3) в смещенном времени $\tilde{t} = t - T$, $\tilde{t} \in [-T, T]$, оптимальное управление $u(\tilde{t})$, а также все решения $x_i(\tilde{t})$, $i = \overline{0,n}$ будут нечетными функциями, а $\dot{x}_i(\tilde{t})$, $i = \overline{0,n}$ – четными функциями. Поэтому в конце оптимальной полутраектории выполняются соотношения

$$u(T) = x_i(T) = 0, \qquad i = \overline{0,n}. \tag{1.4}$$

Особые управления здесь невозможны в силу линейной независимости известных решений сопряженной системы из принципа максимума. В результате оптимальное управление будет кусочно-постоянным с нечетным числом переключений.

2. Необходимые условия оптимальности и их геометрическая интерпретация. Если моменту времени T предшествуют j моментов времени переключения управления τ_1, τ_2, ..., τ_j, то через них (путем интегрирования дифференциальных уравнений (1.1)) в конце полутраектории можно выразить значения $x_i(T)$, $i = \overline{1,n}$ [11]. Они равны нулю, согласно соотношениям (1.4), поэтому в обозначениях

$$\gamma_k = T - \tau_k, \qquad k = \overline{1,j}, \tag{2.1}$$

получается система из n нелинейных уравнений:

$$(-1)^j - \cos\omega_i T + 2\sum_{k=1}^{j} (-1)^{k+1} \cos\omega_i \gamma_k = 0, \quad i = \overline{1,n}. \tag{2.2}$$

Дальнейшие рассуждения будут основаны на эволюции корней γ_k, $k = \overline{1,j}$ системы (2.2) при изменении значений T. Каждой длительности T полутраектории соответствует свое количество j моментов переключения управления, заранее неизвестное, и свое множество корней, удовлетворяющее при этом неравенству

$$T > \gamma_1 > \gamma_2 > ... > \gamma_j > 0. \tag{2.3}$$

Если в системе (1.1) все числа ω_i, $i = \overline{1,n}$ – рациональные, то в задаче оптимального быстродействия (1.1) – (1.3) имеют место следующие свойства [11].

Замечание 1. Существует оптимальное движение с одним переключением управления при $T = T_*$, где $T_* = 2n_*\pi$, n_* – общий знаменатель всех несократимых дробей ω_i, $i = \overline{1,n}$.

Замечание 2. Если управление с моментами переключения τ_1, τ_2, ..., τ_j, T удовлетворяет краевым условиям (2.2), то им также удовлетворит:

1) управление с моментами переключения $\tau_1 + T_*,\ \tau_2 + T_*,\ ...,\ \tau_j + T_*,\ T + T_*$;

2) управление с моментами переключения $\tau_1 + \Delta,\ \tau_2 + \Delta,\ ...,\ \tau_{j-1} + \Delta,\ T + \Delta$ (при условии $\Delta = T_* - 2T > 0$).

Замечания 1, 2 дают возможность описать все сценарии оптимального поведения системы, периодически повторяющиеся с ростом параметра T. Если хотя бы одно из значений ω_i, $i = \overline{1,n}$ иррационально, то в системе (2.2) не будет общего периода T_* всех функций, поэтому с ростом длительности T количество разных типов оптимального движения будет бесконечным, не поддающимся завершенному описанию.

На основе принципа максимума Понтрягина доказано утверждение [11], которое в терминах γ_k, $k = \overline{1,j}$ можно сформулировать следующим образом.

Утверждение 1. Если в задаче (1.1)–(1.3) полутраектория оптимальна по быстродействию и реализуется кусочно-постоянным управлением с n переключениями на промежутке $t \in [0,T)$ в моменты времени $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_n$, то управляющая функция имеет вид

$$u = \operatorname{sign}\left(\xi \det Q_{n+1}(t)\right),\ Q_{n+1} = \begin{Vmatrix} T-t & \gamma_1 & \gamma_2 & \dots & \gamma_n \\ \sin\omega_1(T-t) & \sin\omega_1\gamma_1 & \sin\omega_1\gamma_2 & \dots & \sin\omega_1\gamma_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sin\omega_n(T-t) & \sin\omega_n\gamma_1 & \sin\omega_n\gamma_2 & \dots & \sin\omega_n\gamma_n \end{Vmatrix}, \tag{2.4}$$

знак константы ξ определяется известным (по условию) значением управления $u(t)$ при $t \in [0, \tau_1)$.

Для каждой заданной длительности полутраектории T сначала нужно найти из системы (2.2) предполагаемый набор значений моментов переключения. Затем нужно проверить его на соответствие необходимым условиям оптимальности, применяя утверждение 1: если при действии управления (2.3) возникнут другие моменты переключения, кроме ожидаемых τ_1, τ_2, ..., τ_n, то это расписание не оптимально. В случае, когда найденное из системы (2.2) количество переключений превосходит n, т.е. $j > n$, то для них условие остается прежним [11]: все эти j значений должны автоматически проявиться при действии управления (2.4). Если же у системы (2.2) количество корней $j < n$, то в формуле для управляющей функции (2.4) вместо определителя Q_{n+1} берется лишь его левый верхний минор размерами $(j+1)\times(j+1)$ [11].

Геометрический смысл таких необходимых условий оптимальности можно иллюстрировать с помощью линии в n-мерном пространстве, названной в [12] контрольной кривой. Для этого заметим, что равенство нулю определителя Q_{n+1} равносильно условию

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \psi(\omega_1(T-t)) & \psi(\omega_1\gamma_1) & \dots & \psi(\omega_1\gamma_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \psi(\omega_n(T-t)) & \psi(\omega_n\gamma_1) & \dots & \psi(\omega_n\gamma_n) \end{Vmatrix} = 0, \tag{2.5}$$

где введена вспомогательная функция

$$\psi(\rho) = \frac{\sin\rho}{\rho}, \tag{2.6}$$

доопределенная значением $\psi(0) = 1$. Согласно утверждению 1, условие (2.4) должно выполняться лишь при $T - t = \gamma_k$, $k = \overline{1,n}$, т.е. лишь когда первый столбец определителя численно совпадет с одним из n последующих. Эти n столбцов представим как векторы $\overline{OB_k}$, отложенные от начала O в аффинном пространстве с координатами $(y_0, y_1, \dots, y_n)^{\mathrm{T}}$ и порождающие гиперплоскость. Ее пересечение с гиперплоскостью $y_0 = 1$ даст $(n-1)$-мерную плоскость, содержащую все точки B_k (ввиду одинаковости их первой координаты). Поэтому множество векторов $\overline{OB_k}$, $k = \overline{1,n}$ можно однозначно спроецировать на подпространство с координатами $(y_1, \dots, y_n)^{\mathrm{T}}$, получая лежащие в нем векторы $\overline{OA_k} = (\psi(\omega_1\gamma_k), \dots, \psi(\omega_n\gamma_k))^{\mathrm{T}}$, $k = \overline{1,n}$. Тогда окажется, что все точки A_k принадлежат общей кривой, задаваемой в n-мерном пространстве вектор-функцией

$$r = (\psi(\omega_1\rho), \dots, \psi(\omega_n\rho))^{\mathrm{T}}, \quad \rho \in [0, T]. \tag{2.7}$$

Линию (2.7) назовем *контрольной кривой*. Ее форма зависит от сочетания значений ω_i, $i = \overline{1,n}$, но всегда линия начинается в точке $K_0(1,1,\dots,1)$ при $\rho = 0$ и проходит через точку $O(0,0,\dots,0)$ при $\rho = T_*/2$ (если $T_*/2 < T$). Ее актуальный участок завершается в точке W с параметром $\rho = T$ и содержит точки A_k, $k = \overline{1,n}$, расположенные последовательно соответственно значениям их параметров (2.3). В смещенном времени $\tilde{t} \in [-T, T]$ можно следить за движением по контрольной кривой изображающей точки, которая дважды пройдет дугу WK_0 (из конца W в начало K_0 и обратно). При этом определитель Q_{n+1} будет каждый раз менять знак при прохождении через пункты A_k, т.е. в точках пересечения контрольной кривой с гиперплоскостью $A_1A_2\dots A_n$. Геометрический смысл необходимого условия оптимальности заключается в том, что контрольная кривая не должна иметь с гиперплоскостью $A_1A_2\dots A_n$ других точек пересечения, кроме тех, чьим параметрам γ_k, $k = \overline{1,j}$ соответствуют запланированные моменты τ_1, τ_2, ..., τ_j переключений.

Например, при $n = 2$ (случай платформы с двумя осцилляторами) контрольная кривая лежит в двумерной плоскости. На рис. 2 дано ее изображение для значений $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 3$, а на рис. 3 – для значений $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 7$.

Для платформы с тремя осцилляторами ($n = 3$) контрольная кривая лежит в трехмерном пространстве (y_1, y_2, y_3). На рис. 4 показан случай $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 3$, $\omega_3 = 7$ (пунктиром отмечены фрагменты кривой, лежащие ниже горизонтальной плоскости (y_1, y_2)). Проекции этой линии на плоскости (y_1, y_2) и (y_1, y_3) выглядят, как на рис. 2 и рис. 3.

Заметим, что на рис. 2 начальный участок кривой (от K_0 до первой точки перегиба) вогнутый, т.е. может содержать только две коллинеарные точки A_1 и A_2, но не может содержать третьей. Поэтому здесь прямая A_1A_2 – это «гиперплоскость», не имеющая с актуальным

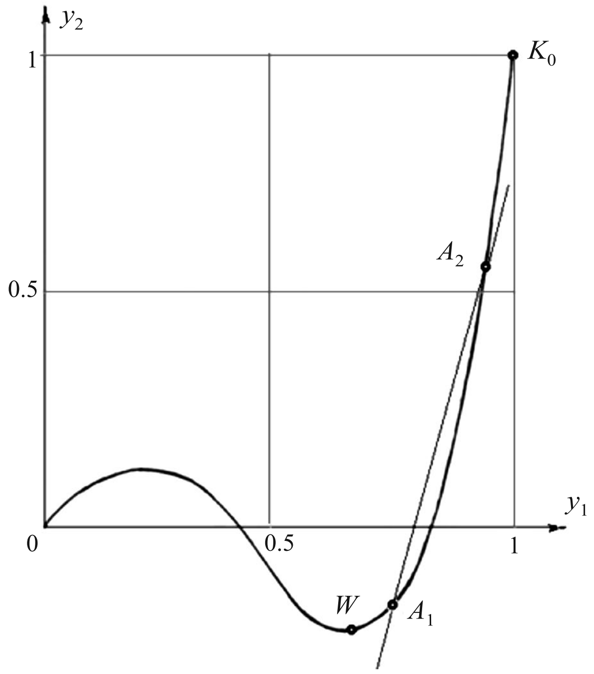


Рис. 2. Контрольная кривая в случае $n = 2$ при $\omega_2 / \omega_1 = 3$

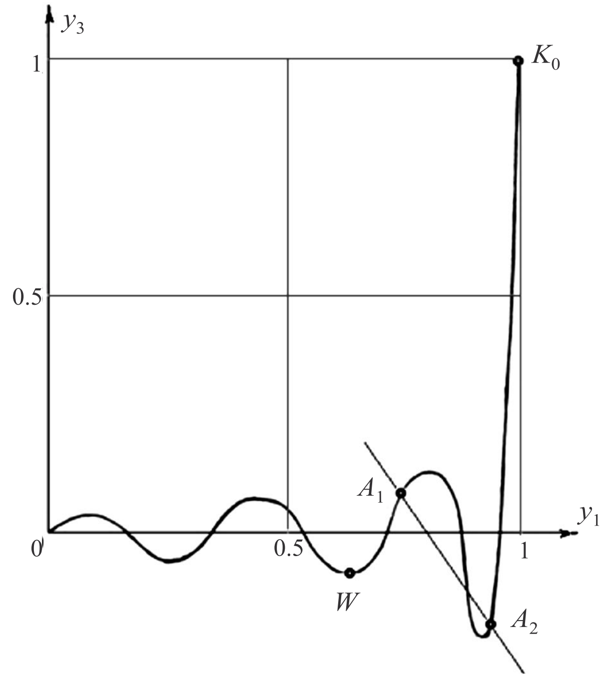


Рис. 3. Контрольная кривая в случае $n = 2$ при $\omega_2 / \omega_1 = 7$

участком контрольной кривой других пересечений, кроме A_1 и A_2. Отсюда следует, что для достаточно малых значений T (не превышающих параметр точки перегиба) оптимальное управление имеет не более двух моментов переключения на полутраектории. Аналогично можно показать, что при $n = 3$ начальный участок контрольной кривой не может содержать более трех компланарных точек, т.е. на малом промежутке T оптимальное управление платформой с тремя осцилляторами будет иметь не более трех переключений. Эта закономерность доказана [13] в виде следующего утверждения.

Утверждение 2. В задаче (1.1)–(1.3) существует такое значение T_0, что для всех $T \in (0, T_0]$ функции $u(t)$, $t \in [0, T)$, удовлетворяющие необходимым условиям оптимальности, будут иметь не более n моментов времени переключения.

Доказательство сводилось к обоснованию того, что на достаточно малом участке WK_0 контрольной кривой (2.7) любые $(n+1)$ ее точек A_k, $k = \overline{1, n+1}$ не могут принадлежать общей гиперплоскости, т.е. вектор $\overline{A_1 A_{n+1}}$ не сможет принадлежать подпространству, порождаемому векторами $\overline{A_1 A_i}$, $i = \overline{2, n}$. Построенный на этих векторах определитель будет положительным [13], по крайней мере, при условии

$$T_0 = \sigma\pi / \omega_n. \qquad \sigma = 0.597670. \tag{2.8}$$

Такая оценка является весьма грубой и обусловлена стилем доказательства (путем разложения элементов определителя в ряды Маклорена). На рис. 2 (где $n = 2$, $\omega_n = 3$) точка W имеет параметр $T = \pi / 2$. Другими словами, для платформы с двумя осцилляторами при $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 3$, в диапазоне $T < \pi / 2$ оптимальным полутраекториям соответствуют ровно два момента переключения управления.

Далее для описания эволюции функций оптимального управления $u(t)$, $t \in [0, 2T]$, с изменением параметра T будем применять наглядное изображение, предложенное в [12] и названное диаграммой функций оптимального управления.

Например, на рис. 5 показана диаграмма для случая $n = 2$, $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 3$. Вверх по оси симметрии отложена ось T. Каждое горизонтальное сечение диаграммы, прочитываемое слева-направо, символизирует одну кусочно-постоянную функцию оптимального управления $u(\tilde{t})$, $\tilde{t} \in [-T, T]$. Серым отрезкам горизонтали соответствуют промежутки времени, где $u = 1$, а белым отрезкам – где $u = -1$. Например, сечение EJ задает при $T = \pi / 2$ функцию оптимального управления с пятью переключениями. Участок EF кодирует график $u(t)$ для

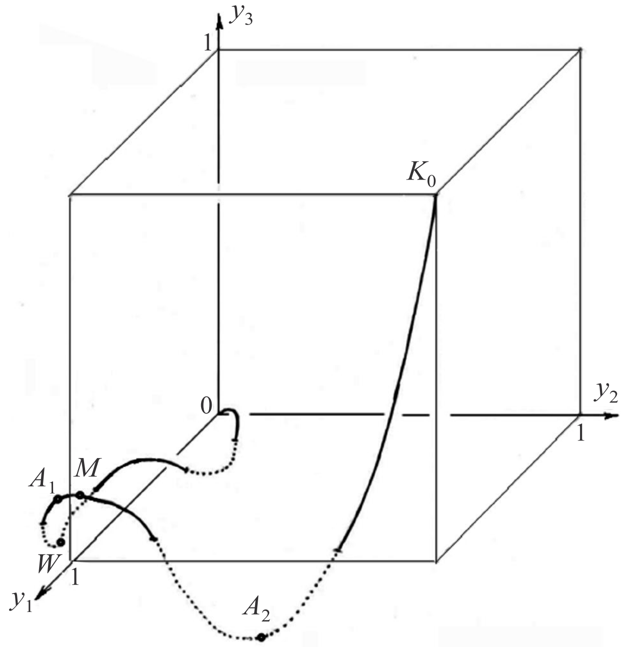


Рис. 4. Контрольная кривая в случае $n = 3$ при $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 3$, $\omega_3 = 7$

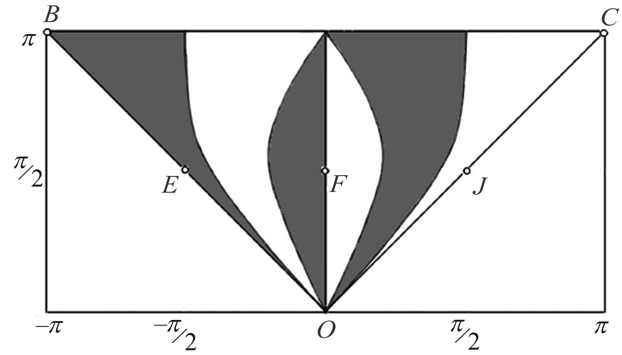


Рис. 5. Диаграмма функций оптимального управления в случае $n = 2$ при $\omega_2 / \omega_1 = 3$

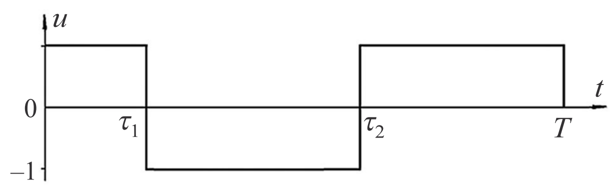


Рис. 6. График функции $u(t)$ в случае $n = 2$ при $\omega_2 / \omega_1 = 3$, $T = \pi / 2$

«полутраектории», показанный на рис. 6 в несмещенном времени $t \in [0, T]$. Моментам переключения $\tau_1 = \pi / 10$, $\tau_2 = 3\pi / 10$ соответствуют корни $\gamma_1 = 2\pi / 5$, $\gamma_2 = \pi / 5$ системы (2.2) при $j = 2$, $T = \pi / 2$. На контрольной кривой (рис. 2) им отвечают точки W ($\rho = \pi / 2$), A_1 ($\rho = 2\pi / 5$) и A_2 ($\rho = \pi / 5$). Здесь прямая A_1A_2 не имеет других пересечений с дугой WK_0, поэтому функция $u(t)$ удовлетворяет необходимым условиям оптимальности в задаче быстродействия (1.1)–(1.3).

При рассмотренных целочисленных значениях $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 3$, согласно замечанию 1, величина $T_* = 2\pi$ является «периодом» для повторения формы диаграммы. Ее продолжение, согласно замечанию 2, строится путем зеркального отражения треугольника OBC (с его закрашенными областями) относительно горизонтали BC, что дало бы симметричный треугольник O_1BC. При продолжении вертикальной оси T внутри угла BOC будут периодически повторяться квадраты OBO_1C с их раскрашенными областями.

Далее рассмотрим закономерности, позволяющие строить диаграммы функций управления в задаче оптимального по быстродействию перемещения платформы с n осцилляторами.

3. Свойства диаграммы функций оптимального управления при малых значениях параметра *T*. Рассмотрим устройство диаграммы в ее самой нижней части, т.е. в окрестности вершины O. Поскольку для $T \in (0, T_0]$, согласно утверждению 2, количество моментов переключений управления $u(t)$, $t \in [0, T)$ не превышает n, то из вершины O будут выходить не более n кривых. В обозначениях $\gamma_k = T - \tau_k$, $k = \overline{1,n}$, где выполнены неравенства (2.3), можно рассматривать эти кривые как графики функций $\gamma_i(T)$, $i = \overline{1,m}$, $m \le n$. С увеличением параметра T такая эволюция соответствует изменению корней системы n уравнений (2.2), записанной при $j = n$. При меньшем числе переключений управления $m < n$ в этой системе можно формально считать $\gamma_j \equiv 0$, $j = \overline{m+1,n}$.

Далее в предположении о малости значений T (а значит, и всех γ_k, $k = \overline{1,n}$) используем разложения в ряды Маклорена:

$$\cos(\omega_i T) \approx 1 + \sum_{j=1}^{n} (-1)^j \frac{(\nu_i t)^j}{(2j)!}, \qquad \cos(\omega_i \gamma_k) \approx 1 + \sum_{j=1}^{n} (-1)^j \frac{(\nu_i \theta_k)^j}{(2j)!},$$

$$t = T^2, \quad \nu_i = \omega_i^2, \; i = \overline{1,n}, \quad \theta_k = \gamma_k^2, \; k = \overline{1,n}. \tag{3.1}$$

Подставляя соотношения (3.1) в (2.2), перегруппируем слагаемые, выделяя в них выражения:

$$p_j = \frac{(-1)^j}{(2j)!}\left[\frac{t^j}{2} + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k \theta_k^j\right], \quad j = \overline{1,n}. \tag{3.2}$$

Тогда, вводя вектор $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, ..., p_n)^{\mathrm{T}}$, преобразуем систему (2.2) к виду

$$\Omega \boldsymbol{p} = \boldsymbol{0}, \qquad \Omega = \begin{bmatrix} 1 & \nu_1 & ... & \nu_1^{n-1} \\ 1 & \nu_2 & ... & \nu_2^{n-1} \\ ... & ... & ... & \\ 1 & \nu_n & ... & \nu_n^{n-1} \end{bmatrix}. \tag{3.3}$$

Поскольку определитель Вандермонда

$$\det \Omega = \prod_{1 \le i < j \le n}^{n} (\nu_i - \nu_j) \ne 0, \text{ при } \omega_j \ne \omega_i \ (j \ne i),$$

то из матричного соотношения (3.3) следует $p_i = 0$, $i = \overline{1,n}$, что приводит к системе n уравнений относительно n переменных $\alpha_i = \theta_i / t$, $i = \overline{1,n}$:

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \alpha_k^i = \frac{1}{2}, \qquad i = \overline{1,n}. \tag{3.4}$$

Можно показать, что такая система (3.4) всегда имеет n корней $\alpha_1 > \alpha_2 > ... > \alpha_n > 0$, причем значения α_1 и α_n, α_2 и α_{n-1} и т.д. дополняют друг друга до единицы. Детали вычислений приведем отдельно для двух случаев.

С л у ч а й 1. Если n – четное, т.е. $n = 2k$, $k \in N$, то можно ввести новые переменные $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_k$, представив

$$\alpha_i = \frac{1}{2} + \beta_i, \ i = \overline{1,k}, \quad \alpha_j = \frac{1}{2} - \beta_{n-j+1}, \ j = \overline{k+1,n}, \tag{3.5}$$

где

$$1/2 > \beta_1 > \beta_2 > ... > \beta_k > 0. \tag{3.6}$$

При подстановке выражений (3.5) в систему (3.4) ее каждое второе уравнение повторит предыдущее, так что останется лишь k уравнений, порождающих в новых переменных $\delta_i = (-1)^{i+1}\beta_i$, $i = \overline{1,k}$, симметрическую систему

$$\sum_{i=1}^{k} \delta_i^{2j-1} = \left(\frac{1}{4}\right)^j, \qquad j = \overline{1,k}.$$

Она решается введением симметрических многочленов, числовые значения которых найдутся стандартными процедурами, чтобы затем (согласно теореме Виета) стать коэффициентами «порождающего» алгебраического уравнения k-й степени с корнями $\delta_1, \delta_2, ..., \delta_k$. При $k > 4$ эти уравнения решаются лишь численно, но для малых k корни находятся в явном виде:

1) при $k = 1$ (т.е. $n = 2$) имеем $\beta_1 = 1/4$ (т.е. $\alpha_1 = 3/4$, $\alpha_2 = 1/4$),

2) при $k = 2$ (т.е. $n = 4$) имеем $\beta_1 = (\sqrt{5}+1)/8$, $\beta_2 = (\sqrt{5}-1)/8$ (т.е. $\alpha_1 = (5+\sqrt{5})/8$, $\alpha_2 = (3+\sqrt{5})/8$, $\alpha_3 = (5-\sqrt{5})/8$, $\alpha_4 = (3-\sqrt{5})/8$),

3) при $k = 3$ (т.е. $n = 6$) возникает «порождающее» уравнение

$$\delta^3-\frac{1}{4}\delta^2-\frac{1}{8}\delta+\frac{1}{64}=0,$$

корни которого находятся по формулам Кардано

$$\delta_i=\frac{1}{12}+\frac{\sqrt{7}}{6}\cos\left[\varphi+\frac{2\pi}{3}(i-1)\right],\ i=\overline{1,3},\ \ \varphi=\frac{1}{3}\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{28}}\right).$$

Им соответствуют численные значения $\beta_1\approx 0.45048441$, $\beta_2\approx 0.31174485$, $\beta_3\approx 0.11126044$, дающие по формулам (3.5) все корни α_i, $i=\overline{1,6}$ системы (3.4).

Случай 2. Если n – нечетное, т.е. $n=2k+1$, $k\in N$, то корни системы (3.4) выразятся через новые переменные в виде:

$$\alpha_i=\frac{1}{2}+\beta_i,\ i=\overline{1,k},\quad \alpha_{k+1}=\frac{1}{2},\quad \alpha_j=\frac{1}{2}-\beta_{n-j+1},\ j=\overline{k+2,n}, \tag{3.7}$$

где вновь выполнится неравенство (3.6).

При подстановке выражений (3.7) в систему (3.4) ее нечетные уравнения вырождаются в тождества, а четные выразятся лишь через β_i^2, $i=\overline{1,k}$, так что при замене $\tilde{\alpha}_i=4\beta_i^2$, $i=\overline{1,k}$, система в точности повторит вид системы (3.4) для $n=k$. Иначе говоря, получим значения $\beta_i=\sqrt{\tilde{\alpha}_i/4}$, где $\tilde{\alpha}_i$, $i=\overline{1,k}$, – корни системы (3.4) для $n=k$. Таким образом, получим:

1) при $n=3$ корни $\alpha_1=(2+\sqrt{2})/4$, $\alpha_2=1/2$, $\alpha_3=(2-\sqrt{2})/4$,

2) при $n=5$ корни $\alpha_1=(2+\sqrt{3})/4$, $\alpha_2=3/4$, $\alpha_3=1/2$, $\alpha_4=1/4$, $\alpha_5=(2-\sqrt{3})/4$,

3) при $n=7$ корни $\alpha_1=(2+\sqrt{2+\sqrt{2}})/4$, $\alpha_2=(2+\sqrt{2})/4$, $\alpha_3=(2+\sqrt{2-\sqrt{2}})/4$, $\alpha_4=1/2$, $\alpha_5=(2-\sqrt{2-\sqrt{2}})/4$, $\alpha_6=(2-\sqrt{2})/4$, $\alpha_7=(2-\sqrt{2+\sqrt{2}})/4$ и т.д.

Замечание 3. Подставляя корни α_i, $i=\overline{1,n}$ системы (3.4) в выражение

$$S=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}\alpha_j^{n+1}-1/2, \tag{3.8}$$

при любом n получим неравенство $S<0$.

Можно показать (подробности опускаем), что при $n=2k$, $k\in N$, выражение (3.8) принимает значение $S=-(2k+1)/2^{4k+1}$, а при $n=2k+1$, $k\in N$, – значение $S=-(k+1)/2^{4k+2}$.

Поскольку среди корней системы (3.4), имеющих исходный смысл $\alpha_i=\gamma_i^2/T^2$, $i=\overline{1,n}$, нет нулевых значений, а сама система порождена представлением (3.1), то в предположении о малости T показана справедливость следующего свойства.

Утверждение 3. В задаче быстродействия (1.1)–(1.3) при достаточно малом значении T функция оптимального управления $u(t)$, $t\in[0,T)$ имеет ровно n переключений. На соответствующей диаграмме из вершины O выходят ровно n кривых $\gamma_i(T)$, $i=\overline{1,n}$, имеющих в этой точке угловые коэффициенты:

$$k_i=\left.\frac{d\gamma_i}{dT}\right|_{T=0}=\sqrt{\alpha_i},\quad i=\overline{1,n}, \tag{3.9}$$

где α_i, $i=\overline{1,n}$, – корни системы (3.4).

В силу гладкости участвующих в (2.2) функций и с учетом вышесказанного, существует диапазон $T\in[0,T_0)$, на котором функции $\gamma_i(T)$, $i=\overline{1,n}$ непрерывны и дифференцируемы, так что если применить разложение

$$\gamma_i(T)\approx\gamma_i(0)+\dot{\gamma}_i(0)T+\ddot{\gamma}_i(0)T^2/2,\quad i=\overline{1,n}, \tag{3.10}$$

то $\gamma_i(0)=0$, $\dot{\gamma}_i(0)=\sqrt{\alpha_i}$, $i=\overline{1,n}$.

Заметим, что система (3.3) порождена приближением (3.1) с учетом n степеней переменной $t=T^2$. Если разложение (3.1) дополнить степенью t^{n+1}, подразумевая при этом увеличение обсуждаемого диапазона T, то после подстановки в систему (2.2) в ней появилась бы наряду с выражениями (3.2) новая компонента:

$$h = \frac{(-1)^{n+1}}{(2(n+1))!}\left[\frac{t^{n+1}}{2} + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k \theta_k^{n+1}\right]. \tag{3.11}$$

Тогда вместо однородного матричного уравнения (3.3) окажется неоднородное

$$\Omega \boldsymbol{p} = -h\mathbf{q}, \qquad \mathbf{q} = (\nu_1^n, \nu_2^n, ..., \nu_n^n)^{\mathrm{T}}. \tag{3.12}$$

Из него методом Крамера последует значение $p_1 = -h\det\Omega_1 / \det\Omega$, где матрица Ω_1 получается из Ω заменой первого столбца на столбец $\mathbf{q}$. Поэтому

$$\det\Omega_1 = (-1)^{n+1}\prod_{k=1}^{n}(\nu_k)\cdot\det\Omega,$$

откуда

$$p_1 = -h(-1)^{n+1}\prod_{k=1}^{n}(\nu_k). \tag{3.13}$$

Сравнивая соотношения (3.8) и (3.11), получим

$$-h(-1)^{n+1} = \frac{t^{n+1}}{(2(n+1))!}S,$$

т.е. знак нового выражения (3.13) для p_1 совпадет со знаком прежнего выражения (3.8) для S. Таким образом, при достаточно малом значении T, согласно утверждению 2 и замечанию 3, ранее имели оценки $p_1 = 0$ и $S < 0$. Теперь с небольшим увеличением параметра T знак выражения S сохранится, а знак выражения

$$p_1 = \frac{t}{2!}(\alpha_1 - \alpha_2 + ... + (-1)^{n+1}\alpha_n - 1/2) \tag{3.14}$$

станет отрицательным, что приводит к следующему выводу.

Замечание 4. Для достаточно малых значений T выражение $w = (\dot\gamma_1^2 - \dot\gamma_2^2 + ... + (-1)^{n+1}\dot\gamma_n^2)$ убывает, т.е.

$$\frac{dw}{dT} < 0. \tag{3.15}$$

Этот факт позволяет для достаточно малых значений T уточнить знак оптимального управления $u(t)$, $t \in [0, T)$, при $t = 0$. С этой целью введем в рассмотрение функцию времени t, определенную на промежутке $t \in [0, T]$ и зависящую от параметра τ:

$$v(t,\tau) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \le t \le \tau, \\ 1 & \text{при } \tau < t \le T. \end{cases}$$

Тогда кусочно-постоянную функцию управления $u(t)$, $t \in [0, T]$, характеризуемую моментами переключения τ_1, τ_2, ..., τ_n, T (где $0 < \tau_1 < ... < \tau_n < T$) и принимающую значение $u(0) = 1$, можно представить в виде

$$u(t) = v(t,0) + 2\sum_{i=1}^{n}(-1)^i v(t,\tau_i). \tag{3.16}$$

Если бы в начальный момент было $u(0) = -1$, то в формуле (3.16) правая часть была бы умножена на «–1». Для дифференциального уравнения $\ddot{x}_0 = u$, $x_0(0) = \dot{x}_0(0) = 0$, характеризующего перемещение платформы из «нулевого» положения под действием управления (3.16), решением будет

$$x_0(t) = \frac{1}{2}(t-0)^2 + \sum_{i=1}^{n}(-1)^i(t-\tau_i)^2.$$

Поэтому перемещение платформы за время T в обозначениях (2.1) примет вид

$$x_0(T) = \frac{1}{2}T^2 + \sum_{i=1}^{n}(-1)^i\gamma_i{}^2 \tag{3.17}$$

(с умножением правой части на «–1» в случае $u(0) = -1$).

Если для малых значений T в выражениях (3.10) ограничиться линейными компонентами, то при их подстановке в (3.17) правая часть выродится в нуль, поскольку равна нулю правая часть в (3.14). Поэтому для отыскания знака величины $x_0(T)$ понадобится выражение (3.10) с учетом квадратичной компоненты. Подставляя его в (3.17), сокращая подобные слагаемые и пренебрегая величинами четвертого порядка малости, получим

$$x_0(T) \approx -T^3\left[\dot{\gamma}_1(0)\ddot{\gamma}_1(0) - \dot{\gamma}_2(0)\ddot{\gamma}_2(0) + \ldots + (-1)^{n+1}\dot{\gamma}_n(0)\ddot{\gamma}_n(0)\right] \tag{3.18}$$

(с домножением на «-1» в случае $u(0) = -1$). Поскольку выражение в квадратных скобках (3.18) отрицательно ввиду неравенства (3.15), то дальность $x_0(T)$ окажется положительной лишь в случае $u(0) = 1$. Таким образом, справедливо следующее свойство.

Утверждение 4. В задаче быстродействия (1.1)–(1.3) при достаточно малом значении T функция оптимального управления $u(t)$, $t \in [0, T)$, на начальном этапе (при $t \in [0, \tau_1)$) положительна.

4. Общий подход к построению диаграммы функций оптимального управления. Все вышеизложенное позволяет начать построение диаграммы функций оптимального управления, выводя из вершины O кривые $\gamma_i(T)$, $i = \overline{1,n}$ с угловыми коэффициентами (3.9), закрашивая серые и белые области между ними в соответствии с утверждением 4.

Эволюцию значений $\gamma_i(T)$, $i = \overline{1,n}$ можно описать, дифференцируя соотношения (2.2) по параметру T. Сокращая каждое i-е уравнение на $2\omega_i$, получим систему

$$\sum_{k=1}^{j}(-1)^{k+1}\dot{\gamma}_k \sin\omega_i\gamma_k = \frac{1}{2}\sin\omega_i T, \quad i = \overline{1,n}. \tag{4.1}$$

Она разрешается (ввиду $j = n$) относительно производных

$$\frac{d\gamma_i}{dT} = \frac{\Delta_i}{\Delta}. \quad i = \overline{1,n}. \tag{4.2}$$

$$\Delta = \eta D, \quad \Delta_i = \eta_i D_i, \quad \eta = \prod_{k=1}^{n}(\omega_k\gamma_k), \quad \eta_i = \eta T/(2\gamma_i),$$

где

$$D = \begin{Vmatrix} \psi(\omega_1\gamma_1) & \psi(\omega_1\gamma_2) & \ldots & \psi(\omega_1\gamma_n) \\ \psi(\omega_2\gamma_1) & \psi(\omega_2\gamma_2) & \ldots & \psi(\omega_2\gamma_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \psi(\omega_n\gamma_1) & \psi(\omega_n\gamma_2) & \ldots & \psi(\omega_n\gamma_n) \end{Vmatrix}. \tag{4.3}$$

Определители D_i, $i = \overline{1,n}$, получаются из D заменой γ_i на T в i-м столбце с одновременным его переносом на место левее первого столбца.

При численном интегрировании уравнений (4.2) на каждом этапе требуется проверка необходимого условия оптимальности: гиперплоскость, проведенная через точки A_k, $k = \overline{1,n}$ (с координатами в виде столбцов определителя D), не должна пересекать контрольную кривую в иных точках. С этой целью для каждого очередного набора T, γ_i, $i = \overline{1,n}$ можно табулировать параметр $t \in [0,T)$, чтобы убедиться, что соотношение (2.5) выполняется только n раз. В противном случае промежуток интегрирования признается завершенным, поскольку уравнения (4.2) сохраняют свой смысл только при тех значениях T, которым соответствует ровно n корней системы (2.2).

Частный случай $n = 2$ был исследован в [12], где диаграмма могла состоять из нескольких слоев, разделяемых горизонталями $T = T_k$, $k \in N$. Внутри каждого слоя происходила своя непрерывная эволюция значений $\gamma_i(T)$, $i = \overline{1,j}$ со своим конкретным количеством j, т.е. интегрировалась очередная система дифференциальных уравнений.

Для произвольного значения n завершение «первого слоя» диаграммы (при $T = T_1$) тоже может быть двух вариантов. Если $T_1 = T_*$ («тривиальный» вариант), то диаграмма состоит из одного слоя, внутри которого у всех оптимальных полутраекторий управление имеет n переключений. Для «нетривиального» варианта, представляющего интерес в дальнейшем, в конце первого слоя при $T_1 < T_*$ системе (2.2) соответствует количество корней $j < n$. Такое уменьшение числа корней может произойти либо из-за обращения в нуль функции $\gamma_n(T)$, либо из-за совпадения значений $\gamma_i = \gamma_{i+1}$, $i \in \overline{1,n-1}$ и т.д. При этом если системе (2.2) отвечает решение, в котором численно совпадут два «соседних» значения $\gamma_i = \gamma_{i+1}$, то ей удовлетворит и решение, в котором эти два значения заменены нулями. Таким образом, существование управления с количеством переключений $j < n$ при некотором значении T подразумевало бы для системы (2.2) наличие решения $(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_j, 0, ..., 0)$, т.е. справедливость условия

$$\gamma_m = 0, \; m = \overline{j+1,n} \; . \tag{4.4}$$

Замечание 5. Условие (4.4) может выполняться только для изолированных точек на числовой оси T, т.е. не может продолжаться на непрерывном промежутке этой оси.

Действительно, если систему (4.1) при $j < n$ записать «в дифференциалах» (умножив уравнения на dT), то из нее не удастся выразить $d\gamma_i$, $i = \overline{1,j}$, через dT, поскольку получится система (n уравнений с j неизвестными) несовместная (ввиду линейной независимости строк). Поэтому для параметра $T + dT$ не найдется продолжения в виде $\gamma_i + d\gamma_i$, $i = \overline{1,j}$.

Из замечания 5 вытекает следствие.

Замечание 6. Для непрерывной эволюции функций $\gamma_i(T)$, $i = \overline{1,j}$ их количество должно быть $j \geq n$.

Приведем еще два утверждения, относящихся к частным случаям соотношений (4.4).

Замечание 7. Если при некотором значении T система (2.2) допускает множество корней при $\gamma_m = 0$, $m = \overline{2,n}$, то соответствующее ему управление (с тремя переключениями в моменты времени $T - \gamma_1$, T, $2T - \gamma_1$) при $u(0) = 1$ удовлетворяет необходимым условиям оптимальности.

Действительно, если в задаче (1.1)–(1.3) при некотором n существует режим с тремя переключениями, то он существует и для системы, полученной из (1.1) формальным исключением последних ($n-1$) уравнений. Но для такой платформы с одним осциллятором режим с тремя переключениями является оптимальным [1, 3]. Достигаемая при $n = 1$ максимальная дальность $x_0(2T)$ будет не меньшей, чем для системы (1.1) при $n > 1$, т.е. для системы с ограничениями в виде дополнительных ($n-1$) дифференциальных уравнений.

Замечание 8. Если при некотором значении T система (2.2) допускает множество корней при $\gamma_m = 0$, $m = \overline{3,n}$, то соответствующее ему управление (с пятью переключениями в моменты времени $T - \gamma_1$, $T - \gamma_2$, T, $2T - \gamma_2$, $2T - \gamma_1$) при $u(0) = 1$ удовлетворит необходимым условиям оптимальности в том случае, когда хотя бы одна кривая

$$y_k = \psi(\omega_k \rho), \quad y_s = \psi(\omega_s \rho), \quad \rho \in [0,T] \tag{4.5}$$

на плоскости (y_k, y_s) имеет только две общие точки с прямой A_1A_2, проведенной через взятые на кривой точки A_1 и A_2 с параметрами γ_1 и γ_2.

Доказательство аналогично замечанию 6: если в задаче (1.1)–(1.3) при некотором n существует режим с пятью переключениями, то он существует и для системы меньшего порядка — относительно переменных x_0, x_k, x_s. Для нее выполнено необходимое условие оптимальности в геометрической форме для контрольной кривой (4.5), поэтому достигаемая платформой с двумя осцилляторами дальность $x_0(2T)$ будет максимально возможной. Для исходной системы (1.1), стесненной дополнительными дифференциальными уравнениями, дальность не может быть больше.

В замечании 7 к режимам с тремя переключениями не было дополнительных геометрических требований потому, что порождаемое лишь одной точкой (с параметром γ_1) множество, т.е. нульмерная плоскость, заведомо не может иметь других пересечений с контрольной кривой. Что касается замечания 8, то оно заменяет проверку отсутствия «лишних» пересечений контрольной кривой с прямой A_1A_2 в n-мерном пространстве. Естественным обобщением замечаний 7 и 8 является следующий факт.

Замечание 9. Если при некотором значении T система (2.2) допускает множество корней с условием (4.4), то соответствующее ему управление (с k переключениями на полутраектории, $k = n - j$) при $u(0) = 1$ удовлетворит необходимым условиям оптимальности в том случае, когда из чисел ω_i, $i = \overline{1,n}$ можно выбрать k (перенумерованных) значений ω_j, $j = \overline{1,k}$, для которых соответствующая кривая $\bar{r} = \left(\psi(\omega_1\rho),\dots,\psi(\omega_k\rho)\right)^{\mathrm{T}}$, $\rho \in [0,T]$ в k-мерном пространстве имеет только k общих точек с плоскостью $A_1A_2\dots A_k$, проведенной через взятые на кривой точки с параметрами γ_j, $j = \overline{1,k}$.

Далее рассмотрим разновидности нетривиальных сценариев, относя их к завершению не только «первого слоя» диаграммы (при $T = T_1$), но и любого очередного слоя с некоторым номером k (при $T = T_k$). Перечислим некоторые возможные типы завершения непрерывной эволюции k-го слоя в связи с изменением количества корней системы (2.2).

Тип 1. Пусть при $T = T_k$ количество корней стало ($n - 1$). Это возможно, например, в ситуации обращения в нуль функции $\gamma_n(T)$, когда на контрольной кривой в n–мерном пространстве изображающая точка A_n совмещается с началом K_0. Согласно замечанию 5, дальнейшая непрерывная эволюция переменных возможна лишь с увеличением их количества. Для оптимальной функции управления $u(t)$ это возможно лишь путем добавления двух новых сколь угодно близких моментов переключения [12], что на графике соответствует «игольчатой» вариации. При таком значении параметра $T = T_k$ на контрольной кривой гиперплоскость должна пройти через точки A_i, $i = \overline{1,n-1}$, но не должна быть секущей к этой кривой, иначе в графике $u(t)$ возникли бы скачкообразные изменения. Поэтому гиперплоскость пройдет как касательная к контрольной кривой. Параметр γ_M искомой точки M касания можно определить из условия принадлежности к гиперплоскости не только точки A_M, но и вычисленного в ней касательного вектора $v = \left(\varphi(\omega_1\gamma_M),\dots,\varphi(\omega_k\gamma_M)\right)^{\mathrm{T}}$, выраженного через функцию $\varphi(\omega\rho) = [\cos(\omega\rho) - \psi(\omega\rho)]/\rho$. Точка M касания на контрольной кривой получит статус «сдвоенной», как и соответствующие моменты переключения $\tau = T - \gamma_M$ на графике функции $u(t)$ управления. На диаграмме на горизонтали $T = T_k$ добавится точка с параметром γ_M, из которой в следующем слое будут выходить две новые кривые, так что эволюция перенумерованных функций $\gamma_i(T)$, $i = \overline{1,n+1}$ будет описываться системой с количеством дифференциальных уравнений $n + 1$.

Тип 2. Пусть при $T = T_k$ количество корней убавилось до ($n - 2$). Это возможно, например, в ситуации сближения «соседних» значений $\gamma_i(T)$ и $\gamma_{i+1}(T)$, вплоть до совпадения, когда на контрольной кривой совместятся изображающие точки A_i и A_{i+1}. Для продолжения непрерывной эволюции, согласно замечанию 6, потребуется как минимум еще две переменные $\gamma_k(T)$, что на контрольной кривой соответствует появлению «сдвоенной» точки. В отличие от предыдущего случая (тип 1), где такая точка определялась построением касательной гиперплоскости, сейчас для такой процедуры недостаточно имеющихся точек A_i. Если через ($n - 1$) точек можно было провести не более двух касательных гиперплоскостей к контрольной кривой, то через ($n - 2$) точек их можно провести бесконечно много. Поэтому для отыскания на горизонтали $T = T_k$ «сдвоенной» точки (назовем ее L) удобнее обратиться к системе (4.1). Ее коэффициенты вычисляются при известных значениях $T = T_k$ и ($n - 2$) «старых» переменных γ_i. Параметр искомой сдвоенной точки обозначим γ_L, считая его общим для двух новых переменных γ_j и γ_{j+1}. В системе будет ровно n неизвестных, в том числе параметр γ_L, разность $x = \dot{\gamma}_j - \dot{\gamma}_{j+1}$ и производные ($n - 2$) «старых» переменных. Исключая из системы производные, получим тригонометрическое уравнение с одним неизвестным γ_L. Искомый корень γ_L должен удовлетворять двум условиям, проверяемым интегрированием множества функций $\gamma_i(T)$, $i = \overline{1,n}$, на сколь угодно малом промежутке $[T_k, T_k + \Delta T]$:

а) соблюдение неравенства (2.3),

б) отсутствие лишних точек пересечения контрольной кривой и гиперплоскости, проведенной через точки с параметрами $\gamma_i(T)$, $i = \overline{1,n}$.

Заметим, что рассмотренные выше типы 1 и 2 дают исчерпывающий перечень возможных «дефицитов» корней (4.4) лишь для случая $n = 3$. Обобщением могут быть ситуации, когда для продолжения непрерывной эволюции, согласно замечанию 6, понадобится три и более недостающих точек A_i. На графике функции $u(t)$ это может соответствовать двум и более игольчатым вариациям. Количество возможных сценариев (при разных комбинациях параметров ω_i, $i = \overline{1,n}$) бесконечно, поэтому вместо конечного алгоритма речь можно вести лишь об общем подходе к продолжению диаграммы функций оптимального управления. Он заключается в совместном рассмотрении диаграммы и геометрических свойств контрольной кривой.

Тип 3. Пусть при $T \geq T_k$ у системы (2.2) число корней $j = n + m$, $m \in N$. Тогда эволюция функций $\gamma_i(T)$, $i = \overline{1,n+m}$ опишется набором ($n + m$) дифференциальных уравнений, первые n из которых имеют вид (4.1), а остальные m уравнений получаются дифференцированием по параметру T соотношений вида (2.5), где вместо ($T - t$) подставлены каждая из m переменных $\gamma_i(T)$, $i = \overline{n+1,n+m}$.

5. Результаты численных экспериментов для платформы с тремя осцилляторами.

Пример 1. На рис. 7 для значений $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 3$, $\omega_3 = 5$ показана правая часть диаграммы функций оптимального управления (ее левая часть – зеркальная, но с переменой местами белого и серого цветов). Из вершины O выходят кривые $\gamma_1(T)$, $\gamma_2(T)$, $\gamma_3(T)$ с угловыми коэффициентами, вычисленными по формулам (3.9) (для случая 2) в виде

$$k_1 = \sqrt{2+\sqrt{2}}\ /\ 2, \qquad k_2 = \sqrt{2}\ /\ 2, \qquad k_3 = \sqrt{2-\sqrt{2}}\ /\ 2. \tag{5.1}$$

Уравнения (4.2), $n = 3$ интегрировались численно с одновременной проверкой отсутствия «лишних» пересечений контрольной кривой с плоскостью, проведенной через точки с параметрами $\gamma_1(T)$, $\gamma_2(T)$, $\gamma_3(T)$. Процесс завершился при $T_1 = \pi$, $\gamma_1 = \pi / 2$, $\gamma_2 = \gamma_3 = 0$. Согласно замечанию 1, для целочисленных значений частот величина $T_* = 2\pi$ является «периодом» повторения формы диаграммы, зеркально удвоенной относительно прямой $T = \pi$ и породившей квадрат. Через его вершину пройдет горизонталь $T = 2\pi$, символизирующая режим с одним моментом переключения управления. Таким образом, рисунок 7 содержит все возможные фрагменты продолжаемой бесконечно диаграммы. При любых значениях T здесь возможны лишь режимы с количествами 1, 3, 7 переключений оптимального управления.

Пример 2. На рис. 8 показана правая (зеркальная) часть диаграммы для случая $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 3$, $\omega_3 = 7$. Кривые $\gamma_1(T)$, $\gamma_2(T)$, $\gamma_3(T)$ выходят из вершины O с теми же угловыми коэффициентами (5.1), но интегрирование системы завершается уже при $T_1 = \pi / 2$ ввиду обращения в нуль функции $\gamma_3(T)$. Значения $\gamma_1 = 2\pi / 5$, $\gamma_2 = \pi / 5$ при $T_1 = \pi / 2$ удовлетворяют не только системе (2.2), но и необходимым условиям оптимальности в виде замечания 8.

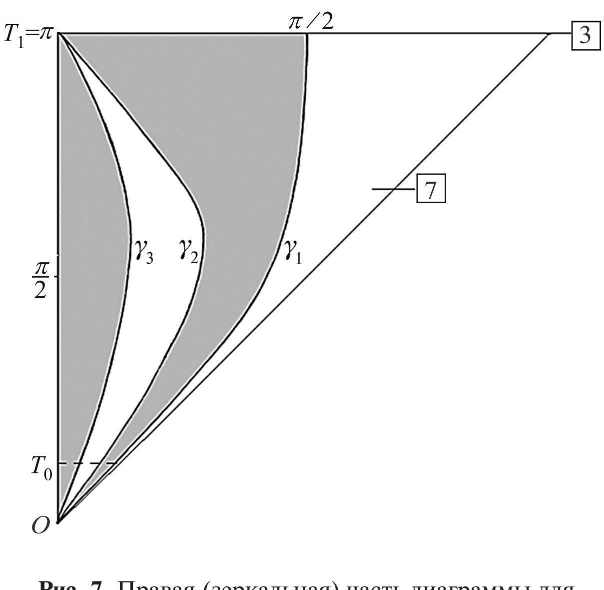


Рис. 7. Правая (зеркальная) часть диаграммы для $n = 3$ при $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 3$, $\omega_3 = 5$

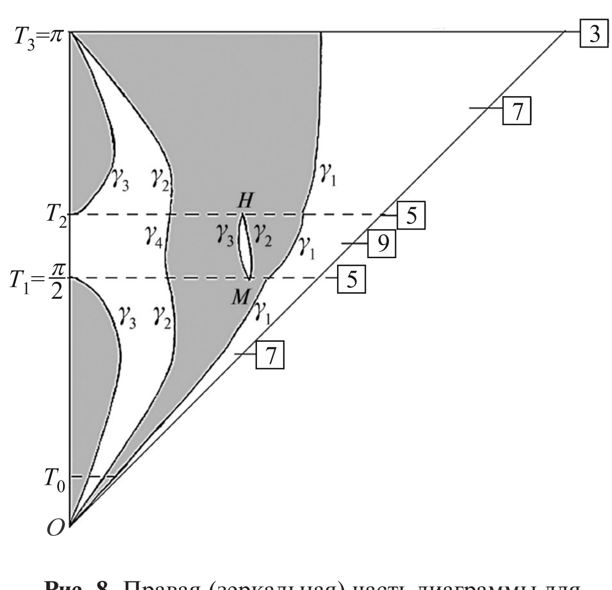


Рис. 8. Правая (зеркальная) часть диаграммы для $n = 3$ при $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 3$, $\omega_3 = 7$

Действительно, пространственная контрольная кривая (рис. 4) имеет проекцию на плоскость (y_1, y_2) в виде рис. 2, на котором проведенная через точки A_1 и A_2 (с параметрами $2\pi/5$ и $\pi/5$) прямая не имеет других пересечений с контрольной кривой. Согласно замечанию 8, этого достаточно, несмотря на то что, например, проекция на плоскость (y_1, y_3) (рис. 3) такому свойству не удовлетворяет.

На горизонтали $T_1 = \pi/2$ наличие лишь двух точек из трех соответствует описанному выше типу 1. Параметр $\gamma_M \approx 1.150466$ третьей точки M найден из условия касания плоскости A_1A_2M с контрольной кривой (эти точки показаны на рис. 4). С увеличением параметра T касательная плоскость превращается в секущую, из пункта M на контрольной кривой выйдут две новые точки. Второй слой диаграммы начинается при перенумерованных значениях переменных $\gamma_1 = 2\pi/5$, $\gamma_2 = \gamma_3 \approx 1.150466$, $\gamma_4 = \pi/5$, причем интегрируется новая система уравнений. Она соответствует типу 3: к трем уравнениям (4.1) добавится четвертое, полученное дифференцированием по параметру T соотношения (2.5) при $n = 3$, куда вместо $(T - t)$ подставляется γ_4. Результирующая система разрешится относительно производных в виде

$$\frac{d\gamma_i}{dT} = \frac{R_i}{R}, \qquad i = \overline{1,4},$$

$$R = 2(\mu_1 V_{234} + \mu_2 V_{134} + \mu_3 V_{124} + \mu_4 V_{123})/T,\ \ \mu_i = G_i/\gamma_i^2, \quad i = \overline{1,4}, \tag{5.2}$$

$$R_1 = (\mu_2 V_{034} + \mu_3 V_{024} + \mu_4 V_{023})/\gamma_1, \qquad R_2 = (-\mu_1 V_{034} + \mu_3 V_{014} + \mu_4 V_{013})/\gamma_2,$$

$$R_3 = (-\mu_1 V_{024} - \mu_2 V_{014} + \mu_4 V_{012})/\gamma_3, \qquad R_4 = (-\mu_1 V_{023} - \mu_2 V_{013} - \mu_3 V_{012})/\gamma_4.$$

Здесь использованы столбцы $\boldsymbol{g}_i = \left(\psi(\omega_1\gamma_i), \psi(\omega_2\gamma_i), \psi(\omega_3\gamma_i)\right)^{\mathrm{T}}$, $i = \overline{1,4}$ и столбец $\boldsymbol{g}_0 = \left(\psi(\omega_1 T), \psi(\omega_2 T), \psi(\omega_3 T)\right)^{\mathrm{T}}$. Определитель третьего порядка G_i, $i = \overline{1,4}$ получается из определителя $G = \left\|(\boldsymbol{g}_1 - \boldsymbol{g}_2)(\boldsymbol{g}_2 - \boldsymbol{g}_3)(\boldsymbol{g}_3 - \boldsymbol{g}_4)\right\|$ формальной заменой $\boldsymbol{g}_i$ на столбец $\boldsymbol{h}_i = \left(\cos(\omega_1\gamma_i), \cos(\omega_2\gamma_i), \cos(\omega_3\gamma_i)\right)^{\mathrm{T}}$, $i = \overline{1,4}$, а все определители $V_{ijk} = \left\|(\boldsymbol{g}_i)(\boldsymbol{g}_j)(\boldsymbol{g}_k)\right\|$ составлены из столбцов с возрастающими номерами.

Интегрирование системы (5.2) завершается при $T_2 \approx 1.982313$ ввиду совпадения значений функций $\gamma_3(T)$ и $\gamma_2(T)$. Их графики на диаграмме (рис. 8) пересекаются в вершине H «чечевицы», начатой вверх из точки M. На контрольной кривой в исчезающей «сдвоенной» точке $\gamma_2 = \gamma_3 \approx 1.0760698$ пройдет момент касания с гиперплоскостью, после чего оставшаяся точка A_1 ($\gamma_1 \approx 1.459590$) сохранит имя, а A_4 ($\gamma_4 \approx 0.624976$) переименуется в A_2. В роли третьей точки A_3 далее выступит K_0 ($\gamma_3 = 0$), поскольку, как показывает численная проверка, только такая плоскость $A_1A_2A_3$ не пересекает контрольной кривой в других точках. При $T_2 > 1.982313$ эволюция функций $\gamma_1(T)$, $\gamma_2(T)$, $\gamma_3(T)$ находится интегрированием уравнений (4.2) при $n = 3$. Этот третий слой завершается значениями $T_3 = \pi$, $\gamma_1 = \pi/2$, $\gamma_2 = \gamma_3 = 0$ и является последним на диаграмме (рис. 8). В каждом слое диаграммы цифрой указано соответствующее количество переключений управления $u(t)$, $t \in [0, 2T]$.

Пример 3. На рис. 9 показана правая (зеркальная) часть диаграммы для случая $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 7$, $\omega_3 = 13$. Сюжет подобран для иллюстрации ситуации типа 2, поскольку система (2.2) заведомо допускает решение $T = \pi/2$, $\gamma_1 = \pi/3$, $\gamma_2 = \gamma_3 = 0$.

Здесь вновь кривые $\gamma_1(T)$, $\gamma_2(T)$, $\gamma_3(T)$ выходят из вершины O с теми же угловыми коэффициентами (5.1), но интегрирование системы (4.2) завершается при $T_1 \approx 0.946912$, где $\gamma_3(T_1) = 0$. В этот момент на контрольной кривой точка A_3 совместится с K_0. К двум оставшимся точкам A_1 и A_2 (тип 1) далее добавится третья – после отыскания параметра $\gamma_R \approx 0.690766$ точки R касания контрольной кривой и плоскости A_1A_2R. Во втором слое диаграммы интегрирование системы (5.2) завершается при $T_2 \approx 1.146912$ ввиду $\gamma_4(T_2) = 0$. В третьем слое интегрируется система (4.2) при $n = 3$, пока не произойдет пересечение кривых $\gamma_2(T)$ и $\gamma_3(T)$ в точке P. На горизонтали $T_3 = \pi/2$ остается лишь одна точка ($\gamma_1 = \pi/3$) вместо трех. Для отыскания новой точки L по описанной выше схеме (см. тип 2) составляем систему уравнений (4.1) с заменой $x = \dot\gamma_2 - \dot\gamma_3$ в виде

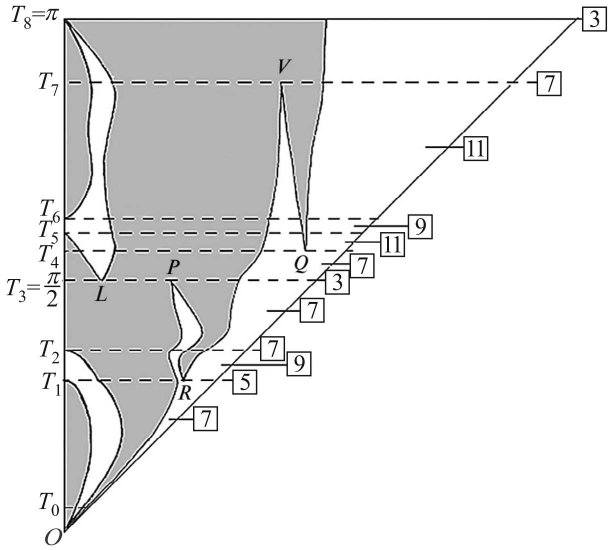


Рис. 9. Правая (зеркальная) часть диаграммы для $n=3$ при $\omega_1=1$, $\omega_2=7$, $\omega_3=13$

$$\dot{\gamma}_1 \sin\left(\frac{\omega_i \pi}{3}\right) - x \sin(\omega_i \gamma_L) = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\omega_i \pi}{2}\right), \quad i=\overline{1,3}. \tag{5.3}$$

Подставляя значения $\omega_1=1$, $\omega_2=7$, $\omega_3=13$, исключим из системы переменные $\dot{\gamma}_1$ и x, получая уравнение $\sin(\gamma_L)=\sin(13\gamma_L)$. В актуальном диапазоне ($0<\gamma_L<\pi/2$) оно имеет пять корней, из которых только $\gamma_L \approx 0.2243995$ удовлетворяет одновременно условиям а) и б), упомянутым в комментариях (см. тип 2).

В четвертом слое диаграммы (рис. 9) из точки L выходят кривые $\gamma_2(T)$ и $\gamma_3(T)$, которые вместе с $\gamma_1(T)$ определяются интегрированием системы (4.2) при $n=3$. Процесс прерывается при $T_4 \approx 1.736850$, когда контрольная кривая касается плоскости $A_1A_2A_3$ в дополнительной точке Q с параметром $\gamma_Q \approx 1.466848$. На диаграмме в пятом слое из точки R выходят две новые кривые, поэтому к трем уравнениям (4.1) добавятся четвертое и пятое, полученные дифференцированием по параметру T соотношения (2.5) при $n=3$, куда вместо ($T-t$) подставляются соответственно γ_4 и γ_5. Результирующая система сводится к виду

$$\frac{d\gamma_i}{dT} = \frac{H_i}{H}, \quad i=\overline{1,5},$$

$$H = 2\left[\begin{array}{c} V_{345}(\mu_2\lambda_1 - \mu_1\lambda_2) + \\ + V_{245}(\mu_3\lambda_1 - \mu_1\lambda_3) + V_{145}(\mu_3\lambda_2 - \mu_2\lambda_3) + \\ + \mu_4(\lambda_1 V_{235} + \lambda_2 V_{135} + \lambda_3 V_{125}) - \\ - \lambda_5(\mu_1 V_{234} + \mu_2 V_{134} + \mu_3 V_{124} + \mu_4 V_{123}) \end{array}\right] / T,$$

$$\mu_i = G_i / \gamma_i^2, \quad i=\overline{1,4}, \qquad \lambda_i = F_i / \gamma_i^2, \quad i=1,2,3,5, \tag{5.4}$$

$$H_1 = \left[\begin{array}{c} V_{045}(\mu_3\lambda_2 - \mu_2\lambda_3) + \\ + \mu_4(\lambda_2 V_{035} + \lambda_3 V_{025}) - \\ - \lambda_5(\mu_2 V_{034} + \mu_3 V_{024} + \mu_4 V_{023}) \end{array}\right] / \gamma_1,$$

$$H_2 = \begin{bmatrix} V_{045}(\mu_1\lambda_3 - \mu_3\lambda_1) + \\ + \mu_4(-\lambda_1 V_{035} + \lambda_3 V_{015}) - \\ - \lambda_5(-\mu_1 V_{034} + \mu_3 V_{014} + \mu_4 V_{013}) \end{bmatrix} / \gamma_2,$$

$$H_3 = \begin{bmatrix} V_{045}(\mu_2\lambda_1 - \mu_1\lambda_2) + \\ + \mu_4(-\lambda_1 V_{025} - \lambda_2 V_{015}) - \\ - \lambda_5(-\mu_1 V_{024} - \mu_2 V_{014} + \mu_4 V_{012}) \end{bmatrix} / \gamma_3.$$

$$H_4 = \begin{bmatrix} V_{035}(\mu_2\lambda_1 - \mu_1\lambda_2) + \\ + V_{025}(\mu_3\lambda_1 - \mu_1\lambda_3) + \\ + V_{015}(\mu_3\lambda_2 - \mu_2\lambda_3) - \\ - \lambda_5(-\mu_1 V_{023} - \mu_2 V_{013} - \mu_3 V_{012}) \end{bmatrix} / \gamma_4,$$

$$H_5 = \begin{bmatrix} V_{034}(\mu_2\lambda_1 - \mu_1\lambda_2) + \\ + V_{024}(\mu_3\lambda_1 - \mu_1\lambda_3) + \\ + V_{014}(\mu_3\lambda_2 - \mu_2\lambda_3) + \\ + \mu_4(\lambda_1 V_{023} + \lambda_2 V_{013} + \lambda_3 V_{012}) \end{bmatrix} / \gamma_5.$$

Здесь к ранее введенным в (5.2) столбцам $\boldsymbol{g}_i$, $i = \overline{0,4}$ добавлен новый $\boldsymbol{g}_5 = \left(\psi(\omega_1\gamma_5), \psi(\omega_2\gamma_5), \psi(\omega_3\gamma_5)\right)^{\mathrm{T}}$. Определитель третьего порядка F_i, $i = 1,2,3,5$ получается из определителя $F = \|(\boldsymbol{g}_1 - \boldsymbol{g}_2)(\boldsymbol{g}_2 - \boldsymbol{g}_3)(\boldsymbol{g}_3 - \boldsymbol{g}_5)\|$ формальной заменой $\boldsymbol{g}_i$ на столбец $\boldsymbol{h}_i = \left(\cos(\omega_1\gamma_i), \cos(\omega_2\gamma_i), \cos(\omega_3\gamma_i)\right)^{\mathrm{T}}$, $i = 1,2,3,5$, а все определители $V_{ijk} = \|(\boldsymbol{g}_i)(\boldsymbol{g}_j)(\boldsymbol{g}_k)\|$ составлены из столбцов с возрастающими номерами.

Интегрирование системы (5.4) завершается при $T_5 \approx 1.853483$ ввиду обращения в нуль переменной $\gamma_5(T_5) = 0$. В шестом слое диаграммы интегрируется система четвертого порядка (5.2) до того момента, когда при $T_6 \approx 1.933983$ контрольная кривая пересечется в точке K_0 ($\gamma_5 = 0$) плоскостью, проходящей через A_1, A_2, A_3 и A_4. Далее в седьмом слое диаграммы интегрируется система пятого порядка (5.4) до тех пор, как при $T_7 \approx 2.756850$ в точке V пересекутся кривые $\gamma_2(T)$ и $\gamma_3(T)$. Оставшиеся три кривые в восьмом слое определяются интегрированием системы (4.2) при $n = 3$. Завершается диаграмма (рис. 9) горизонталью $T_8 = \pi$.

Рис. 10. Зависимость дальности $2b$ от времени $2T$ для разных сочетаний параметров

В примерах 1–3 были числа ω_i, $i = \overline{1,3}$ – целые нечетные, поэтому при $T = \pi$ система (2.2) допускает решение $\gamma_1 = \pi / 2$, $\gamma_2 = \gamma_3 = 0$. Можно показать (разложением слагаемых этой системы в ряды Тейлора), что на диаграмме в окрестности горизонтали $T = \pi$ во всех трех примерах значения производных будут $\dot{\gamma}_1 = 0$, $\dot{\gamma}_2 = -\sqrt{3} / 2$, $\dot{\gamma}_3 = -1 / 2$. Практически идентичными выглядят и малые окрестности вершины О, поскольку совпадают угловые коэффициенты выходящих из нее линий. На каждой диаграмме пунктиром помечена своя горизонталь на уровне T_0 (2.8), который давал (явно заниженную) оценку диапазона, где гарантировались режимы с n переключениями управления на полутраектории.

Поскольку на рис. 7–9 диаграммы завершаются одинаково при $T = \pi$, $\gamma_1 = \pi / 2$, $\gamma_2 = \gamma_3 = 0$, то одинаковы и значения соответствующей «полудальности» $b = \pi^2 / 4$ по формуле (3.17).

На рис. 10 показаны зависимости дальности $2b$ перемещения платформы от времени $2T$ движения. Примерам 1, 2 и 3 соответствуют кривые *в*, *б* и *а*.

Заключение. Рассмотрена задача оптимального по быстродействию перемещения (на заданное расстояние) платформы с n осцилляторами из одного состояния покоя в другое. Предложенная схема построения диаграммы функций оптимального управления стала естественным обобщением ранее изученного в [12] случая $n = 2$. Общий подход заключается в совместном рассмотрении диаграммы и геометрических свойств контрольной кривой в n-мерном пространстве. Для малых перемещений платформы функция оптимального управления оказалась кусочно-постоянной с n моментами переключения на полутраектории. Неочевидным оказалось то, что они почти не зависят от соотношения собственных частот осцилляторов. Например, на диаграммах с разными сочетаниями параметров ω_1, ω_2, ω_3 (рис. 7–9) окрестности вершины *O* практически идентичны в диапазоне $T < T_0$, вычисленном по формуле (2.8) для $\omega_3 = 13$ (рис. 9). Поэтому, в частности, можно считать завершенным решение исходной задачи в постановке [1], где платформа с n маятниками рассматривалась в линейном приближении, а значит, в предположении о малости перемещений. Для нее итогом исследования будет утверждение о количестве переключений оптимального управления, равном $(2n + 1)$, а функции управления заимствуются из нижней части соответствующей диаграммы, согласно утверждению 3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Соколов Б.Н.* Управление колебаниями. М.: Наука, 1980. 383 с.
2. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969. 384 с.
3. *Мамалыга В.М.* Об оптимальном управлении одной колебательной системой // Изв. АН СССР. МТТ. 1978. № 3. С. 8–17.
4. *Каюмов О.Р.* О глобальной управляемости некоторых лагранжевых систем // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 6. С. 16–23.
5. *Овсеевич А.И., Федоров А.К.* Асимптотически оптимальное управление в форме синтеза для системы линейных осцилляторов // ДАН. 2013. Т. 452. № 3. С. 266–270.
6. *Ананьевский И.М., Анохин Н.В., Овсеевич А.И.* Синтез ограниченного управления линейными динамическими системами с помощью общей функции Ляпунова // ДАН. 2010. Т. 434. № 3. С. 319–323.
7. *Ovseevich A.A.* Local Feedback Control Bringing a Linear System to Equilibrium // JOTA. 2015. V. 165. № 2. P. 532–544.
8. *Ананьевский И.М., Ишханян Т.А.* Управление твердым телом, несущим диссипативные осцилляторы, в присутствии возмущений // Изв. РАН. ТиСУ. 2019. № 1. С. 42–51.
9. *Ананьевский И.М.* Управляемое перемещение платформы, несущей упругое звено с неизвестным фазовым состоянием // Изв. РАН. ТиСУ. 2019. № 6. С. 35–42.
10. *Ананьевский И.М., Овсеевич А.И.* Управляемое перемещение линейной цепочки осцилляторов // Изв. РАН. ТиСУ. 2021. № 5. С. 18–26.
11. *Каюмов О.Р.* Оптимальное по быстродействию перемещение платформы с осцилляторами // ПММ. 2021. Т.85. Вып. 6. С. 699–718.
12. *Каюмов О.Р.* Диаграммы функций оптимального управления в задаче наибыстрейшего перемещения платформы с двумя осцилляторами // Изв. РАН. ТиСУ. 2022. № 5. С. 66–83.
13. *Kayumov O.R.* On the Properties of the Time-Optimal Movement of a Platform with Oscillators // Proceedings of 16th Intern. Conf. on Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference), STAB 2022. Moscow, 2022. С. 9807541.

ИЗВЕСТИЯ РАН. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2024, № 2, С. 84–106

КОМПЬЮТЕРНЫЕ МЕТОДЫ

УДК 62-40

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ СИСТЕМЫ ИЗ ИМПУЛЬСНОЙ ТЕХНИКИ

© 2024 г. Р. В. Хачатуров[a], *
[a]ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия
*e-mail: rv_khach@yahoo.ie

Поступила в редакцию 17.06.2023 г.
После доработки 21.06.2023 г.
Принята к публикации 31.08.2023 г.

Рассмотрена обратная задача с распределенными параметрами для процесса самофокусировки цилиндрических рентгеновских импульсов в плазме, описана математическая модель исследуемого процесса в цилиндрической системе координат, учитывающая симметрию импульса относительно направления его распространения. Проведено сравнение с аналогичным процессом в случае "плоских" импульсов, представлен вычислительный метод решения прямой задачи взаимодействия плазмы и импульса при заданных значениях параметров, доказан второй порядок аппроксимации и асимптотическая устойчивость построенной разностной схемы. Предложено использование метода множества эквивалентности для решения обратной задачи определения начальных параметров плазмы и импульса по форме прошедшего через нее цилиндрического рентгеновского импульса и динамике его максимальной интенсивности. На примере данной задачи описан алгоритм применения метода множества эквивалентности для решения обратных задач.

Ключевые слова: обратные задачи, метод множества эквивалентности (ММЭ), математическое моделирование, цилиндрические рентгеновские импульсы в плазме, самофокусировка.

DOI: 10.31857 / S0002338823060069, **EDN:** GQJTLP

INVERSE PROBLEM FOR A DISTRIBUTED SYSTEM FROM PULSE TECHNOLOGY

R. V. Khachaturov[a], *
[a]*Federal Research Center "Computer Science and Control", Russian Academy of Sciences, Moscow, 119333 Russia*
**e-mail: rv_khach@yahoo.ie*

An inverse problem with distributed parameters for the process of the self-focusing of cylindrical X-ray pulses in a plasma is considered, and a mathematical model of the studied process in a cylindrical coordinate system is described, taking into account the symmetry of the pulse relative to the direction of its propagation. A similar process in the case of plane pulses is compared, a computational method for solving the direct problem of interaction between the plasma and pulse for the given parameter values is presented, the second order of approximation and the asymptotic stability of the constructed difference scheme are proved. It is proposed to use the equivalence set method to solve the inverse problem of determining the initial parameters of the plasma and pulse from the shape of a cylindrical X-ray pulse passing through it and the dynamics of its maximum intensity. Using this problem as an example, an algorithm for using the equivalence set method to solve inverse problems is described.

Keywords: inverse problems, set of equivalence method (SEM), mathematical modeling, cylindrical X-ray pulses in plasma, self-focusing

Введение. Изучается обратная задача с распределенными параметрами для процесса самофокусировки цилиндрических рентгеновских импульсов в плазме. Обратные задачи подробно рассматривались различными авторами в работах [1–20]. В этой статье описывается применение метода множества эквивалентности для решения обратных задач на примере задачи о самофокусировке цилиндрических рентгеновских импульсов в плазме. Кратко изложим физическую суть исследуемого процесса. Самофокусировка импульсов рентгеновского излучения в плазме происходит вследствие действия пондеромоторных сил, вытесняющих свободные электроны плазмы из области высокой интенсивности импульса в область меньшей интенсивности, в сочетании с отрицательной диэлектрической проницаемостью плазмы для рентгеновского излучения, так как его несущая частота больше плазменной [21-23]. Рентгеновские лазеры и другие источники сверхкоротких рентгеновских импульсов высокой интенсивности [21-23] получают все большее распространение в различных областях науки и технологии, поэтому математическое моделирование сложных процессов их взаимодействия с веществом становится все более необходимым. Для теоретического исследования этих процессов необходимо разрабатывать математические модели, учитывающие нелинейные эффекты взаимодействия рентгеновского импульса с плазмой, в том числе динамику электронной компоненты плазмы. Для этого целесообразно использовать накопленный опыт математического моделирования различных физических, химических, космологических и других явлений и процессов [24-64]. Одной из наиболее важных характеристик импульса является его пространственная форма. В работах [24-26] рассматривались плоские импульсы, т.е. предполагалось, что интенсивность импульса вдоль одной из ортогональных поперечных координат Y изменяется существенно медленнее, чем вдоль другой поперечной координаты X. Поэтому производными по Y можно было пренебречь, и задача становилась одномерной по поперечной координате X, а в целом — трехмерной (с учетом продольной координаты Z, вдоль которой распространяется импульс, и времени T). Такая модель вполне соответствует некоторым реальным физическим задачам и практическим экспериментам, однако на практике нередко используются импульсы, не обладающие указанным свойством, но осесимметричные относительно направления своего распространения. Более того, в любой фиксированный момент времени T_0 для любой точки Z_0 на оси OZ на равном расстоянии от оси OZ в плоскости $X Z_0 Y$ интенсивность таких импульсов является постоянной величиной, т.е. не зависит от угла в цилиндрической системе координат. Импульсы, обладающие указанным свойством, будем в дальнейшем называть цилиндрическими. Данная работа посвящена математическому моделированию самофокусировки цилиндрических импульсов в плазме, сравнению со случаем плоских импульсов и применению метода множества эквивалентности для решения соответствующих некорректных обратных задач.

1. Физическая постановка задачи и математическая модель. В соответствии с уравнениями Максвелла векторы напряженностей **E** и **H** и векторный потенциал **A** переменного электромагнитного поля, распространяющегося в непроводящей среде, удовлетворяют следующему волновому уравнению:

$$\Delta\mathbf{A} = \frac{1}{\nu^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}, \tag{1.1}$$

где $\Delta = \nabla^2 = \operatorname{div}\operatorname{grad}$ — оператор Лапласа (лапласиан), $\nu = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$ — фазовая скорость электромагнитной волны в среде, c — скорость света в вакууме, ε и μ — относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости среды.

В декартовых координатах проекции векторов E, H, A на оси OX, OY, OZ также удовлетворяют уравнению (1.1). Для всех сред, кроме ферромагнитных, $\mu = 1$ и $\nu = c/\sqrt{\varepsilon}$. Поэтому уравнение для амплитуды $A_0\,(x, y, z, t)$ падающего на плазму рентгеновского импульса в декартовых координатах будет иметь вид

$$\frac{\partial^2 A_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_0}{\partial z^2} - \frac{\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2 A_0}{\partial t^2} = 0. \tag{1.2}$$

Представим комплексную функцию амплитуды падающего на плазму рентгеновского импульса в виде

$$A_0(x,y,z,t) = A(x,y,z,t)\exp\left[i(\kappa z - \omega t)\right], \tag{1.3}$$

где $A_0\,(x, y, z, t)$ — медленно меняющаяся амплитуда импульса, ω — несущая частота импульса, $\kappa = \omega / c$ — проекция волнового вектора на ось OZ, i — мнимая единица.

Подставляя выражение (1.3) в уравнение (1.2) и полагая из физики процесса, что медленно меняющаяся амплитуда $A_0\,(x, y, z, t)$ удовлетворяет условиям

$$\left|\frac{\partial^2 A}{\partial z^2}\right| << \kappa\left|\frac{\partial A}{\partial z}\right|,\ \left|\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}\right| << \omega\left|\frac{\partial A}{\partial t}\right|,$$

получаем для нее следующее уравнение:

$$\frac{\partial A}{\partial t}+A\frac{\partial A}{\partial z}-i\frac{c^2}{2\omega}\left[\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A}{\partial y^2}-\kappa^2(\varepsilon-1)A\right]=0\,, \tag{1.4}$$

где диэлектрическая проницаемость ε определяется выражением

$$\varepsilon=\varepsilon(x,y,z,t)=1-\frac{4\pi e^2}{m\omega\left(\omega-2i\delta_e\right)}n\left(x,y,z,t\right).$$

Здесь используются следующие обозначения: $n\,(x, y, z, t)$ — концентрация свободных электронов плазмы, e и m — заряд и масса покоя электрона,$\delta_e = 1/\tau_e$ — эффективная частота соударений, τ_e — средняя продолжительность свободного пробега электронов в плазме.

Важно отметить, что для рентгеновского излучения его несущая частота $\omega >> \delta_e$ и диэлектрическая проницаемость $|\varepsilon|<1$, вследствие чего фазовая скорость распространения волн рентгеновского излучения в плазме $v > c$.

Считая, что продольный пространственный размер импульса $L_p = c\tau_p$ (τ_p — длительность импульса) много больше его поперечного размера $d << L_p$, будем описывать движение свободных электронов плазмы в двумерном квазигазодинамическом приближении в плоскости OXY, перпендикулярной направлению распространения импульса OZ. Движением ионов плазмы при коротких длительностях рентгеновского импульса можно пренебречь. В этом случае уравнения движения плазмы имеют следующий вид:

$$m\left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}+\mathbf{V}\,\mathrm{grad}\,\mathbf{V}\right)=-\frac{2kT}{n}\mathrm{grad}\left(n\right)-e\mathbf{E}-\frac{e^2}{4mc^2}\mathrm{grad}\left|A\right|^2, \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial n}{\partial t}+\mathrm{div}\left(n\mathbf{V}\right)=0\,, \tag{1.6}$$

$$\mathrm{div}\mathbf{E}=-\frac{4\pi e}{\varepsilon_0}\left(n-n_0\right), \tag{1.7}$$

где n и $\mathbf{V}$ — концентрация и скорость свободных электронов плазмы, $\mathbf{E}$ — вектор напряженности кулоновского электрического поля, n_0 — равновесное значение концентрации электронов, e_0 — низкочастотная диэлектрическая проницаемость.

Операторы grad и div в уравнениях (1.5) — (1.7) действуют в плоскости независимых переменных x и y, перпендикулярной направлению распространения импульса, и соответственно не содержат производных по продольной координате z.

Уравнение (1.5) было выведено в предположении, что электронная температура T остается постоянной, а давление P совпадает с давлением идеального газа электронов: $P = 2kTn$. Последний член в правой части (1.5) есть пондеромоторная сила $\mathbf{F} = -\mathrm{grad}(U)$, где пондеромоторный потенциал $U\,(x, y, z, t)$ определяется выражением

$$U(x,y,z,t)=\frac{e^2}{4mc^2}\left|A(x,y,z,t)\right|^2.$$

Уравнение (1.6) следует из закона сохранения массы и заряда свободных электронов плазмы в дифференциальной форме:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \operatorname{div}(p\mathbf{V}) = 0, \quad p = p(x,y,z,t) = n(x,y,z,t)e\,,$$

где p (не путать с ρ) — плотность зарядов свободных электронов плазмы.

Выражение (1.7) выводится из уравнений Максвелла для вектора напряженности электрического поля $\mathbf{E}$, возникающего в результате нарушения квазинейтральности плазмы в процессе прохождения импульса:

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = \frac{4\pi}{\varepsilon_0} p_0, \quad p_0 = -e(n - n_0).$$

Уравнения (1.4)–(1.7) представляют собой замкнутую систему дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка для четырех функций

$$(E, C, z, t),\ V(x, C, z, t),\ n(E, C, z, t),\ E(E, C, z, t).$$

Эта система описывает процесс самофокусировки объемного рентгеновского импульса в плазме с учетом динамики электронной компоненты плазмы в квазигазодинамическом приближении.

Перейдем в системе (1.4)–(1.7) к цилиндрическим координатам, тогда

$$x = \rho\cos\varphi,\ \ y = \rho\sin\varphi,\ \ z = z,\ \ t = t.$$

По определению, интенсивность цилиндрического импульса

$$I(\rho,z,t) = |A(\rho,z,t)|^2 = (\operatorname{Re} A)^2 + (\operatorname{Im} A)^2$$

и медленно меняющаяся амплитуда $A(p, z, t)$ обладают описанными выше свойствами симметрии относительно направления распространения импульса OZ, вследствие чего и весь исследуемый процесс приобретает указанные свойства, включая независимость от угла φ. Поэтому для цилиндрических импульсов первые и вторые частные производные функций

$$A(\rho,z,t),\ V(\rho,z,t),\ n(\rho,z,t),\ E(\rho,z,t)$$

по углу φ будут тождественно равны нулю:

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi} \equiv 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \equiv 0.$$

Учитывая сказанное, после проведения необходимых преобразований по переходу в системе уравнений (1.4)-(1.7) к цилиндрической системе координат и безразмерным нормированным величинам окончательно получаем следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial z} - i\delta\left(\frac{\partial^2 A}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A}{\partial \rho} - \nu n A\right) = 0, \tag{1.8}$$

$$n\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \alpha V \frac{\partial V}{\partial \rho}\right) = -\alpha\frac{\partial n}{\partial \rho} - n\left(\beta E + \gamma\frac{\partial |A|^2}{\partial \rho}\right), \tag{1.9}$$

$$\rho\frac{\partial n}{\partial t} = -\alpha\frac{\partial (n V \rho)}{\partial \rho} \tag{1.10}$$

$$\frac{\partial (E\rho)}{\partial \rho} = \rho(1 - n) \tag{1.11}$$

где $A(\rho,z,t), V(\rho,z,t), n(\rho,z,t), E(\rho,z,t)$ определены выше, α, β, γ, δ, ν — параметры модели, приведенные ниже в размерном виде, i — мнимая единица.

Система уравнений (1.8)-(1.11) дополняется следующими начальными и граничными условиями:

$$
\begin{aligned}
&A(\rho, z>0, t=0)=0,\ V(\rho, z>0, t=0)=0,\\
&E(\rho, z>0, t=0)=0,\ n(\rho, z>0, t=0)=1,\\
&A(\rho, z=0, t)=\frac{1}{\cosh\rho}\exp\left[-(t-t_0)^2/2\right],\\
&\frac{\partial A}{\partial \rho}(\rho,z,t)\bigg|_{\rho=0,\rho\to\infty}=0,\ \frac{\partial n}{\partial \rho}(\rho,z,t)\bigg|_{\rho=0,\rho\to\infty}=0,\\
&V(\rho,z,t)\Big|_{\rho=0,\rho\to\infty}=0,\quad E(\rho,z,t)\Big|_{\rho=0,\rho\to\infty}=0.
\end{aligned}
\tag{1.12}
$$

В системе (1.8)–(1.12) используется следующая нормировка независимых переменных и неизвестных функций:

$$t^{'}=t/\tau_\rho,\ z^{'}=z/c\tau_\rho,\ \rho^{'}=\rho/d,$$

где τ_ρ — длительность падающего импульса, а d — его поперечный размер. При этом

$$A^{'}=A/A_0,\ V^{'}=V/V_0,\ n^{'}=n/n_0,\ E^{'}=E/E_0,$$

где

$$A_0=\sqrt{4\pi c I_0/\omega^2},\quad V_0=\sqrt{2kT/m,}\ n_0=n(\rho,z,0),\ E_0=4\pi e n_0 d/\varepsilon_0.$$

Система уравнений (1.8)-(1.12) записана в безразмерных нормированных величинах. Штрихи над ними опущены для простоты изложения:

$$
\begin{gathered}
\alpha=\frac{V_0\tau_\rho}{d},\ \beta=\frac{4\pi e^2 n_0 d\tau_\rho}{mV_0\varepsilon_0},\ \gamma=\frac{\pi e^2\tau_\rho I_0}{m^2\omega^2 c V_0 d},\\
\delta=\frac{c^2\tau_\rho}{2d^2\omega},\quad \nu=\frac{\omega_\rho^2 d^2}{c^2},
\end{gathered}
\tag{1.13}
$$

где $\omega_\rho^2=\dfrac{4\pi e^2 n_0}{m}$ — плазменная частота, e и m — заряд и масса покоя электрона, n_0 — начальное значение концентрации свободных электронов плазмы, ε_0 — низкочастотная диэлектрическая проницаемость, I_0 — максимальная интенсивность входного импульса.

2. Вычислительный метод решения. Система (1.8)–(1.12) решалась разностным методом, аналогичным описанному в [25,26]. Важным достоинством предложенных в этих работах метода и алгоритма является возможность проведения прямых (безытерационных) вычислений по симметричной и, вообще говоря, неявной разностной схеме с весами второго порядка аппроксимации. Другими словами, приведенные разностная схема и алгоритм вычислений по ней позволяют находить значения всех неизвестных функций на каждом слое по z и по t, не прибегая к итерационному процессу. Это существенно сокращает время вычислений, сохраняя при этом второй порядок аппроксимации по шагам схемы.

В пространстве независимых переменных ρ, z, t были введены сетки с шагами h, h_z, τ соответственно и построена разностная схема. Для каждого из уравнений системы (1.8)–(1.11) были составлены соответствующие симметричные разностные уравнения второго порядка аппроксимации по h, h_z, τ. Начальные и граничные условия (1.12) также были аппроксимированы не менее чем со вторым порядком.

Рассмотрим построенную разностную схему на примере наиболее сложного уравнения (1.8) для медленно меняющейся амплитуды импульса $A(\rho, z, t)$, в которое в цилиндрической системе координат по сравнению со случаем плоских импульсов вошел дополнительный оператор

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial A}{\partial \rho}.$$

Оно было аппроксимировано разностным уравнением

$$\begin{gathered}\frac{1}{2i\delta}\left(\frac{B_i^j - A_i^j + B_i^{j-1} - A_i^{j-1}}{\tau} + \frac{B_i^j - B_i^{j-1} + A_i^j - A_i^{j-1}}{h}\right) = \\ = \frac{1}{2}\Lambda\left(\left(B_i^j + A_i^{j-1}\right) + \frac{1}{\rho_i}\left(\frac{B_{i+1}^j - B_{i-1}^j + A_{i+1}^{j-1} - A_{i-1}^{j-1}}{4h_z}\right) - \right. \\ \left. - \frac{\nu}{4}\left(\overline{B_i^j} + \overline{A_i^{j-1}}\right)\left(\overline{\hat{n}_i^j} + \overline{n_i^{j-1}}\right)\right),\end{gathered} \tag{2.1}$$

где используются следующие обозначения: A_i^j — значение сеточной функции $A(i, j, \kappa)$ в узле (ρ_i, z_i, t_i) сетки

$$\begin{gathered}\omega_{h,h_z,\tau} = \omega_h \times \omega_{h_z} \times \omega_\tau = \\ = \left\{\left(ih, jh_z, k\tau\right), i = \overline{0, N_\rho}, j = \overline{0, N_z}, k = 0,1,2,3,\ldots\right\},\end{gathered}$$

$\widehat{A}_i^j$ — значение этой функции на следующем слое по времени в узле (ρ_i, z_i, t_{k+1}); $\overline{A_i^j} = \sigma A_{i+1}^j + (1-2\sigma)A_i^j + \sigma A_{i-1}^j$, где σ — вес схемы; разностный оператор Λ определяется следующим образом:

$$\Lambda\left(A_i^j\right) = \left(A_{i+1}^j - 2A_i^j + A_{i-1}^j\right)/h^2.$$

Значения веса схемы σ брались из отрезка $0 \le \sigma \le 1/3$. Например, при линейной интерполяции функции (ρ, z, t) на отрезке $\rho \in [\rho_{i-1}, \rho_{i+1}]$ по значениям сеточной функции A_i^j в узлах $(i-1, j, k)$, (i, j, k), $(i+1, j, k)$ получим значение веса схемы $\sigma = 1/4$. Квадратичная интерполяция дает значение веса $\sigma = 1/6$. Как показали многочисленные вычислительные эксперименты, выбор различных значений веса схемы в диапазоне $1/6 \le \sigma \le 1/4$ не оказывает существенного влияния на поведение решения задачи.

Уравнения (1.9)–(1.11) были аппроксимированы аналогичным образом. Подобные разностные уравнения и безытерационный метод решения для случая плоских импульсов подробно описаны в работах [25, 26]. Таким образом, была построена нелинейная симметричная разностная схема с весами, аппроксимирующая систему (1.8)–(1.12) со вторым порядком по шагам h, h_z, τ.

В конструкции рассмотренной на примере уравнения (2.1) разностной схемы часто используется аппроксимация различных функций и их производных в промежуточных точках в виде средних арифметических их значений в симметричных относительно этих точек узлах сетки. Второй порядок аппроксимации схемы вытекает из следующей теоремы, которая для общности сформулирована в применении к многомерным сеткам в пространстве R^n.

Т е о р е м а (о втором порядке аппроксимации в средней точке). Пусть даны сетки

$$\omega_{h_1} = \left\{x_1^{i_1} = i_1 h_1, i_1 = 0,1,2,\ldots\right\},\ldots,\omega_{h_n} = \left\{x_n^{i_n} = i_n h_n, i_n = 0,1,2,\ldots\right\}$$

и общая сетка в пространстве R^n:

$$\omega_{h_1,\ldots,h_n} = \omega_{h_1} \times \ldots \times \omega_{h_n} = \left\{\left(i_1 h_1,\ldots,i_n h_n\right)\right\}.$$

Тогда если сеточные функции $y_1(i_1,\ldots,i_n)$ аппроксимируют функцию $f(x_1,\ldots,x_n)$ со вторым или бо́льшим порядком по шагам $h_1,\ldots,h_n$ сетки $\omega_{h_1,\ldots,h_n}$ в узлах $(i_1,\ldots,i_n)$ и $\left(i_1 + S_1,\ldots,i_n + S_n\right)$ соответственно, где $S_1,\ldots,S_n$ — целые числа, то сеточная функция $g\left(i_1,\ldots,i_n\right)$, определяемая уравнением

$$g\left(i_1,\ldots,i_n\right) = \left[y_1\left(i_1,\ldots,i_n\right) + y_2\left(i_1 + S_1,\ldots,i_n + S_n\right)\right] / 2,$$

будет аппроксимировать функцию $f(x_1,\ldots,x_n)$ со вторым порядком по шагам $h_1,\ldots,h_n$ сетки $\omega_{h_1,\ldots,h_n}$ в средней точке

$$M = \left(h_1\left(i_1 + S_1/2\right),\ldots,h_n\left(i_n + S_n/2\right)\right).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим прямую $l \in R^n$, определяемую следующим параметрическим уравнением:

$$l(t) = \left[t\begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \cdots \\ S_{n-1} \\ S_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \cdots \\ i_{n-1} \\ i_n \end{pmatrix}\right]\left(h_1,\ldots,h_n\right), \quad t \in R^1.$$

Введем на этой прямую вспомогательную сетку ω_τ:

$$\omega_\tau = \left\{\begin{array}{c} x_1^j = \left(jS_1 + i_1\right)h_1 \\ x_2^j = \left(jS_2 + i_2\right)h_2 \\ \ldots \\ x_n^j = \left(jS_n + i_n\right)h_n, \\ \left|l(0),l(j)\right| = \tau j,\ j = 0,1,\ldots \end{array}\right\},$$

где шаг сетки $\tau = \sqrt{\left(h_1 S_1\right)^2 + \ldots + \left(h_n S_n\right)^2}$.

Отметим, что узлы $(i_1,\ldots,i_n)$ общей сетки $\omega_{h_1,\ldots,h_n}$ совпадают с узлами $j = 0$ и $j = 1$ вспомогательной сетки ω_τ и множество всех узлов сетки ω_τ принадлежит множеству узлов сетки $\omega_{h_1,\ldots,h_n}$ $\left(\omega_\tau \in \omega_{h_1,\ldots,h_n}\right)$.

Разложим в ряд Тейлора функцию $g(i_1,\ldots,i_n)$ в точке $M = (h_1(i_1 + S_1 / 2),\ldots,h_n(i_n + S_n / 2) = l(1 / 2)$ вдоль прямой $l(t)$. По условию теоремы

$$g(i_1,\dots,i_n) = \left[y_1(i_1,\dots,i_n) + y_2(i_1 + S_1,\dots,i_n + S_n)\right]/2 =$$
$$= \left[f(h_1 i_1,\dots,h_n i_n) + f(h_1(i_1 + S_1),\dots,h_n(i_n + S_n)) + O\left(h_1^2,\dots,h_n^2\right)\right]/2 =$$
$$= \left[f(l(0)) + f(l(1))\right]/2 + O\left(h_1^2,\dots,h_n^2\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left[f(l(1/2)) - \left[f(l(1/2))\right]_l^{'}\tau/2 + \left[f(l(1/2))\right]_{ll}^{''}\tau^2/8 + o(\tau^2)\right] +$$
$$+ \frac{1}{2}\left[f(l(1/2)) + \left[f(l(1/2))\right]_l^{'}\tau/2 + \left[f(l(1/2))\right]_{ll}^{''}\tau^2/8 + o(\tau^2)\right] +$$
$$+ O\left(h_1^2,\dots,h_n^2\right) =$$
$$= f(l(1/2)) + \left[f(l(1/2))\right]_{ll}^{''}\tau^2/8 + o(\tau^2) + O\left(h_1^2,\dots,h_n^2\right) =$$
$$= f(M) + O\left((h_1 S_1)^2 + \dots + (h_n S_n)^2\right) +$$
$$+ O\left(h_1^2,\dots,h_n^2\right) = f(M) + O\left(h_1^2,\dots,h_n^2\right).$$

Теорема доказана.

3. Анализ результатов вычислительных экспериментов. В результате проведенных расчетов по построенной разностной схеме было исследовано поведение решения задачи (1.8)—(1.12) в зависимости от параметров $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \nu$ что позволило найти физически достижимые значения параметров, при которых интенсивность как плоских (рис. 1), так и цилиндрических (рис. 2) импульсов существенно возрастает. Подробное описание зависимости поведения решения от параметров задачи в случае плоских импульсов приведено в работах [25,26]. Проведенные вычислительные эксперименты для цилиндрических импульсов при различных значениях шагов схемы h, h_z, τ, размерах сеток по осям ρ и z и значениях параметров $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \nu$ подтвердили на практике устойчивость и сходимость предложенной разностной схемы, а также надежность и эффективность разработанного безытерационного алгоритма вычислений.

Сравнение полученных результатов с реальными физическими экспериментами показало высокую точность предлагаемой математической модели и метода решения соответствующей прямой задачи. В данной работе исследовались пикосекундные рентгеновские импульсы. В ходе многочисленных вычислительных экспериментов были рассмотрены различные значения обобщенных параметров задачи $\alpha, \beta, \gamma, \delta, v$. В абсолютных величинах длительность импульса τ_p выбиралась в диапазоне от 0,5 до 10 пс (10^{-12} с), линейная несущая частота рентгеновского импульса ν — в диапазоне от $5 \cdot 10^{17}$ до $5 \cdot 10^{19}$, что соответствует диапазону изменения циклической частоты $\omega = 2\pi\nu$ от $\pi \cdot 10^{18}$ до $\pi \cdot 10^{20}$. Таким образом, длительность импульса была больше времени одного колебания волны рентгеновского излучения приблизительно в 10000 — 10000000 раз.

Результаты вычислений представлены на рис. 1 и 2, иллюстрирующих процесс самофокусировки плоских и цилиндрических импульсов соответственно. Кривые в нижней части графиков показывают значения интенсивности вдоль оси импульса в направлении его распространения OZ. Максимальные значения интенсивности достигаются, как правило, на этой прямой.

На рис. 1 показана пространственная динамика интенсивности плоского импульса $I(x,z,t)$ по мере его продвижения в плазме в различные моменты времени:

$t = t_0 = 2.0$ (рис. 1, a, максимальная интенсивность на входе в плазму $\max I(x,z,t_0) = I_0 = 1.0$),

$t = t_1 = 2.9$ (рис. 1, b),

$t = t_2 = 3.1$ (рис. 1, c),

$t = t_3 = 3.4$ (рис. 1, d),

$t = t_4 = 3.85$ (рис. 1, e, максимальная интенсивность, достигнутая в результате самофокусировки, $\max\limits_{x,z} I(x,z,t_4) = I_{\max} \approx 10.5$).

Как видно из графиков, максимальная интенсивность импульса на выходе из плазмы увеличилась в 10.5 раз. При этом брались следующие значения параметров задачи:

$$\alpha = 1.0,\ \beta = 1.0,\ \gamma = 0.25,\ \delta = 0.1,\ \nu = 300. \tag{3.1}$$

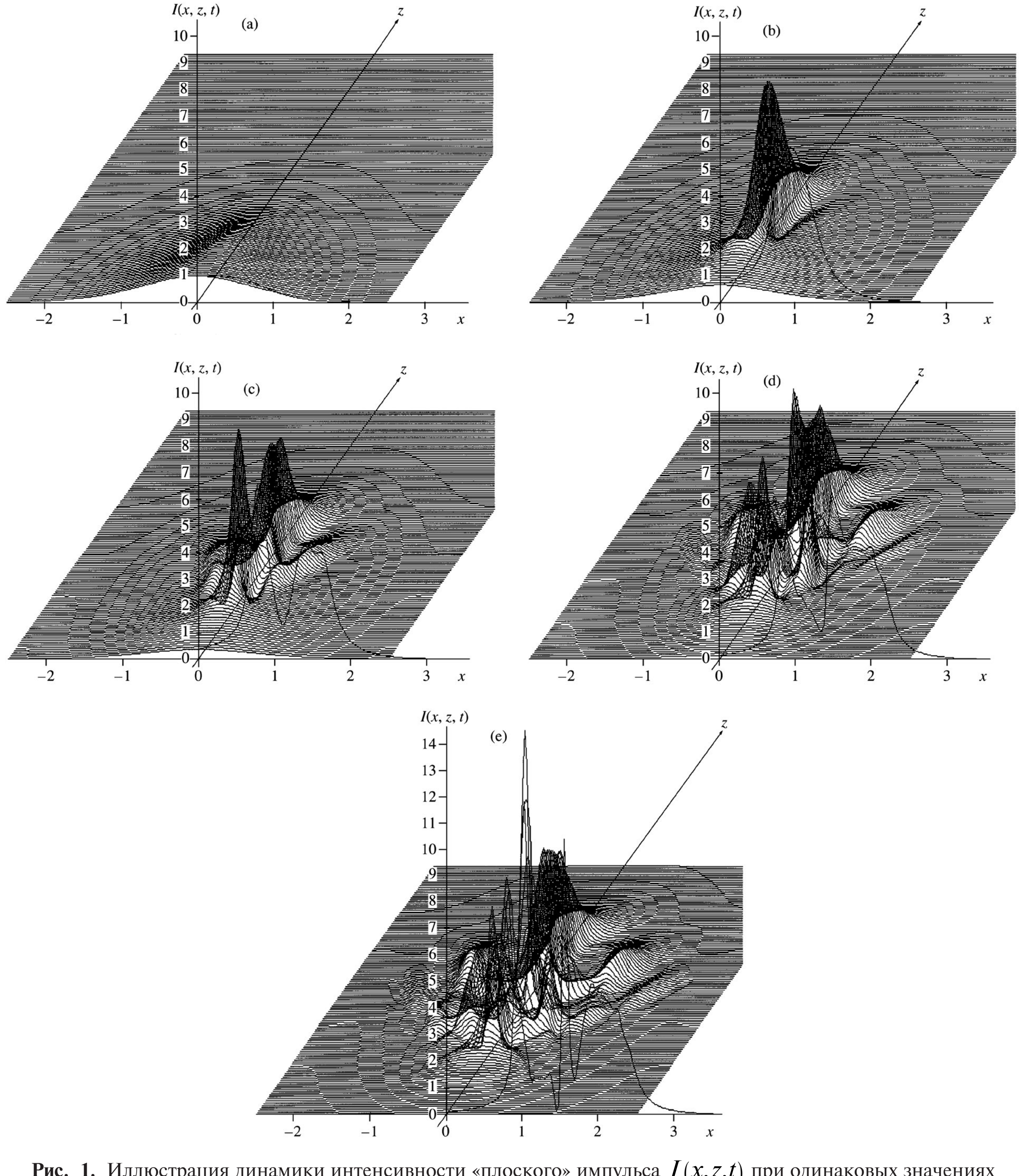


Рис. 1. Иллюстрация динамики интенсивности «плоского» импульса $I(x,z,t)$ при одинаковых значениях параметров задачи $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \nu$ в разные моменты времени: $t = t_0 = 2.0$ (a), $t = t_1 = 2.9$ (b), $t = t_2 = 3.1$ (c), $t = t_3 = 3.4$ (d), $t = t_4 = 3.85$ (e)

Рисунок 2 иллюстрирует исследуемый процесс в случае объемных, цилиндрических импульсов. Трехмерные графики интенсивности цилиндрического импульса $I(\rho, z, t)$ соответствуют следующим моментам времени:

$t = t_0 = 2.0$ (рис. 2, a), максимальная интенсивность на входе в плазму $\max\limits_{\rho, z} I(\rho, z, t_0) = I_0 = 1.0)$,

$t = t_1 = 2.9$ (рис. 2, b),
$t = t_2 = 3.1$ (рис. 2, c),
$t = t_3 = 3.4$ (рис. 2, d),

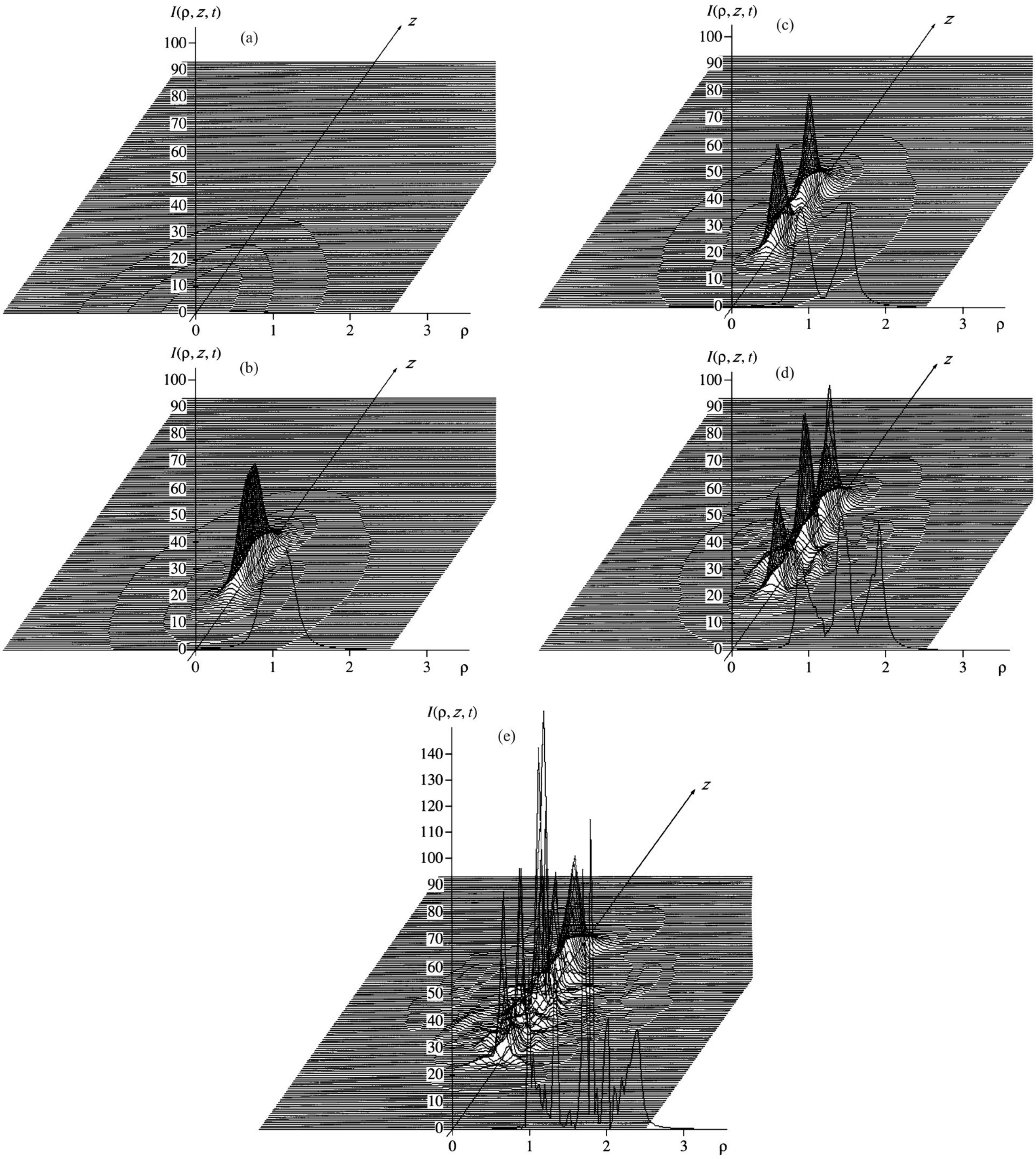


Рис. 2. Иллюстрация динамики интенсивности цилиндрического импульса $I(x,z,t)$ при одинаковых значениях параметров задачи $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \nu$ в разные моменты времени: $t = t_0 = 2.0$ (a), $t = t_1 = 2.9$ (b), $t = t_2 = 3.1$ (c), $t = t_3 = 3.4$ (d), $t = t_4 = 3.85$ (e)

$t = t_4 = 3.85$ (рис. 2, e, максимальная интенсивность, достигнутая в результате самофокусировки, $\max I(\rho, z, t_4) = I_{\max} \approx 115)$.

На этих пяти графиках тонкой линией вдоль оси ρ показан график интенсивности центральной части импульса $I\left(\rho = 0,\ z,\ t = t_{i=0,\ldots,4}\right)$. Из графиков видно, что в различные моменты времени максимальная интенсивность центральной части импульса достигает следующих значений:

$I_{\max}\left(\rho = 0, z, t = t_0 = 2.0\right) = 1.0$,

$I_{\max}\left(\rho = 0, z, t = t_1 = 2.9\right) \approx 37$,

$I_{\max}\left(\rho = 0, z, t = t_2 = 3.1\right) \approx 40$,
$I_{\max}\left(\rho = 0, z, t = t_3 = 3.4\right) \approx 50$,
$I_{\max}\left(\rho = 0, z, t = t_4 = 3.85\right) \approx 115$.

Итак, в случае цилиндрического импульса его максимальная интенсивность возросла в 115 раз. Значения параметров $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \nu$ те же самые (3.1), что и в случае плоского импульса из рис. 1. Для вычисления функций, изображенных на рис. 1 и 2, брались следующие шаги разностных схем: $h = h_z = \tau = 0.025$.

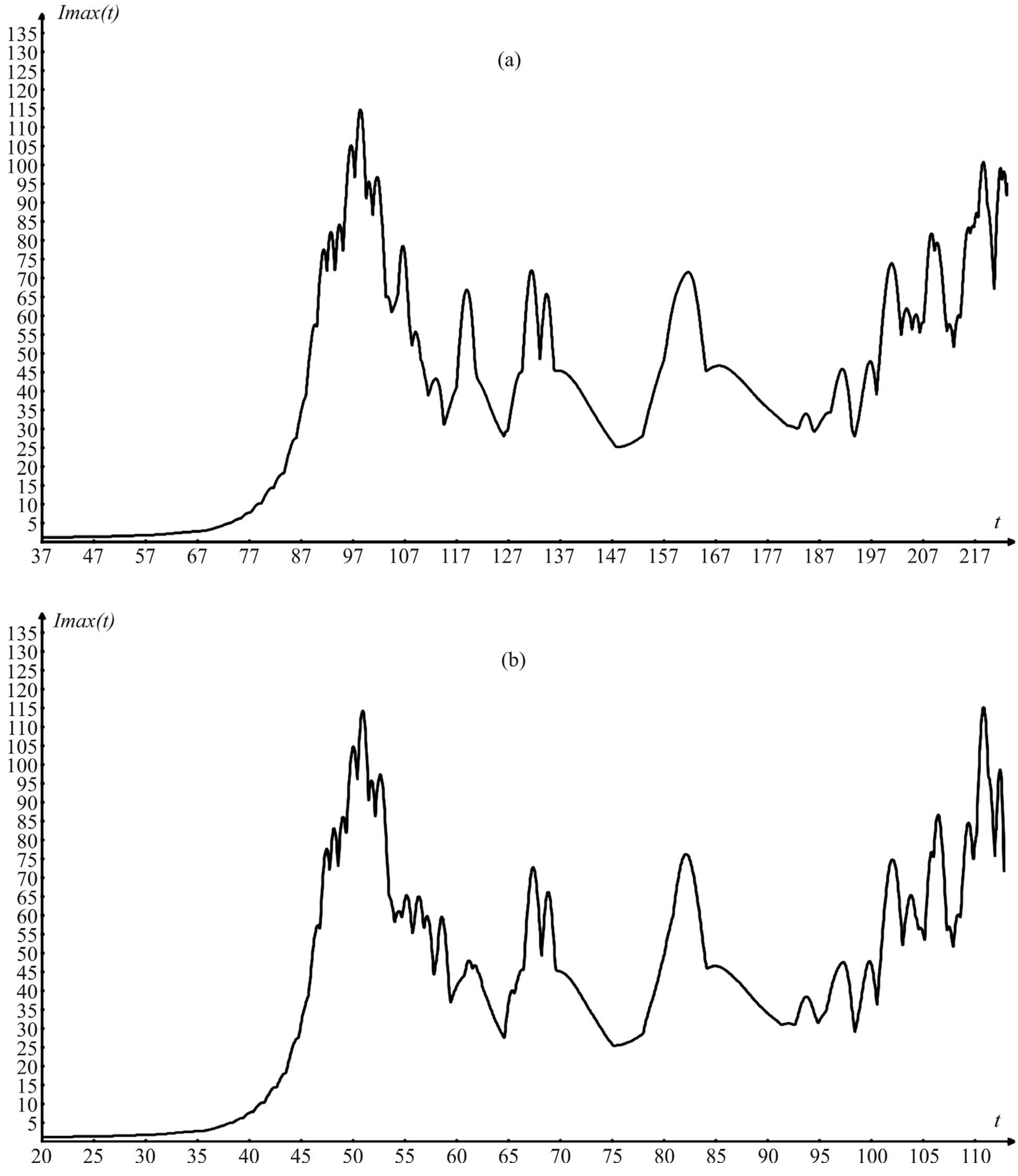


Рис. 3. Динамика максимальной интенсивности цилиндрического импульса при ∂ равном: 0.001 (a), 0.002 (b),

4. Асимптотическая устойчивость разностной схемы. Приведем пример, экспериментально подтверждающий асимптотическую устойчивость используемой разностной схемы в случае цилиндрических импульсов. Как и в случае плоских импульсов, параметр δ определяет дифракционное расплывание пучка, и поэтому из физических соображений обратно пропорционален длине фокусировки, т.е. длине, на которой наступает максимальное сжатие пучка. После этого начинается режим насыщения, во время которого максимальная интенсивность импульса циклически изменяется, как это видно из графиков на рис. 3,a-j, полученных

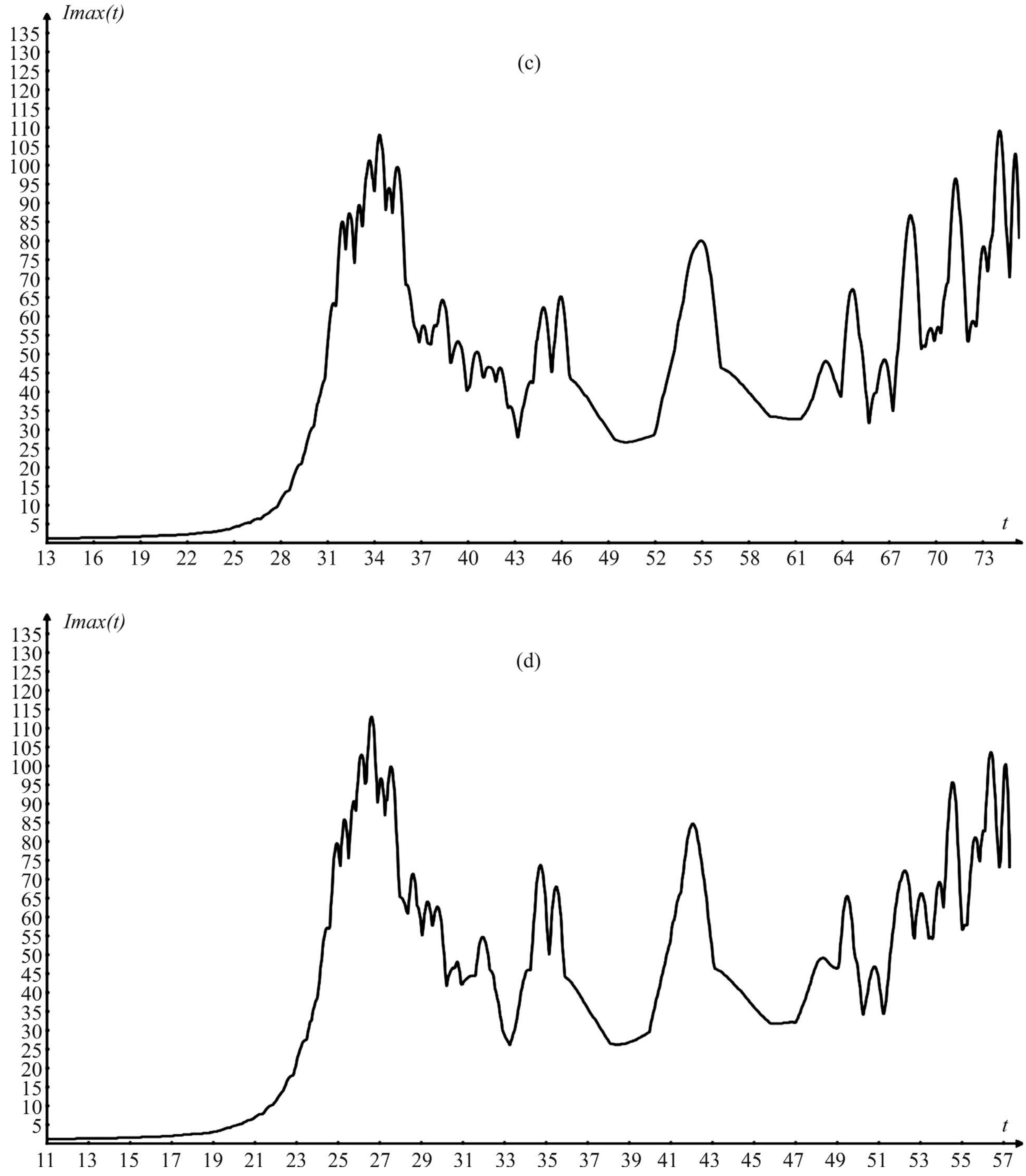
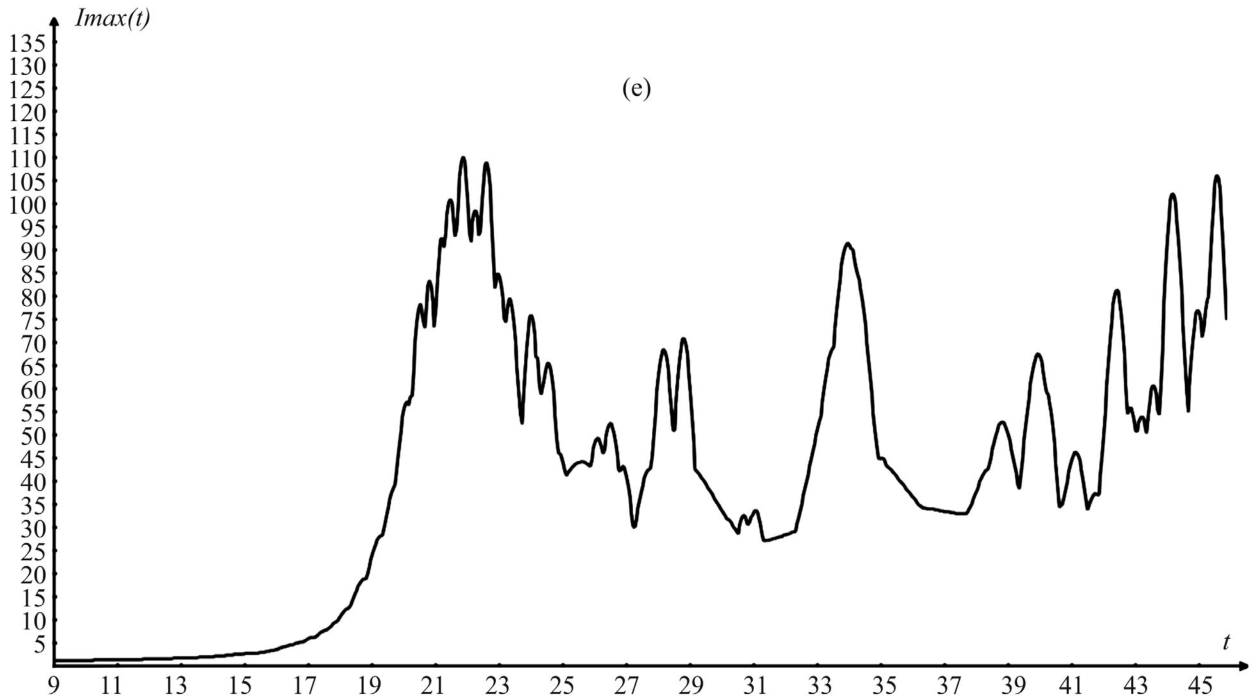


Рис. 3 (продолжение). Динамика максимальной интенсивности цилиндрического импульса при ∂ равном: 0.003 (c), 0.004 (d)

в результате вычислений. На этих графиках показана динамика максимальной интенсивности цилиндрического импульса на дальних дистанциях при различных значениях параметра δ, отвечающего за длину фокусировки.

Из графиков на рис. 3, a-j видно, что при увеличении значения параметра δ длина фокусировки пропорционально уменьшается. Такое поведение решения свидетельствует также об асимптотической устойчивости построенной разностной схемы, так как все остальные параметры, кроме δ, остаются неизменными, при том что график на рис. 3, а рассчитывается



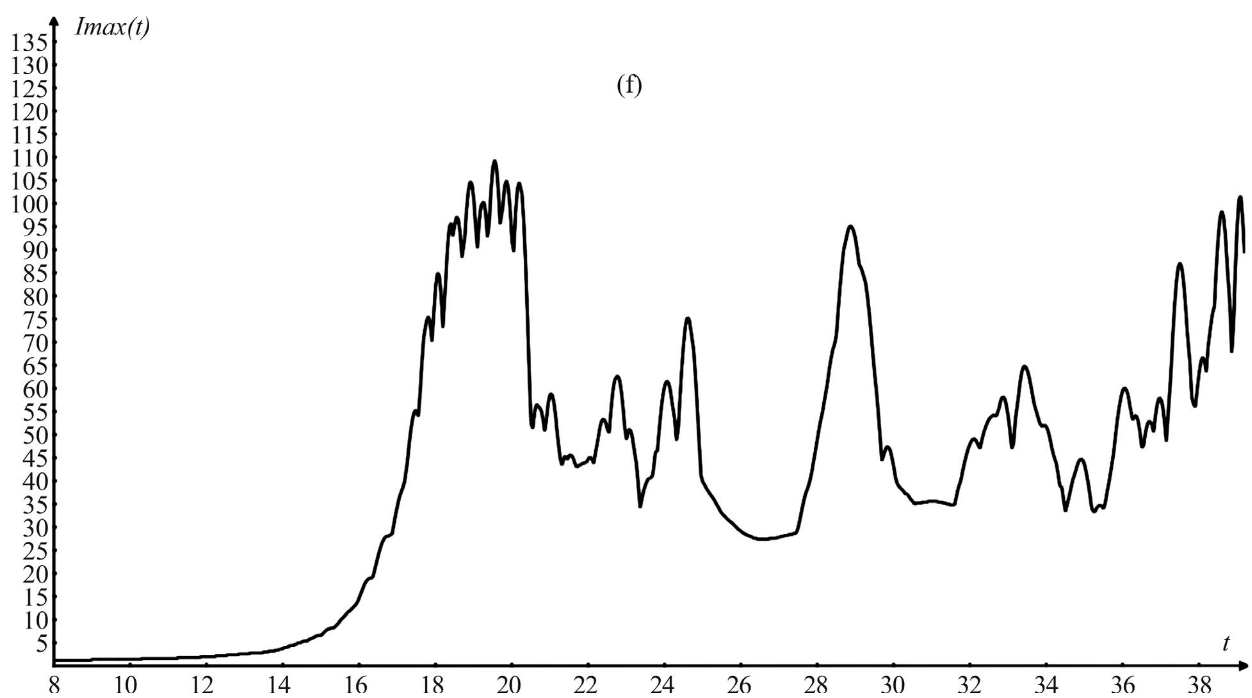
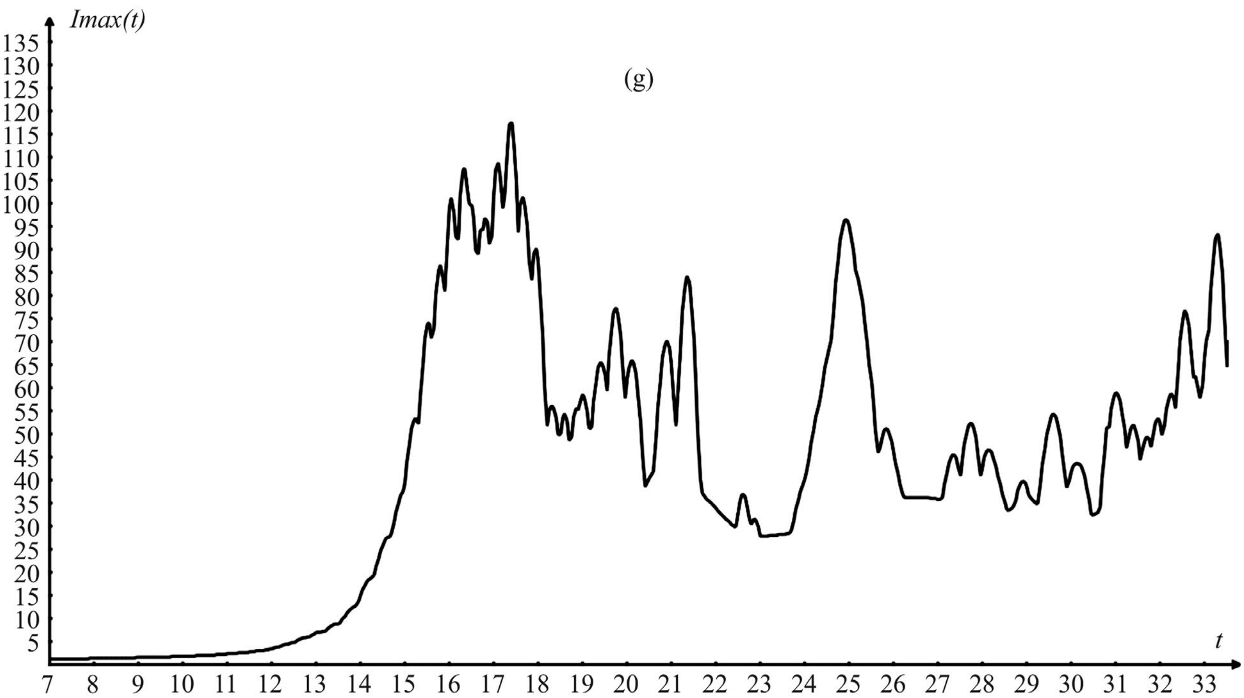


Рис. 3 (продолжение). Динамика максимальной интенсивности цилиндрического импульса при ∂ равном: 0.005 (e), 0.006 (f)

в 10 раз дольше, чем на рис. 3, j, т.е. для его вычисления надо сделать в 10 раз больше шагов по времени t и глубине z. Некоторые отличия графиков на рис. 3,a-j при различных значениях параметра δ связаны с существенной нелинейностью процесса самофокусировки цилиндрических импульсов в плазме, а также с тем, что (как и в случае плоских импульсов) чем больше параметр δ, тем меньше длина фокусировки и тем менее плавно свободные электроны плазмы «отслеживают» изменения формы импульса.



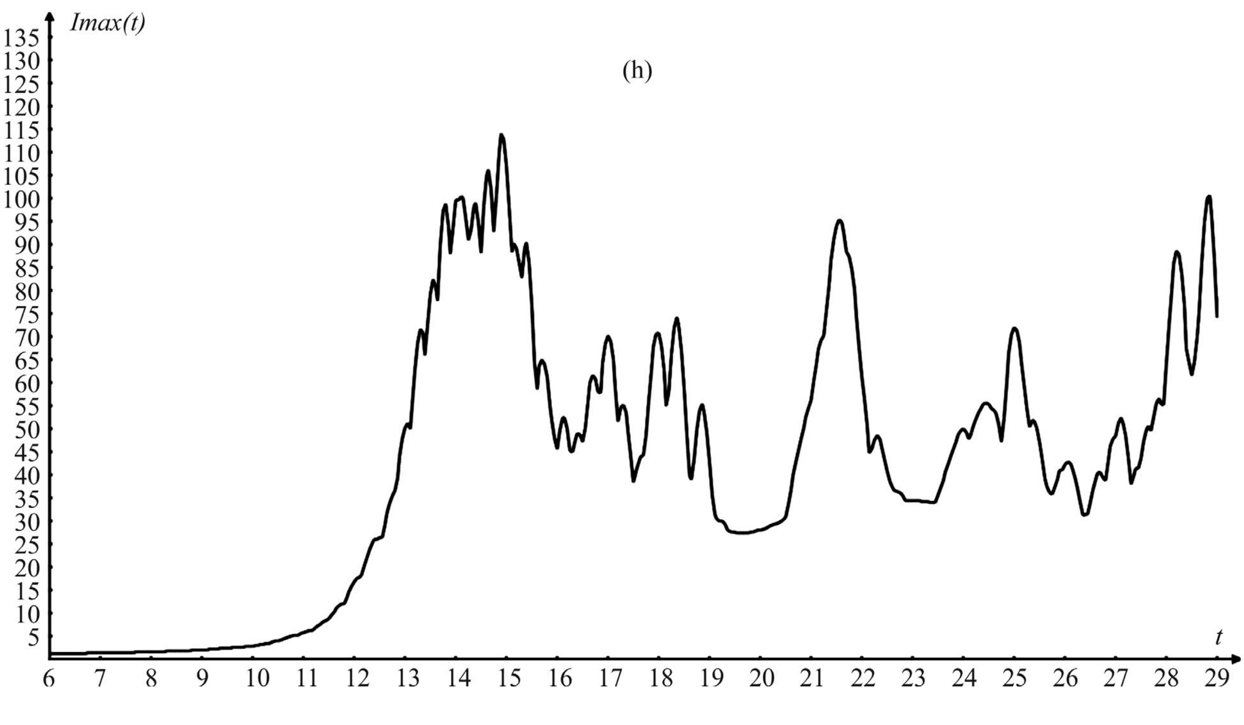


Рис. 3 (продолжение). Динамика максимальной интенсивности цилиндрического импульса при ∂ равном: 0.007 (g), 0.008 (h)

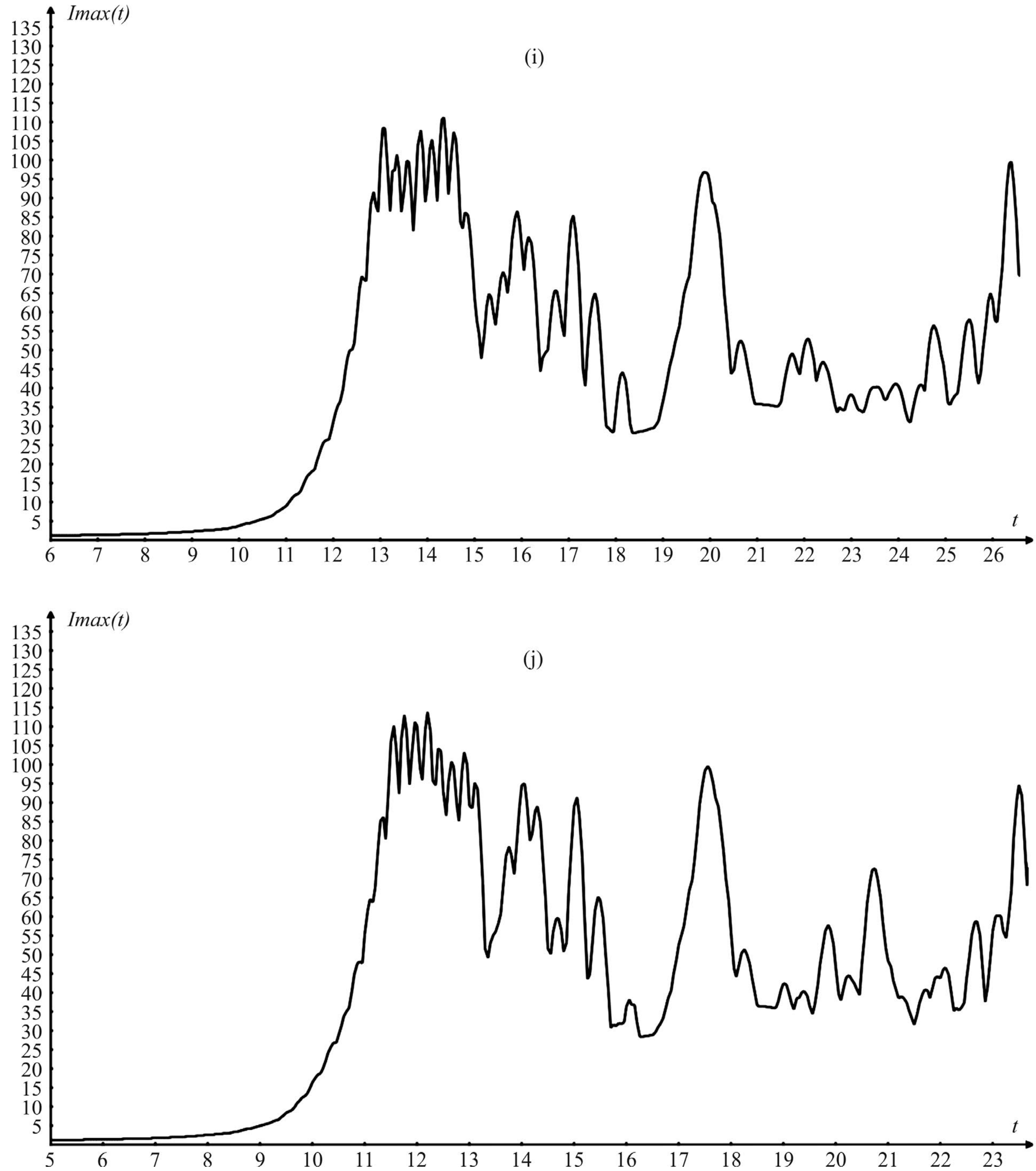


Рис. 3 (окончание). Динамика максимальной интенсивности цилиндрического импульса при ∂ равном: 0.009 (i), 0.010 (j)

5. Аналитическое обоснование усиления эффекта самофокусировки цилиндрических импульсов по сравнению с плоскими. Из рис. 1 и 2 видно, что при одинаковых значениях параметров задачи в результате самофокусировки интенсивность цилиндрического импульса увеличивается на порядок больше, чем интенсивность плоского.

Как показали многочисленные вычислительные эксперименты, это является весьма характерным при сравнении процессов самофокусировки плоских и цилиндрических рентгеновских импульсов в плазме. В результате такого сравнения была выявлена следующая закономерность:

Если в процессе самофокусировки интенсивность плоского импульса увеличилась в M раз, то при тех же значениях параметров задачи интенсивность цилиндрического импульса увеличится приблизительно в M^2 раз.

Этот результат на качественном уровне объясняется тем, что по физическому смыслу задачи в процессе самофокусировки должен выполняться закон сохранения энергии рентгеновского импульса. В цилиндрическом случае по сравнению с плоским появляется дополнительная поперечная координата, вдоль которой происходит сжатие. В связи с этим, согласно закону сохранения энергии, если при одинаковом уменьшении поперечного размера интенсивность плоского импульса увеличилась в M раз, то интенсивность цилиндрического должна увеличиться в M^2 раз, что проиллюстрировано на рис. 4.

К тем же выводам приводит сравнительный анализ уравнения для амплитуды импульса (1.8) в плоском и цилиндрическом случаях. Запишем его в следующем виде:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial z}\right)A = i\delta\begin{cases}\dfrac{\partial^2 A}{\partial x^2}-\nu nA & \text{(плоский случай)},\\[2ex] \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial A}{\partial\rho}\right)-\nu nA & \text{(цилиндрический случай)}.\end{cases} \tag{5.1}$$

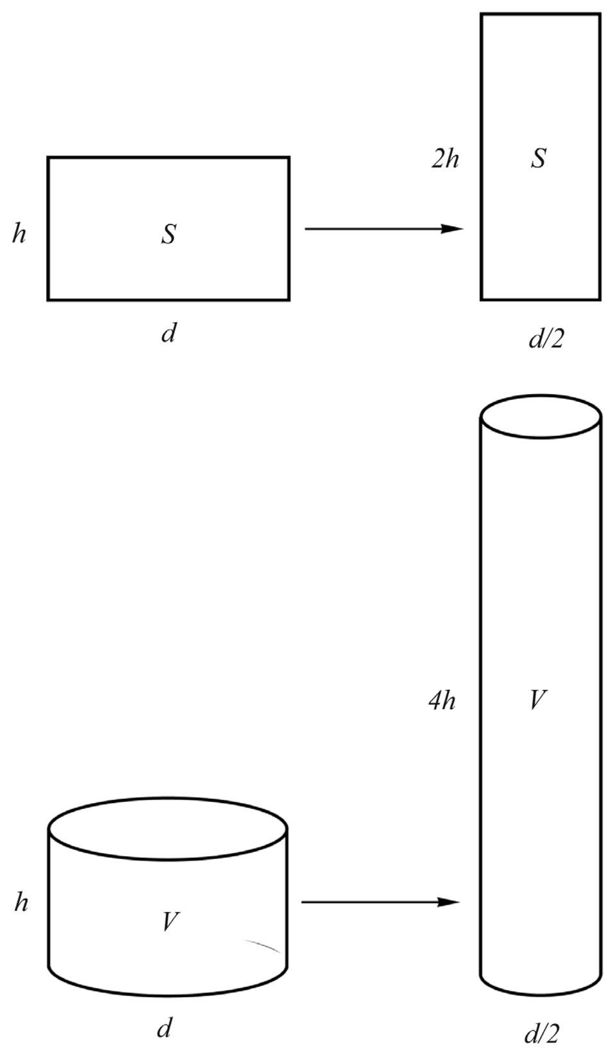


Рис. 4. Сравнение самофокусировки плоских и цилиндрических импульсов

Упростим уравнение (5.1), полагая, что функции амплитуды импульса A и концентрации свободных электронов плазмы n являются ступенчатыми по поперечным координатам и определяются следующим образом:

$$A = \begin{cases} A_1(z,t), & |x| \le d/2 \ (\rho \le d/2), \\ 0, & |x| > d/2 \ (\rho > d/2), \end{cases}$$
$$n = \begin{cases} 0, & |x| \le d/2 \ (\rho \le d/2), \\ n_1(z,t), & |x| > d/2 \ (\rho > d/2), \end{cases} \quad (5.2)$$

где $d = d(z,t)$ — поперечный размер импульса. Здесь использовался тот факт, что, как показали вычислительные эксперименты, по мере продвижения импульса пространственное распределение концентрации свободных электронов плазмы повторяет форму импульса: локальные максимумы интенсивности соответствуют локальным минимумам концентрации и наоборот. Более того, в областях достаточно высокой интенсивности импульса концентрация свободных электронов плазмы может понижаться до нуля.

Из (5.2) следует, что для любых x или ρ и значений параметра ν последнее слагаемое в правой части (5.1) будет равно нулю: $\nu n A = 0$. Интегрируя (5.1) по x в плоском случае и по ρ в цилиндрическом, с учетом (1.1) получаем

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\right)\int_{-d/2}^{d/2} A dx = 0 \ (\text{плоский случай}),$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\right)\int_{0}^{d/2} A \rho d\rho = 0 \ (\text{цилиндрический случай}). \quad (5.3)$$

Из (5.3) вытекает, что вдоль характеристики $z = t$ выполняются следующие законы сохранения:

$$\int_{-d/2}^{d/2} A dx = C_1 = \text{const} \ (\text{плоский случай}),$$
$$\int_{0}^{d/2} A \rho d\rho = C_2 = \text{const} \ (\text{цилиндрический случай}). \quad (5.4)$$

Подставив выражение для функции A из (5.2) в (5.4), после интегрирования окончательно получим

$$A_1(z = t) = C_1/d(z = t) \ \text{ для плоских импульсов}, \quad (5.5)$$

$$A_1(z = t) = 8C_2/d^2(z = t) \ \text{ для цилиндрических импульсов.}$$

Итак, из (5.5) видно, что при уменьшении поперечного размера импульса d в N раз амплитуда импульса A_1 должна увеличиться вдоль характеристики $z = t$ в плоском случае в N раз, а в цилиндрическом — в N^2 раз, как это схематически показано на рис. 4.

Аналогичное соотношение справедливо и для интенсивностей плоского и цилиндрического импульсов. В самом деле, интенсивность в данном случае определяется просто как квадрат амплитуды $I = A^2$, поэтому если амплитуды плоского и цилиндрического импульсов увеличились в N и N^2 раз соответственно, то их интенсивности увеличатся соответственно в N^2 и N^4 раз. Вводя обозначение $M = N^2$, получаем искомое соотношение для интенсивностей в плоском и цилиндрическом случаях.

Разумеется, пространственная форма реального импульса может быть весьма сложной и изменяться по нелинейным законам в процессе прохождения импульса через плазму, в том числе и вдоль направления его распространения (OZ), как это видно на рис. 1 и 2. Поэтому приведенные выше рассуждения имеют приближенный характер, хотя и достаточно хорошо с качественной точки зрения поясняют полученную в результате вычислительных экспериментов закономерность.

Кроме того, сравнительный анализ рис. 1 и 2 показывает, что процесс самофокусировки цилиндрических импульсов имеет более сложный нелинейный характер по сравнению со случаем плоских импульсов: импульс разбивается на большее количество частей вдоль оси OZ, существенно больше разброс максимальных значений интенсивности различных частей импульса, получившихся в результате его взаимодействия с плазмой. При этом основная часть энергии цилиндрического импульса продолжает оставаться в его середине (рис. 2,е), энергия же плоского импульса значительно быстрее рассеивается в плазме (рис. 1,е).

Из всего сказанного выше можно сделать вывод, что эффект самофокусировки рентгеновских импульсов в плазме существенно более ярко проявляется для объемных цилиндрических импульсов. В этом случае при реально достижимых значениях параметров плазмы и начальной интенсивности импульса возможно увеличение его интенсивности более чем на два порядка. Кроме того, следует отметить, что многочисленные вычислительные эксперименты подтвердили возможность использования предложенной математической модели и разработанного численного метода для изучения достаточно тонких закономерностей исследуемого процесса.

6. Применение метода множества эквивалентности для решения обратных задач с распределенными параметрами в случае цилиндрических импульсов. Высокая точность разработанной математической модели и вычислительного метода позволяет использовать полученные результаты решения прямой задачи при различных значениях входных параметров для решения обратных задач определения начальных параметров плазмы и импульса по характеристикам прошедшего через нее цилиндрического рентгеновского импульса. Можно выделить две основные цели решения такого рода обратных задач:

1) определить значения начальных параметров плазмы при условии, что цилиндрический рентгеновский импульс на выходе из нее имеет определенные (измеренные) характеристики;

2) найти значения начальных параметров плазмы и импульса, при которых цилиндрический рентгеновский импульс на выходе из плазмы будет иметь желаемые характеристики.

Для решения этих задач целесообразно использовать обобщенный метод множества эквивалентности решения многокритериальных задач в псевдометрическом пространстве критериев [55–60]. Для определения этих критериев могут быть использованы следующие характеристики выходного импульса:

1) объемная форма цилиндрического импульса (по интенсивности) на выходе из плазмы в определенный момент времени;

2) объемная форма цилиндрического импульса (по интенсивности) на выходе из плазмы в несколько различных моментов времени;

3) динамика максимальной интенсивности цилиндрического импульса на выходе из плазмы за определенный промежуток времени.

Формально соответствующие критерии, по которым будет решаться обратная многокритериальная задача, в случае цилиндрических импульсов имеют следующий вид:

$$F_1\left(I\left(P,\rho,z,t_1\right)\right) = \sum_{\rho,z\in E}\left|I\left(P,\rho,z,t_1\right) - I^0\left(P^0,\rho,z,t_1\right)\right|,$$

$$F_2\left(I\left(P,\rho,z,t_2\right)\right) = \sum_{\rho,z\in E}\left|I\left(P,\rho,z,t_2\right) - I^0\left(P^0,\rho,z,t_2\right)\right|,$$

$$\ldots$$

$$F_n\left(I\left(P,\rho,z,t_n\right)\right) = \sum_{\rho,z\in E}\left|I\left(P,\rho,z,t_n\right) - I^0\left(P^0,\rho,z,t_n\right)\right|,$$

$$F_{n+1}\left(Imax\left(P,t\right)\right) = \sum_{t\in T}\left|Imax\left(P,t\right) - Imax^0\left(P^0,t\right)\right|,$$

где $P = (p_1, p_2, ..., p_s)$ — набор из s интересующих нас исходных параметров плазмы и импульса. Например, это могут быть все пять обобщенных параметров $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \nu$. Тогда $P = (\alpha, \beta, \gamma, \delta, \nu)$. Или в него могут входить, например, начальная концентрация свободных электронов плазмы n_0, низкочастотная диэлектрическая проницаемость плазмы ε_0 и несущая частота входного импульса ω. В этом случае $P = (n_0, \varepsilon_0, \omega)$, а значения обобщенных параметров $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \nu$ системы будут вычислены в соответствии со значениями $n_0, \varepsilon_0, \omega$; $P^0 = \left(p_1^0, p_2^0, ..., p_s^0\right)$ — искомый набор из s значений интересующих нас исходных параметров плазмы и импульса; E — пространственная область определения (вычисления и измерения) функции интенсивности импульса $I(P, \rho, z, t_n)$ в момент времени $t = t_n$; $I(P, \rho, z, t_n)$ — вычисляемая в результате решения прямой задачи для каждого набора значений параметров P функция интенсивности импульса в области $\rho, z \in E$ в момент времени $t = t_n$ (рис. 3); $I^0\left(P^0, \rho, z, t_n\right)$ — эталонная (измеренная или желаемая) функция интенсивности импульса для искомого набора значений параметров P^0 в области $\rho, z \in E$ в момент времени $t = t_n$; T — промежуток времени, на котором определяется (измеряется) максимальная интенсивность рентгеновского импульса; $Imax(P, t)$ — вычисляемая в результате решения прямой задачи для каждого набора значений параметров P функция максимальной интенсивности цилиндрического импульса в области $t \in T$ (рис. 3); $Imax^0\left(P^0, t\right)$ — эталонная (измеренная или желаемая) функция максимальной интенсивности цилиндрического импульса для искомого набора значений параметров P^0 в области $t \in T$.

Как и в случае плоских импульсов [24–26], для решения обратной задачи определения начальных параметров плазмы и цилиндрического импульса необходимо минимизировать все эти $n+1$ функционала. Другими словами, решить многокритериальную задачу минимизации по $n+1$ критерию. Как было сказано выше, решать эту задачу будем обобщенным методом множества эквивалентности [56–60]. Кратко опишем этот метод.

1. По каждому из интересующих нас начальных параметров плазмы и импульса (на отрезке от минимально возможного значения этого параметра a_i до максимально возможного значения b_i) вводим регулярную сетку

$$\omega_i = \left\{ p_i^{j_i} = a_i + j_i h_i : \; j_i = \overline{0, L_i}; \; h_i = \frac{(b_i - a_i)}{L_i} \right\},$$

где L_i — число точек сетки для i-го входного параметра, h_i — соответствующий шаг этой сетки, $i = \overline{1, s}$, и общую сетку в s-мерном пространстве всех рассматриваемых параметров

$$\omega_{1,...,s} = \omega_1 \times \omega_2 \times ... \times \omega_s = \left\{ (a_1 + j_1 h_1, a_2 + j_2 h_2, ..., a_s + j_s h_s) : j_i = \overline{0, L_i} \right\}.$$

2. В каждом узле этой сетки решаем прямую задачу (1.1)(1.3) описанным разностным методом и вычисляем соответствующие значения $I(P, x, z, t_n)$.

3. Для каждого критерия F_l, $l = \overline{1, n+1}$ решаем задачу минимизации и находим соответствующий набор начальных параметров P^0.

4. Для каждого из этих критериев находим не только оптимальные решения, но и множество решений, близких к оптимальному (т.е. отличающихся от оптимального значения не более чем на заданное число $R_l \geq 0$, $l = \overline{1, n+1}$). Для каждого значения l определяем множество $\Omega_l(R_l)$, которое является множеством всех оптимальных и близких к оптимальному решений $P^0 = \left(p_1^0, p_2^0, ..., p_s^0\right) \in \Omega_l(R_l)$ по критерию F_l.

5. Находим множество, представляющее собой пересечение всех множеств $\Omega_l(R_l)$

$$\Omega_0(R_1, ..., R_{n+1}) = \bigcap_{l=1}^{n+1} \Omega_l(R_l).$$

Множество $\Omega_0(R_1, ..., R_{n+1})$ называется множеством эквивалентности с точки зрения всех критериев, так как все его элементы принадлежат одновременно всем множествам $\Omega_l(R_l)$ и являются оптимальными и близкими к оптимальным решениями по всем критериям. Любой набор начальных параметров, принадлежащий этому множеству,

$$P^0 = \left(p_1^0, p_2^0, ..., p_s^0\right) \in \Omega_0(R_1, ..., R_{n+1})$$

является решением задачи.

Оценка точности решения по каждому критерию $F_l,\ l=\overline{1,n+1}$, определяется компонентами вектора $(R_1,...,R_{n+1})$.

В работах [55–60] указаны способы автоматического получения заведомо непустого множества эквивалентности. Методы нахождения множества эквивалентности $\Omega_0(R_1,...,R_{n+1})\neq\varnothing$ являются методами регуляризации [1] для некорректных обратных задач в псевдометрическом пространстве критериев [53–60] (даже при наличии у эксперта, принимающего решение, любого количества неформализованных критериев), а каждое решение $P^0=(p_1^0,p_2^0,...,p_s^0)\in\Omega_0(R_1,...,R_{n+1})$ — решением такой некорректной задачи.

В самом деле, наличие $n+1$ формализованного критерия $F_l(P),\ P\in D,\ l=\overline{1,n+1}$, позволяет на множестве D определить $n+1$ функцию расстояния между двумя элементами $P'\in D$ и $P''\in D$:

$$R_l(P',P'')=\left|F_l(P')-F_l(P'')\right|,\ l=\overline{1,n+1}.$$

Эти функции обладают следующими свойствами:

$$R_l(X,X)=0,\ R_l(X,Y)\geq 0,\ R_l(X,Y)=R_l(Y,X),$$
$$R_l(X,Y)+R_l(Y,Z)\geq R_l(X,Z),\ X,Y,Z\in D,\ l=\overline{1,n+1}.$$

Введенные нами функции являются псевдометриками, а множество D с такой метрикой называется псевдометрическим пространством. В отличие от метрического пространства, условие $R_l(X,Y)=0$ может выполняться также и для некоторых $X\neq Y$. Поэтому в нашем случае для любых $P',P''\in\Omega_0(R_1,...,R_{n+1})$ будут выполняться условия устойчивости типа Тихоновских условий для устойчивых задач [1]:

$$R_l(P',P'')\leq R_l,\quad l=\overline{1,n+1}.$$

Это означает, что расстояние $R_l(P',P'')$ между любыми двумя элементами $P',P''\in\Omega_0(R_1,...,R_{n+1})\subset D$ не превосходит заранее заданной величины R_l. Следовательно, метод множества эквивалентности $\Omega_0(R_1,...,R_{n+1})$ является методом, обобщающим метод регуляризации Тихонова [1] для некорректных задач, так как позволяет отказаться от метричности пространства D. Это дает возможность применять метод множества эквивалентности как для решения задач многокритериальной оптимизации, так и для решения обратных задач математической физики, как показано в этой статье.

Описанный метод не имеет недостатка метода нахождения множества эффективных по Парето решений, поскольку при добавлении дополнительного критерия множество эквивалентности не растет, а наоборот сужается (рис. 5).

Поэтому при решении реальных задач из полученного этим методом множества эквивалентности могут выбираться решения, удовлетворяющие не только формализованным критериям, но и неформализованным, основанным на опыте и интуиции эксперта-исследователя, при этом гарантированно не упуская наилучшее решение, которое при любом количестве критериев всегда будет находиться внутри найденного множества:

$$\Omega_0(R_1,...,R_{n+1})=\bigcap_{l=1}^{n+1}\Omega_l(R_l)$$

Выбор конечного решения из множества эквивалентности может быть сделан автоматически [55–60], или его может сделать эксперт-исследователь, исходя из своего научного опыта, неформализованных критериев и конкретных целей. Нередко бывает, что эксперт выбирает сразу несколько наборов значений начальных параметров из полученного множества эквивалентных решений. Важно отметить, что число критериев зависит от конкретных целей исследования процесса самофокусировки. Например, если цель заключается не в том, чтобы восстановить значения начальных параметров плазмы по измеренным характеристикам прошедшего через нее рентгеновского импульса, а только в том, чтобы определить такие значения начальных параметров плазмы, при которых импульс в результате процесса самофокусировки достигнет желаемой интенсивности, то достаточно найти множество решений,

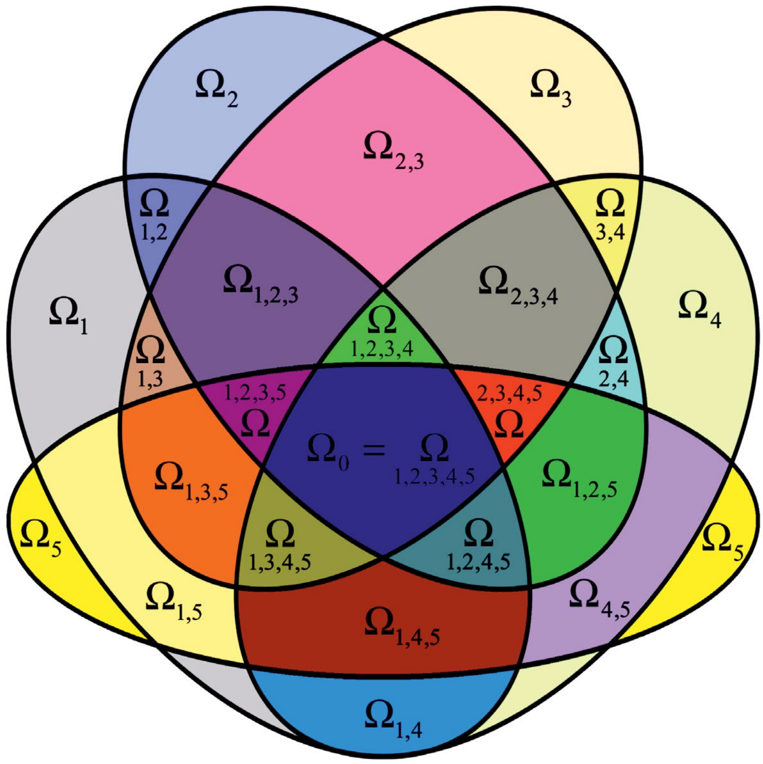


Рис. 5. Иллюстрация множества эквивалентности $\Omega_0\left(R_1,\ldots,R_{n+1}\right)$ и его сужения при увеличении количества критериев для $n = 4$

удовлетворяющее хотя бы одному из $n+1$ критериев. В этом случае нет необходимости искать пересечение $n+1$ множества эквивалентных решений для всех критериев. При этом всегда есть возможность найти несколько разных наборов значений начальных параметров плазмы и импульса (решив методом множества эквивалентности обратную задачу по одному или нескольким критериям), при которых достигается желаемая интенсивность и/или пространственная форма цилиндрического импульса после самофокусировки, и выбрать из них наиболее подходящие с точки зрения имеющихся на данный момент возможностей и удобства их реализации на практике.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1978.
2. *Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П.* Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978.
3. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1988.
4. *Ким А.В., Короткий А.И., Осипов Ю.С.* Обратные задачи динамики параболических систем // ПММ. 1990. Т. 54. № 5. С. 754-759.
5. *Осипов Ю.С., Кряжимский А.В., Максимов В.И.* Задачи динамической регуляризации для систем с распределенными параметрами. Свердловск: ИММ УрО АН СССР, 1991.
6. *Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V.* Inverse Problems for Ordinary Differential Equations: Dynamical Solutions. London: Gordon and Breach, 1995.
7. *Осипов Ю.С., Кряжимский А.В., Максимов В.И.* Динамические обратные задачи для параболических систем // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36. № 5. С. 579-597.
8. *Kryazhimskiy A.V., Maksimov V.I.* On Exact Stabilization of an Uncertain Dynamical System // J. Inverse and Ill-Posed Problems. 2004. V. 12. № 2. P. 145-182.
9. *Осипов Ю.С., Кряжимский А.В.* Задачи динамического обращения // Вестник Российской академии наук. 2006. Т. 76. № 7. С. 615-624.
10. *Пелюхов Р.В.* Решение одной обратной задачи группового анализа // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2001. № 2. С. 26-31.

11. *Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В.* Экстремальные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1988.
12. *Belov Yu. Ya.* Inverse Poblems for Parabolic Equations // J. Inverse Ill-Posed Problems. 1993. V. 1. № 4. P. 283–301.
13. *Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П.* Некорректные задачи математической физики и анализа. Новосибирск, 1980.
14. *Isakov V.* Inverse Problems for Partial Differential Equations. Berlin: Springer, 1998.
15. *Kozhanov A. I.* Composite-Type Equations and Inverse Problems. Utrecht: VSP, 1999.
16. *Kryazhimskiy A.V., Maksimov V.I.* On Rough Inversion of a Dynamical System with a Disturbance // J. Inverse and Ill-Posed Problems. 2008. V. 16. № 6. P. 587–600.
17. *Дякин В.В., Раевский В.Я.* О прямой и обратной задаче электродинамики // ЖВМ и МФ, 2000. Т. 40. № 4. С. 598–605.
18. *Belov Yu. Ya., Shipina T. N.* The Problem of Determining a Coefficient in the Parabolic Equation and Some Properties of its Solution // J. Inverse Ill-Posed Problems. 2001. V. 9. № 1. P. 31–48.
19. *Дякин В.В., Раевский В.Я.* Об обратной задаче электродинамики // ЖВМ и МФ. 2005. Т. 45, № 11. С. 2052–2060.
20. *Пятков С.Г.* Некоторые обратные задачи для параболических уравнений // Фундаментальная и прикладная математика. 2006. Т. 12. № 4. С. 187–202.
21. *Elton R. C.* X-ray lasers. N.Y.: Acad. Press, 1990.
22. *Ахманов С. А.* Сверхсильные световые поля в нелинейной оптике, физике плазмы и технике рентгеновских источников // Итоги науки и техники. Современные проблемы лазерной физики. 1991. Т. 4. С. 15–18.
23. *Шен И. Р.* Принципы нелинейной оптики. М.: Наука, 1985.
24. *Андреев А.В., Хачатуров Р.В.* Самофокусировка импульсного рентгеновского излучения в плазме // Вестник Московского университета. Сер. 3: Физика. Астрономия. 1995. Т. 36. № 3. С. 25-33. EDN: UHYLRB.
25. *Хачатуров Р.В.* Вычислительный метод исследования процесса самофокусировки рентгеновского излучения в плазме // ЖВМ и МФ. 1996. Т. 36. № 1. С. 103–111.
26. *Хачатуров Р.В.* Математическое моделирование процессов взаимодействия рентгеновского излучения с плазмой и многослойными наноструктурами: Диссертация канд. физ.-мат. наук. М.: ВЦ РАН, 1996.
27. *Хачатуров Р.В.* Математическое моделирование и методы определения параметров многослойных наноструктур по угловому спектру интенсивности отраженного рентгеновского излучения // Математическое моделирование композиционных объектов: сб. статей. Т. Вып. 3. М.: ВЦ РАН, 2007. С. 115–130. EDN: BZIOHS.
28. *Хачатуров Р.В.* Пятимерная модель Гипервселенной и возможные этапы освоения космического пространства // Актуальные проблемы российской космонавтики. Тр. XXXV академических чтений по космонавтике. М.: Комиссия РАН, 2011. С. 277-278. EDN: RUSPAP.
29. *Хачатуров Р.В.* Математическая модель Гипервселенной и ее применение для оценки возможностей освоения космического пространства // Гагаринский сборник. Матер. XXXVIII Междунар. общественно-научных чтений, посвященных памяти Ю.А. Гагарина. Воронеж: Научная книга, 2011. С. 414-425. EDN: SWABBU.
30. *Хачатуров Р.В.* Динамика пятимерного тора Гипервселенной в трехмерном времени // Актуальные проблемы российской космонавтики. Тр. XXXIX академических чтений по космонавтике, посвященных памяти акад. С.П. Королева. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2015. С. 187–190. EDN: ZFINWR.
31. *Хачатуров Р.В.* Теория пятимерной тороидальной Гипервселенной // Прикл. математика и мат. физика. 2015. Т. 1. № 1. С. 129–146. EDN: WCKJIN.
32. *Хачатуров Р.В.* Черные дыры — трансвселенские торнадо // К.Э. Циолковский и этапы развития космонавтики. Матер. 50-х Научных чтений памяти К.Э. Циолковского. Калуга: Эйдос, 2015. С. 280–281. EDN: UIDOQD.
33. *Хачатуров Р.В.* Объяснение природы гравитации и черных дыр с помощью теории Гипервселенной // XL Академические чтения по космонавтике, посвященные памяти акад. С.П. Королева: сб. тезисов. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2015. С. 153-155. EDN: VMVXYD.
34. *Хачатуров Р.В.* Объяснение особенностей крупномасштабного расположения квазаров во Вселенной теорией Гипервселенной // Идеи К.Э. Циолковского в инновациях науки и техники. Матер. 51-х Научных чтений памяти К.Э. Циолковского. Калуга: Эйдос, 2016. С. 264-266. EDN: XHBQTN.
35. *Хачатуров Р.В.* Закономерности расположения квазаров в крупномасштабной структуре Гипервселенной // XLI Академические чтения по космонавтике. Сб. тезисов чтений, посвященных памяти акад. С.П. Королева. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017. С. 192-194. EDN: XOFBQL.
36. *Хачатуров Р.В.* Обмен материей и энергией между параллельными Вселенными с точки зрения теории Гипервселенной // Гагаринский сборник. Матер. XLIV междунар. общественно-научных чтений, посвященных памяти Ю.А. Гагарина. Гагарин: СОГБУК «Музей Ю.А. Гагарина», 2017. С. 426–451. EDN: DKBEGP.
37. *Хачатуров Р.В.* Динамика изменения размера Вселенной и природа гравитации в соответствии с математической моделью и теорией Гипервселенной // Тр. Всероссийской научной конференции «Моделирование коэволюции природы и общества: проблемы и опыт. К 100-летию со дня рождения академика Н. Н. Моисеева (Моисеев–100)». М.: ФИЦ ИУ РАН, 2017. С. 93–102. EDN: YRVYCX.
38. *Khachaturov R.V.* Theoretical Possibility of Transferring Matter between Parallel Universes in Accordance with the Hyperuniverse Theory // AIP Conf. Proc. 2019. V. 2171. P. 090001(1)-090001(6). EDN: ZSDEXW.

39. *Хачатуров Р.В.* Теория Гипервселенной о структуре многомерного замкнутого времени // XLIV Академические чтения по космонавтике, посвященные памяти акад. С.П. Королева. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2020. С. 449–451. EDN: SWIEXK.
40. *Khachaturov R.V.* General Structure of Multidimensional Closed Time from the Hyperuniverse Theory Point of View // AIP Conf. Proc. 2021. V. 2318. P. 080003(1)–080003(5). EDN: WDSCZC.
41. *Khachaturov R.V.* Modeling of with Axially Symmetric Self-Focusing X-Ray Pulses in Plasma // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 1999. V. 39. № 12. P. 2003–2014. EDN: LFRMGN.
42. *Fedotov P.S., Khachaturov R.V.* A new Approach to Describing the Regularities of Stationary Phase Retention in Countercurrent Chromatography // J. Liquid Chromatography and Related Technologies. 2000. V. 23. № 5. P.655–667. EDN: LGAWOV.
43. *Oleschko K., Korvin G., Balankin A.S., Khachaturov R.V., Flores L., Figueroa B., Urrutia J., Brambila F.* Fractal Scattering of Microwaves from Soils // Physical Review Letters. 2002. V. 89. № 18. P. 188501. EDN: RBZTAR.
44. *Khachaturov V.R., Khachaturov R.V., Khachaturov R.V.* Supermodular Programming on Lattices // Computer Science J. Moldova. 2003. V. 11. № 1. P. 43–72. EDN: VMUTYC.
45. *Mandujano J.J., Khachaturov R.V., Tolson G., Keppie J.D.* Curvature Analysis Applied to the Cantarell Structure, Southern Gulf of Mexico: Implications for Hydrocarbon Exploration // Computers & Geosciences. 2005. V. 31. № 5. P. 641–647. EDN: LJHFTN.
46. *Khachaturov V.R., Khachaturov R.V.* Supermodular Programming on Finite Lattices // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2012. V. 52. № 6. P. 855–878. DOI: 10.1134/S0965542512060097. EDN: RGAEAR.
47. *Korvin G., Khachaturov R.V., Oleschko K., García J.J., Ronquillo G., Correa López M.D.J.* Computer Simulation of Microwave Propagation in Heterogeneous and Fractal Media // Computers & Geosciences. 2017. V. 100. P. 156–165. EDN: YUKLFJ.
48. *Khachaturov R.V.* Generalized Equivalence Set Method for Solving Multiobjective Optimization Problems // J. Computer and Systems Sciences International. 2019. V. 58. № 6. P. 922-931. DOI 10.1134/S1064230719060091. EDN: TGAWUA.
49. *Хачатуров В.Р., Хачатуров Р.В.* Решетка кубов и супермодулярная оптимизация // Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Общая топология. Проблемы математического образования: тр. Третьей междунар. конф. М.: МФТИ, 2008. С.248–257. EDN: SEOFDX.
50. *Хачатуров В.Р., Хачатуров Р.В.* Решетка кубов // Изв. РАН. ТиСУ. 2008. № 1. С. 45–51. EDN: ICECRL.
51. *Хачатуров В.Р., Хачатуров Р.В., Хачатуров Р.В.* Оптимизация супермодулярных функций (супермодулярное программирование) // ЖВМ и МФ. 2012. Т. 52. № 6. С.999–1000. EDN: OYIOTF.
52. *Хачатуров Р.В.* Основные свойства решеток кубов, алгоритмы их построения и возможности применения в дискретной оптимизации // ЖВМ и МФ. 2015. Т. 55. № 1. С. 121–134. EDN: THHYLB.
53. *Хачатуров Р.В.* Прямая и обратная задачи определения параметров многослойных наноструктур по угловому спектру интенсивности отраженного рентгеновского излучения // ЖВМ и МФ. 2009. Т. 49. № 10. С. 1860–1867. EDN: KWIVAN.
54. *Хачатуров Р.В.* Прямая и обратная задачи исследования свойств многослойных наноструктур по двумерной математической модели отражения и рассеяния рентгеновского излучения // ЖВМ и МФ. 2014. Т. 54. № 6. С. 977–987.
55. *Хачатуров Р.В.* Многокритериальная оптимизация в псевдометрическом пространстве критериев на примере общей модели деятельности предприятия // ЖВМ и МФ. 2016. Т. 56. № 9. С. 1602–1613. EDN: WHWHMT.
56. *Хачатуров Р.В.* Однокритериальная и многокритериальная оптимизация на решетке кубов // Изв. РАН. ТиСУ. 2018. № 5. С. 89–98. EDN: YSBCTR.
57. *Хачатуров Р.В.* Применение метода множества эквивалентности для решения задач многокритериальной оптимизации и обратных задач математической физики // Проблемы информатики. 2019. № 4(45). С. 7–32. EDN: QHMTKL.
58. *Хачатуров Р.В.* Прямая и обратная задачи исследования процесса самофокусировки рентгеновских импульсов в плазме // ЖВМ и МФ. 2020. Т. 60. № 2. С. 323–337. EDN: LBPFDV.
59. *Хачатуров Р.В.* Обобщенный метод множества эквивалентности для решения задач многокритериальной оптимизации // Изв. РАН. ТиСУ. 2020. № 1. С. 109–118. EDN: CCEWSC.
60. *Хачатуров Р.В.* О возможностях применения метода множества эквивалентности при освоении космического пространства для решения различных возникающих задач // Никита Моисеев и современный мир: докл. и матер. конф. М.: Российская академия наук, 2023. С. 141–150. EDN: XWYHCI.
61. *Хачатуров Р.В.* Математическая модель Гипервселенной и её применение для оценки перспектив освоения космического пространства // Человек – Земля – Космос: диалектика взаимосвязи стратегических социальных и технических проектов. М.: Культурная революция, 2011. С. 165–169. EDN: AHLOHI.
62. *Хачатуров Р.В.*Перспективы изучения дальнего Космоса: математическая модель Гипервселенной // Актуальные проблемы российской космонавтики. Труды XXXVI Академических чтений по космонавтике. М.: Комиссия РАН, 2012. С. 255–258. EDN: PGXRWP.
63. *Хачатуров Р.В.* Периодический закон изменения ускорения расширения Вселенной, вытекающий из математической модели Гипервселенной // Идеи К.Э. Циолковского: прошлое, настоящее, будущее. Материалы XLVII научных чтений памяти К.Э. Циолковского. Калуга: Эйдос, 2012. С. 300–302. EDN: IISWLK.
64. *Khachaturov R.V.* The Galaxies Life Cycle According to the Hyperuniverse Theory // AIP Conf. Proc. 2023. V. 2549. P. 090003(1)–090003(9).

ИЗВЕСТИЯ РАН. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2024, № 2, С. 107–129

СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

УДК 519.853, 517.977.5

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ ПРОИЗВОДСТВЕННО-ФИНАНСОВОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬЮ ПРЕДПРИЯТИЯ[1]

© 2024 г. Т. Г. Апалькова[a], *, О. А. Косоруков[b], **, А. В. Мищенко[c], *, В. И. Цурков[d], ******

[a]*Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации, Москва, Россия*
[b]*МГУ им. М.В.Ломоносова, Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте РФ, Государственный университет по землеустройству, Москва, Россия*
[c]*Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации, Москва, Россия*
[d]*Федеральный исследовательский центр "Информатика и управление" РАН, Москва, Россия*
**e-mail: catintherye1@gmail.com*
***e-mail: kosorukovoa@mail.ru*
****e-mail: alnex4957@rambler.ru*
*****e-mail: v.tsurkov@mail.ru*

Поступила в редакцию 01.12.2023 г.
После доработки 16.12.2023 г.
Принята к публикации 29.01.2024 г.

Предложены оптимизационные модели производственно-финансовой деятельности предприятия, позволяющие повысить эффективность его функционирования в условиях современной рыночной среды. Новизна предлагаемого инструментария обусловлена учетом особенностей процессов потребления и хранения готовой продукции, а также кредитования и расширения производства. Для реализации предлагаемых моделей используется метод обобщенного приведенного градиента, встроенный в инструментарий MS Excel (надстройка «Поиск решения»). Решение задач выбора производственной программы также возможно с помощью других методов данной надстройки, включая симплекс-метод.

Ключевые слова: оптимизационные модели производства, финансовая деятельность предприятий, расширение производства, производственная программа, оборотный капитал, динамические модели управления.

DOI: 10.31857/S0002338824020109, **EDN:** VOFKWM

MATHEMATICAL MODELS FOR MANAGEMENT OF PRODUCTION AND FINANCIAL ACTIVITIES OF AN ENTERPRISE

T. G. Apalkova[a], *, O. A. Kosorukov[b], **, A. V. Mishchenko[c], *, V. I. Tsurkov[d], ******

[a]*Financial University under the Government of the Russian Federation, Moscow*
[b]*Moscow State University named after. M.V.Lomonosova, Russian Academy of National Economy and Public Administration under the President of the Russian Federation, State University of Land Management, Moscow*
[c]*Financial University under the Government of the Russian Federation, Moscow*
[d]*Federal Research Center “Informatics and Management” RAS, Moscow*
**e-mail: catintherye1@gmail.com,*
***e-mail: kosorukovoa@mail.ru,*
****e-mail: alnex4957@rambler.ru,*
*****e-mail: v.tsurkov@mail.ru*

This paper proposes optimization models for the production and financial activities of an enterprise, which make it possible to increase the efficiency of its functioning in the modern market environment. The novelty of the

[1] Результаты исследований, представленные в разд. 3, получены за счет средств Российского научного фонда (проект № 22-71-10131).

proposed tools is due to taking into account the peculiarities of the processes of consumption and storage of finished products, as well as lending and expansion of production. To implement the proposed models, the generalized reduced gradient method is used, built into the MS Excel toolkit (the “Solver” add-on). Solving problems of choosing a production program is also possible using other methods of this add-on, including the simplex method.

Keywords: optimization models for the production, financial activities of an enterprise, expansion of production, production program, working capital, dynamic control model

Введение. Внешние экономические санкции, в условиях которых существует российская экономика, порождает ряд проблем для бизнеса, особенно предприятий реального сектора. Согласно аналитической записке, выпущенной в сентябре 2023 г. Центробанком РФ [1], у большинства предприятий появились проблемы с импортом сырья, комплектующих, машин и оборудования по причине полного прекращения импорта или перебоев и задержек поставок. Ввиду этого возрастает актуальность проблемы эффективного управления материальными и финансовыми ресурсами предприятий и издержками производства.

Решение рассмотренных в работе оптимизационных задач предполагает задание в MS Excel как целевого функционала (максимизация прибыли фокусной компании), так и перечня ограничений на располагаемые запасы материальных ресурсов, производственные мощности, размер заказа и величину спроса, а также объем финансовых средств, имеющихся у предприятия. В результате применения алгоритмов численной оптимизации определяется оптимальная производственная программа, задаваемая в виде вектора, физический смысл которого состоит в перечне необходимых товарных позиций и оптимального объема производства каждой из них.

1. Оптимизационные модели выбора производственной программы предприятия. Традиционная постановка задачи о выборе производственной программы предприятия состоит в том, чтобы в условиях ограниченных производственных и материальных ресурсов обеспечить выпуск продукции в объемах, не превышающих спрос и максимизировать прибыль предприятия [2–4]. Детерминированная математическая модель оптимизации производственной программы состоит в следующем:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i - \sum_{i=1}^{n} b_i x_i - Z_{\text{пост}} \to \max, \tag{1.1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} l_{ij} x_i \le L_j, j = \overline{1, M}, \tag{1.2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} t_{il} x_i \le k_l \tau_l, l = \overline{1, K}, \tag{1.3}$$

$$x_i \le Pt_i, i = \overline{1, n}, \tag{1.4}$$

$$x_i \ge Zak_i, \tag{1.5}$$

$$x_i \in Z_+. \tag{1.6}$$

Задача (1.1)–(1.6) является линейной. Здесь используются следующие обозначения: a_i – цена реализации продукции вида i, b_i – переменные издержки при производстве продукции вида i, $Z_{\text{пост}}$ – постоянные издержки предприятия, l_{ij} – нормы потребления продукции вида i при выпуске единицы продукции вида j, t_{il} – нормы времени обработки на оборудовании вида l при выпуске единицы продукции вида i, τ_l – эффективное время работы оборудования вида l на периоде планирования (0; T), где τ_l – время загрузки оборудования вида l в производственном процессе на периоде (0; T), k_l – количество единиц оборудования вида l, участвующего в производственном процессе, L_j – объем материальных ресурсов производства вида j, Pt_i – спрос на продукцию вида i, Zak_i – величина заказа на продукцию вида i. Таким образом, продукция вида i должна выпускаться в объемах не менее Zak_i, $Z+$ – множество целых неотрицательных чисел, n – количество видов продукции.

В модели (1.1)–(1.6) предполагается, что цена продукции a_i фиксирована. Если a_i можно менять в некотором диапазоне:

$$(a_i^1 \leqslant a_i \leqslant a_i^2), \tag{1.7}$$

то это оказывает влияние на величину спроса. В простейшем случае это влияние задается соотношением следующего вида:

$$x_i \le Pt_i - \Delta_i,\left(a_i - a_i^1\right),\ i = \overline{1,n}. \tag{1.8}$$

Здесь a_i – цена реализации продукции вида i, a_i^1 – минимальная цена реализации, a_i^2 – максимальная цена реализации.

Таким образом, с учетом (1.7) и (1.8), в условиях недетерминированности цены на продукцию модель (1.1)–(1.8) является нелинейной. Решением данной оптимизационной задачи выступает вектор $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, задающий объемы выпуска продукции, и вектор $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$, задающий цены на продукцию в условиях ограничений.

Далее необходимо отметить, что в условиях фиксированных цен задача (1.1)–(1.6) не всегда имеет решение ввиду дефицита производственных мощностей и/или материальных ресурсов предприятия. Поэтому для того, чтобы объем производства удовлетворял ограничению (1.5), необходимо осуществить инвестиции как в закупку материальных ресурсов, так и в увеличение производственных мощностей предприятия. Для определения минимального объема таких инвестиций нужно решить следующую оптимизационную задачу:

$$\sum_{j=1}^{m} Z_j\beta_j + \sum_{l=1}^{k} y_l\gamma_l \to \min, \tag{1.9}$$

$$\sum_{i=1}^{n} l_{ij}x_i \le Z_j + L_j,\quad j = \overline{1,M}, \tag{1.10}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \tau_{ij}x_i \le \left(k_l + y_l\right)\tau_l,\quad l = \overline{1,K}, \tag{1.11}$$

$$x_i \le Pt_i,\ i = \overline{1,n}, \tag{1.12}$$

$$x_i \ge Zak_i\,, \tag{1.13}$$

$$x_i \in Z_+, \tag{1.14}$$

$$y_l \in Z_+,\ Z_j \ge 0, j = \overline{1,M}\,,\ l = \overline{1,K}\,. \tag{1.15}$$

Здесь используются следующие обозначения: Z_j – дополнительный закупаемый объем материальных ресурсов j, β_j – цена единицы материального ресурса j, y_l – количество единиц дополнительно закупаемого оборудования вида l, γ_l – цена единицы дополнительно закупаемого оборудования вида l.

Дополнительно отметим, что решение задачи (1.9)–(1.15) дает не только объем дополнительных инвестиций, но и их структуру с учетом стоимости закупки как материальных ресурсов производства, так и дополнительного оборудования.

Кроме предложенной модели выбора оптимальной производственной программы предприятия (1.1)–(1.6) можно использовать динамическую модель оптимизации производственной программы с учетом влияния инфляции на маржинальный доход, получаемый от реализации выпускаемой продукции. Решение задачи в данном случае задается в виде вектор-функции $x(t)=(x_1(t), ...\, x_n(t))$, где $x_i(t)$ – интенсивности выпуска продукции вида i.

Таким образом, объем выпуска продукции вида i равен:

$$\int_0^T x_i(t)\,dt,\ i = \overline{1,n}.$$

Математическая постановка задачи о выборе оптимальной производственной программы в этом случае принимает следующий вид:

$$\sum_{i=1}^{n}\int_o^T c_i\left(\xi(t)\right)x_i(t)\,dt \to \max, \tag{1.16}$$

$$\sum_{i=1}^{n} l_{ij}\int_0^t x_i\left(t'\right)dt' \le \int_0^t L_j\left(t'\right)dt',\quad j = \overline{1,M},\quad \forall t \in \left(0;T\right), \tag{1.17}$$

$$\sum_{i=1}^{n} t_{il} \int_{t1}^{t2} x_i(t)\,dt \le \frac{t_2 - t_1}{T} k_l \tau_l,$$
$$l = \overline{1,K},\ \forall t_1, t_2 \in (0;T), t_2 > t_1, \tag{1.18}$$

$$\int_{0}^{T} x_i(t)\,dt \le Pt_i,\ i = \overline{1,n},\quad x_i(t) \ge 0,\quad \forall t \in (0;T). \tag{1.19}$$

Здесь используются следующие обозначения: $c_i(\xi(t)) = a_i(\xi(t))$- $b_i(\xi(t))$, $a_i(\xi(t))$ – цена за единицу продукции вида i в момент времени t при условии накопленной инфляции($\xi(t)$), $b_i(\xi(t))$ – переменные издержки при выпуске единицы продукции вида i в момент времениtпри уровне накопленной инфляции $\xi(t)$, $c_i(\xi(t))$ – маржинальный доход от выпуска единицы продукции вида i в момент времени t при уровне накопленной инфляции $\xi(t)$, $x_i(t)$ – интенсивность выпуска продукции вида i, Pt_i – спрос на продукцию вида i, $L_i(t')$ – интенсивность поступления материальных ресурсов вида j в момент t', $t_2 - t_1$ – длина интервала (t_1 ;t_2).

Соотношение (1.18) – ограничение на равномерность загрузки оборудования. Задача (1.16)–(1.19) – это задача оптимального управления, решением которой является вектор-функция $x(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))$. Рассмотрим решение данной задачи на множестве кусочно-постоянных функций. Будем далее также считать функцию $c_i(\xi(t))$ кусочно-постоянной на конечном числе интервалов одинаковой длины, на которые разбивается период планирования (0; T).

В этих условиях задачу (1.16)–(1.19) можно представить следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{\tau=0}^{T} c_i(\xi_{\text{Ä}}) x_i^{\tau} \Delta t_{\tau} \to \max, \tag{1.20}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{\tau=0}^{T} x_i^{\tau} \Delta t_{\tau} l_{ij} \le \sum_{\tau=0}^{\tau^*} L_j^{\tau} \Delta t_{\tau},\quad \forall \tau = \overline{1,T},\ j = \overline{1,M}, \tag{1.21}$$

$$\sum_{i=1}^{n} t_{il} \sum_{\tau=\tau_k}^{\tau_p} x_i^{\tau} \Delta t_{\tau} \le \frac{\tau_p - \tau_k}{T} k_l \theta_l,\quad l = \overline{1,K}, \tag{1.22}$$

$$\sum_{\tau=0}^{T} x_i^{\tau} \Delta t_{\tau} \le Pt_i,\ i = \overline{1,n}, \tag{1.23}$$

$$x_i^{\tau} \ge 0, i = \overline{1,n},\ \tau = \overline{1,T}. \tag{1.24}$$

Здесь используются следующие обозначения: $c_i(\xi_{\text{Ä}})$ – маржинальный доход от продажи одной единицы продукции вида i на временном интервале с номером τ при уровне накопленной инфляции на интервале времени τ, равном $\xi_{\text{Ä}}$;x_i^{τ} – интенсивность производства продукции вида i на интервале времени τ; Δt_{τ} – продолжительность интервала с номером τ; L_j^{τ} – интенсивность поступления материальных ресурсов вида j на интервале времени с номером τ.

Задача (1.20)–(1.24) является задачей линейного программирования, и ее решением будет матрица (x_i^{τ}), $i=\overline{1,n}$, $\tau=\overline{1,T}$. С учетом того, что любая непрерывная функция может быть с любой точностью аппроксимирована кусочно-постоянными функциями, предложенный подход может успешно применяться для решения задач оптимального управления (1.16)–(1.19).

2. Модели управления оборотным капиталом производственного предприятия. Рассмотрим задачу выбора оптимальной производственной программы предприятия в ситуации, когда отсутствуют запасы материальных ресурсов или они недостаточны, но у предприятия есть собственные оборотные средства и/или возможность взять кредит для пополнения оборотных средств [5].

В этих условиях возникает вопрос: как наиболее эффективно использовать эти финансовые ресурсы при определении видов и объемов выпуска конечной продукции. В ситуации, если критерием эффективности является операционная прибыль предприятия, определить оптимальную производственную программу можно путем использования обобщенной модели (1.1)–(1.6):

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i - \sum_{i=1}^{n} b_i x_i - Z_{\text{пост}} \to \max, \tag{2.1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} l_{ij} x_i \le L_j + Z_j, j = \overline{1, M}, \tag{2.2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} t_{il} x_i \le k_l \tau_l, l = \overline{1, K}, \tag{2.3}$$

$$\sum_{j=1}^{M} \beta_j Z_j \le F, \tag{2.4}$$

$$x_i \le Pt_i, i = \overline{1, n}, \tag{2.5}$$

$$x_i \ge Zak_i, i = \overline{1, n}, \tag{2.6}$$

$$x_i \in Z_+, Z_j \ge 0, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, M}. \tag{2.7}$$

В модели (2.1)–(2.7) кроме использованных ранее присутствуют следующие обозначения: Z_j – объем закупаемых ресурсов вида j; β_j – цена закупаемых материальных ресурсов вида j; F – объем оборотных средств. Искомыми переменными при решении линейной оптимизационной задачи (2.1)–(2.7) являются производственная программа $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ и объем закупок $Z = (Z_1, Z_2, ..., Z_n)$.

2.1. Анализ устойчивости решений. Рассмотрим ситуацию, когда цены на конечную продукцию, материальные ресурсы и переменные издержки производства растут с учетом накопленной инфляции $\xi(t)$. Здесь $\xi(t)$ – накопленная инфляция на момент t (в долях). В этом случае на момент времени t целевая функция (2.1) и ограничение (2.4) будут выглядеть следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(a_i - b_i + \varphi_i\left(\xi(t)\right)\right) x_i^l - z_{\text{пост}} \to \max, \tag{2.8}$$

$$\sum_{j=1}^{M} \left(\beta_j + \Psi_j\left(\xi(t)\right)\right) Z_j \le F.$$

Здесь x^l – одна из допустимых производственных программ множества $\bar{X} = \left\{x^1, \cdots, x^l, \cdots, x^N\right\}$, $\varphi_i\left(\xi(t)\right)$ – непрерывная и непрерывно дифференцируемая функция изменения маржинального дохода $c_i = a_i - b_i$ на момент времени t, $\Psi_j\left(\xi(t)\right)$ – непрерывная неубывающая функция t, отражающая степень изменения цены на материальные ресурсы j в связи с накопленной инфляцией.

Обозначим через $F^j\left(\xi(t)\right)$ значение целевой функции (2.8) с учетом изменения маржинального дохода, связанного с инфляцией на производственной программе x^j ($x^j \in \bar{X}$). Таким образом,

$$F^j\left(\xi(t)\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(a_i - b_i + \varphi_i\left(\xi(t)\right)\right) x_i^l - z_{\text{пост}}.$$

Пусть в момент времени t оптимальной является производственная программа $x^l \in \bar{X}$. Далее решим N-1 уравнение $F^l\left(\xi(t)\right) = F^j\left(\xi(t)\right)$, $j = \overline{1, N}$, $j \ne l$. Выберем минимальные положительные решения для каждого из уравнений и упорядочим их в порядке возрастания: $t_1, \cdots, t_Q$ ($Q \le N - 1$).

Пусть решение $t=t_1$ соответствует уравнению $F^l\left(\xi(t)\right) = F^k\left(\xi(t)\right)$. Рассмотрим производные: $dF^l\left(\xi(t)\right)/dt$ и $dF^k\left(\xi(t)\right)/dt$. Если $dF^k\left(\xi(t)\right)/dt\Big|_{t=t_1} > dF^l\left(\xi(t)\right)/dt\Big|_{t=t_1}$, то это означает, что начиная с момента времени $t=t_1$ оптимальной становится производственная программа x^k. Таким образом, любой отрезок времени $(0, T)$ можно разбить на интервалы (0, τ_1),$(\tau_1, \tau_2), \cdots, (\tau_{M-1}, T)$, на каждом из которых оптимальной будет оставаться одна и та же производственная программа.

Рассмотрим ограничение (2.9). С учетом того, что функция $\Psi_j\left(\xi(t)\right)$ является возрастающей относительно уровня накопленной инфляции $\xi(t)$, можно определить момент времени t_q, для которого будет верно равенство:

$$\sum_{j=1}^{M}(\beta_j + \Psi_j\left(\xi\left(t_q\right)\right))Z_j^l \ = F,$$

здесь $Z^l = \left(Z_1^l,\ldots,Z_M^l\right)$ – объем закупок материальных ресурсов, который необходим для обеспечения выполнения производственной программы $x^l = \left(x_1^l,\ldots,x_n^l\right)$, которая будет оптимальной для момента t=0. Очевидно, что для определения t_q необходимо решить следующее уравнение относительно t:

$$\sum_{j=1}^{M}\Psi_j\left(\xi\left(t_q\right)\right))Z_j^l \ = F - \sum_{j=1}^{M}\beta_j Z_j^l.$$

Учитывая, что $d\Psi_j\left(\xi(t)\right) / dt > 0$, начиная с любого момента времени $t > t_q$, необходимый объём закупок материальных ресурсов для x^l обеспечен быть не может. Следовательно, необходимо снизить объем производства, т.е. перейти на другую производственную программу.

Таким образом, интервал времени $(0,T)$ может быть разбит на отрезки $(0,\tau_1),\ldots,\left(\tau_k,T\right)$, на каждом из которых сохраняет оптимальность одна и та же производственная программа. Переход на новое решение может быть связан с тем, что прибыль на новой производственной программе становится выше, чем на предыдущей, либо с тем, что объем оборотных средств недостаточен для обеспечения закупок материальных ресурсов для прежней производственной программы.

2.2. Модель управления оборотным капиталом производственного предприятия с учетом переменных цен на конечную продукцию. В постановке (2.1)-(2.7) цены на конечную продукцию фиксированы. Если цены меняются в диапазоне

$$(a_1 \leqslant a_i \leqslant a_2), i = \overline{1,n}, \tag{2.10}$$

то это ограничение должно присутствовать в модели, и, следовательно, задача становится нелинейной. В этом случае ограничение (27) заменяется на следующее ограничение:

$$x_i \le Pt_i - \Delta_i\left(a_i - a_i^1\right), i = \overline{1,n}. \tag{2.11}$$

Таким образом, в ситуации нефиксированных цен, кроме переменных x и z дополнительно определяются оптимальные цены, заданные вектором $a = (a_1, a_2,\ldots, a_n)$. В ситуации, когда модель (2.1)–(2.7) не имеет решения ввиду недостаточности оборотных средств для закупки материальных ресурсов и/или недостаточности производственных мощностей, можно рассчитать оптимальный объем инвестиций, позволяющий выполнить продукцию в количестве не менее Zak_i, аналогично тому, как это делалось в предыдущей задаче.

Рассмотрим ситуацию, когда лицо, принимающее решение (ЛПР) о закупке материальных ресурсов производства, может использовать не только собственные оборотные средства в объеме F, но и дополнительно привлечь кредит в объеме V под процент α (в долях).

Возникает вопрос: целесообразно ли привлекать этот кредит и если да, то в каком объеме следует привлекать финансовые средства? Для того чтобы ответить на этот вопрос, необходимо решить две задачи. Первая – оценка прибыли предприятия, если кредит не привлекается, т.е. нужно найти оптимальное решение модели (2.1)–(2.7). Вторая состоит в оценке эффективности производственной программы, если кредит привлекается, иными словами, решается следующая оптимизационная задача:

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{n}a_i x_i - \sum_{i=1}^{n}b_i x_i - Z_{\text{пост}} - \\ - \alpha\left(\sum_{j=1}^{M}\beta_j Z_j - F\right) \to \max,\end{gathered} \tag{2.12}$$

$$\sum_{i=1}^{n} l_{ij} x_i \le L_j + Z_j, j = \overline{1, M}, \tag{2.13}$$

$$\sum_{i=1}^{n} t_{il} x_i \le k_l \tau_l, l = \overline{1, K}, \tag{2.14}$$

$$F < \sum_{j=1}^{M} \beta_j Z_j \le F + V, \tag{2.15}$$

$$x_i \le Pt_i, i = \overline{1, n}, \tag{2.16}$$

$$x_i \ge Zak_i, i = \overline{1, n}, \tag{2.17}$$

$$x_i \in Z_+. \tag{2.18}$$

В модели (2.12)–(2.18) кредит обязательно используется, и слагаемое

$$\alpha\left(\sum_{j=1}^{M} \beta_j Z_j - F\right)$$

в целевой функции (2.12) – это процентный платеж по кредиту.

Сравнивая значение целевой функции (2.1) (без кредита) и целевой функции (2.12) (с кредитом), определяем оптимальную стратегию.

Далее рассмотрим динамическую модель управления оборотным капиталом предприятия, направленным на закупку материальных ресурсов производства. Ниже будем считать, что в общем случае интенсивность поступления оборотных средств на интервале (0; T) задана функцией $f(t)$:

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{o}^{T} c_i\left(\xi(t)\right) x_i(t)\, dt \to \max, \tag{2.19}$$

$$\sum_{i=1}^{n} l_{ij} \int_{0}^{t} x_i(t')\, dt' \le \int_{0}^{t} L_j(t')\, dt', \quad j = \overline{1, M}, \quad \forall t \in (0; T), \tag{2.20}$$

$$\sum_{i=1}^{n} t_{il} \int_{t_1}^{t_2} x_i(t)\, dt \le \frac{t_2 - t_1}{T} k_l \tau_l, \quad l = \overline{1, K}, \quad \forall t_1, t_2 \in (0; T), t_2 > t_1, \tag{2.21}$$

$$\sum_{j=1}^{m} \beta_j \int_{0}^{t} Z_j(t')\, dt' \le \int_{0}^{t} f(t')\, dt', \forall t \in (0; T), \tag{2.22}$$

$$\int_{0}^{T} x_i(t)\, dt \le Pt_i, \tag{2.23}$$

$$\int_{0}^{T} x_i(t)\, dt \ge Zak_i, \tag{2.24}$$

$$x_i(t) \geq 0, Z_j(t) \geq 0. \tag{2.25}$$

Решением задачи (2.19)–(2.25) является вектор-функция $x(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))$ и вектор-функция $Z(t) = (Z_1(t), ..., Z_n(t))$, задающие соответственно интенсивность производства продукции и интенсивность закупки материальных ресурсов. Соотношение (2.22) свидетельствует о том, что объем затрат на закупку материальных ресурсов не должен превышать объема поступивших оборотных средств в любой момент $t \in (0;T)$.

Решение задачи оптимального управления (2.19)–(2.25) можно свести к решению задачи линейного программирования, аналогично тому, как это было сделано в предыдущем разделе.

3. Динамические модели оптимизации производства. 3.1. Динамическая модель расширения ассортимента продукции. Ниже будет рассмотрена ситуация перехода предприятия на выпуск расширенного ассортимента готовой продукции с привлечением дополнительных инвестиций как для закупки новых видов оборудования, так и приобретения дополнительных видов материальных ресурсов [6]. Введем дополнительные обозначения, а именно индексы новых видов продукции ($i = \overline{n+1, n_1}$), новых видов материальных ресурсов ($j = \overline{M+1,\ M+M_1}$) и новых видов оборудования ($l = \overline{K+1, K_1}$):

$$\sum_{i=1}^{n1} \int_o^T c_i(\xi(t)) x_i(t) dt \to \max, \tag{3.1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} l_{ij} \int_0^t x_i(t') dt' \leq \int_0^t L_j(t') dt', \quad j = \overline{1, M}, \quad \forall t \in (0;T), \tag{3.2}$$

$$\sum_{i=n+1}^{n_1} l_{ij} \int_0^t x_i(t') dt' \leq \int_0^t Z_j(t') dt', j = \overline{M+1,\ M+M_1}, \tag{3.3}$$

$$\sum_{i=1}^{n} t_{il} \int_{t_2}^{t_2} x_i(t') dt' \leq \frac{t_2 - t_1}{T} k_l \tau_l, \\ l = \overline{1, K}, \forall t_1, t_2 \in (0;T), t_2 > t_1, \tag{3.4}$$

$$\sum_{i=n+1}^{n_1} t_{il} \int_{t_1}^{t_2} x_i(t') dt' \leq \frac{t_2 - t_1}{T} y_l \tau_l, \quad \forall t_1, t_2 \in (0;T), \tag{3.5}$$

$$\sum_{j=m+1}^{m_1} \beta_j \int_0^t Z_j(t') dt' \leq \int_0^t f_1(t) dt, \quad \forall t \in (0;T), \tag{3.6}$$

$$\sum_{l=K+1}^{K_1} y_l \gamma_l \leq F_2(t), \tag{3.7}$$

$$\int_0^T x_i(t) dt \leq Pt_i, \qquad i = \overline{1, n}. \tag{3.8}$$

Здесь $L_j(t')$ – интенсивность поступления материального ресурса вида j при производстве традиционных видов продукции, $Z_j(t')$ – интенсивность поступления материальных ресурсов для новых видов продукции, $f_1(t)$ – интенсивность поступления финансовых ресурсов для закупки новых видов материальных ресурсов, $F_2(t)$ – инвестиции, выделяемые на закупку новых видов оборудования, y_l —количество единиц дополнительно закупаемого оборудования вида l.

3.2. Динамическая модель перепрофилирования предприятия. Рассмотрим ситуацию, когда традиционно выпускаемая продукция предприятия становится все менее востребованной потребителем, поэтому на складе предприятия скапливаются большие запасы нереализованной продукции, а само предприятие вместо прибыли получает убытки. В этом случае менеджмент предприятия может принять одно из решений: либо полностью закрыть предприятие, либо переориентировать его на выпуск других, более востребованных на рынке видов продукции. В качестве источников финансирования для реализации проекта перепрофилирования предприятия могут быть использованы: собственные инвестиции, привлеченный заемный капитал, средства, полученные от продажи оборудования, которое применялось для выпуска традиционной продукции, средства, полученные от продажи запасов материальных ресурсов, необходимых для производства традиционной продукции, средства, полученные от реализации запасов традиционно выпускаемой продукции по заниженной цене. Математическая модель оценки эффективности проекта перепрофилирования предприятия дана ниже.

Рассмотрим ситуацию, когда предприятие отказывается от выпуска традиционных видов продукции $(i = \overline{1,n})$ и переходит на выпуск новых видов продукции $(i = \overline{n+1,n_1})$. В этом случае модель оптимизации прибыли в условиях перепрофилирования предприятия может быть записана следующим образом:

$$\sum_{i=n+1}^{n1}\int_{o}^{T} c_i\left(\xi(t)\right)x_i(t)\,dt \to \max, \tag{3.9}$$

$$\sum_{j=m+1}^{M} l_{ij}\int_{0}^{t} x_i(t')\,dt' \le \int_{0}^{t} Z_j(t')\,dt', \quad j = \overline{1,M}, \ \forall t \in (0;T), \tag{3.10}$$

$$\sum_{i=n+1}^{n1}\int_{t_1}^{t_2} x_i(t')\,dt' \le \frac{t_2 - t_1}{T} y_l \tau_l, \quad l = \overline{K+1,K_1}, \tag{3.11}$$

$$\sum_{j=m+1}^{m1} \beta_j \int_{0}^{t} Z_j(t')\,dt' \le \int_{0}^{t} f_1(t')\,dt', \tag{3.12}$$

$$\sum_{l=k+1}^{k1} y_l\gamma_l \le F_2(t) + \sum_{j=1}^{m} L_j\beta_j + \sum_{i=1}^{n} \widetilde{a_i} x_i. \tag{3.13}$$

Здесь $F_2(t)$ – инвестиции, также выделяемые на закупку новых видов оборудования, L_j – запасы материальных ресурсов вида j для выпуска традиционных видов продукции, β_j – цена закупаемых материальных ресурсов вида j, $\widetilde{a_i}$ – стоимость продукции вида i, реализуемой по заниженной цене, x_i – количество единиц продукции вида i, $f_1(t)$ – интенсивность поступления финансовых ресурсов для закупки новых видов материальных ресурсов.

3.3. Динамическая модель выбора оптимальной производственной программы с учетом емкости склада. Ниже будет рассмотрена модель выбора оптимальной производственной программы, в которой в отличие от ранее приведенной модели учитывается ограничение на емкость склада для готовой продукции:

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{o}^{T} c_i\left(\xi(t)\right)x_i(t)\,dt \to \max, \tag{3.14}$$

$$\sum_{i=1}^{n} l_{ij}\int_{0}^{t} x_i(t')\,dt' \le \int_{0}^{t} W_j(t')\,dt', \quad j = \overline{1,M}, \quad \forall t \in (0;T), \tag{3.15}$$

$$\sum_{i=1}^{n} v_i \int_0^T x_i(t)\,dt \le V, \tag{3.16}$$

$$\sum_{i=1}^{n} t_{il} \int_{t_1}^{t_2} x_i(t')\,dt' \le \frac{t_2 - t_1}{T} k_l \tau_l, \quad \forall t_1, t_2 (t_2 > t_1), l = \overline{1,K}, \tag{3.17}$$

$$\int_0^T x_i(t)\,dt \le Pt_i, \quad x_i(t) \ge 0, \forall t \in (0;T). \tag{3.18}$$

Здесь $W_j(t')$ – интенсивность поступления комплектующих вида j, V – объем склада, занимаемый одной единицей продукции вида i.

3.4. Динамическая модель управления оборотным капиталом сборочного производства с учетом закупки комплектующих. В этой модели, в отличие от предыдущей, можно пополнять запасы комплектующих за счет заданной интенсивности поступления оборотных средств. Математическая модель управления закупками комплектующих состоит в следующем:

$$\sum_{i=1}^{n} \int_o^T c_i(\xi(t)) x_i(t)\,dt \to \max, \tag{3.19}$$

$$\sum_{i=1}^{n} l_{ij} \int_0^t x_i(t')\,dt' \le \int_0^t W_j(t')\,dt' + \int_0^t Z_j(t')\,dt', \\ j = \overline{1,M}, \quad \forall t \in (0;T), \tag{3.20}$$

$$\sum_{i=1}^{n} v_i \int_0^T x_i(t)\,dt \le V, \tag{3.21}$$

$$\sum_{i=1}^{n} t_{il} \int_{t_1}^{t_2} x_i(t')\,dt' \le \frac{t_2 - t_1}{T} k_l \tau_l, \quad \forall t_1, t_2 (t_2 > t_1), l = \overline{1,K}, \tag{3.22}$$

$$\sum_{j=1}^{m} \beta_j \int_0^t Z_j(t')\,dt' \le \int_0^t f_1(t')\,dt', j = \overline{1,M}, \quad \forall t \in (0;T), \tag{3.23}$$

$$\int_0^T x_i(t)\,dt \le Pt_i, \; i = \overline{1,n}. \tag{3.24}$$

Здесь $Z_j(t)$ – интенсивность поступления закупаемых дополнительно комплектующих вида j, $f(t)$ – интенсивность поступления оборотных средств, β_j – цена закупаемых комплектующих вида j.

3.5. Динамическая модель управления оборотным капиталом сборочного производства с учетом дополнительной аренды склада. Рассматриваемая ниже модель управления оборотными средствами предприятия является обобщением производственной модели, в которой оборотные средства используются как для закупки комплектующих, так и для дополнительной аренды складских помещений для готовой продукции:

$$\sum_{i=1}^{n} \int_o^T c_i(\xi(t)) x_i(t)\,dt \to \max, \tag{3.25}$$

$$\sum_{i=1}^{n} l_{ij} \int_0^t x_i(t')dt' \le \int_0^t W_j(t')dt' + \int_0^t Z_j(t')dt',$$
$$j = \overline{1,M}, \quad \forall t \in (0;T), \tag{3.26}$$

$$\sum_{i=1}^{n} t_{il} \int_{t_1}^{t_2} x_i(t')dt' \le \frac{t_2 - t_1}{T} k_l \tau_l, \quad \forall t_1, t_2 (t_2 > t_1), l = \overline{1,K}, \tag{3.27}$$

$$\sum_{i=1}^{n} v_i \int_0^T x_i(t)dt \le W + Y, \tag{3.28}$$

$$\sum_{j=1}^{m} \beta_j \int_0^t Z_j(t')dt' + dY \le \int_0^t f_1(t')dt', j = \overline{1,M}, \quad \forall t \in (0;T), \tag{3.29}$$

$$\int_0^T x_i(t)dt \le Pt_i, \; i = \overline{1,n}. \tag{3.30}$$

Здесь Y – дополнительная емкость склада, достигаемая за счет аренды, d – цена аренды одной единицы складской площади.

3.6. Динамическая модель выбора оптимальной производственной программы с учетом ограничений на заказ. Рассмотрим модель (3.14)–(3.18) с учетом дополнительного ограничения:

$$\int_0^T x_i(t)dt \ge Zak_i, \; i = \overline{1,n}. \tag{3.31}$$

Ограничение (3.31) означает, что продукция вида i должна быть выпущена в объеме не менее Zak_i. В этой ситуации оптимизационная модель (3.14)–(3.18), (3.31) не всегда имеет решение в силу следующих причин:

а) существует l, для которого выполняется

$$\sum_{i=1}^{n} t_{il} Zak_i > k_l \tau_l, \; l = \overline{1,K},$$

б) не выполняется ограничение на объем склада:

$$\sum_{i=1}^{n} v_i Zak_i > V,$$

в) существует вид комплектующей j, для которой верно

$$\sum_{i=1}^{n} l_{ij} Zak_i > W_j, j = \overline{1,M}.$$

В этой ситуации для того, чтобы заказ был выполнен на заданном интервале (0;T), необходимы дополнительные инвестиции по следующим направлениям: увеличение производственной мощности предприятия, дополнительная закупка комплектующих или дополнительная аренда склада. Также возможно, что инвестиции необходимы сразу по нескольким из перечисленных направлений.

Для того чтобы определить минимальный объем инвестиций и направления инвестирования, необходимо решить следующую оптимизационную задачу:

$$dY + \sum_{l=1}^{K} y_l \gamma_l + \sum_{j=1}^{m} Z_j \beta_j \to \min, \tag{3.32}$$

$$\sum_{l=1}^{k} t_{il} \int_{t_1}^{t_2} x_i(t)\,dt \le \frac{t_2 - t_1}{T}(k_l + y_l), \tag{3.33}$$

$$\sum_{i=1}^{n} v_i \int_0^T x_i(t)\,dt \le V + Y, \tag{3.34}$$

$$\sum_{i=1}^{n} l_{ij} \int_0^t x_i(t')\,dt' \le \int_0^t L_j(t')\,dt' + Z_j, j = \overline{1, M}, \tag{3.35}$$

$$\int_0^T x_i(t)\,dt \le Pt_i,\ \ i = \overline{1,n}, \tag{3.36}$$

$$\int_0^T x_i(t)\,dt \ge Zak_i,\ \ i = \overline{1,n}. \tag{3.37}$$

Здесь Y – дополнительная емкость склада, достигаемая за счет аренды, d – цена аренды одной единицы складской площади, y_l – дополнительно закупаемое множество единиц оборудования вида l, γ_l – цена за единицу закупаемого оборудования вида l, Z_j – количество единиц закупаемых дополнительно комплектующих вида j.

3.7. Динамическая модель управления закупками комплектующих с учетом привлечения кредита. Пусть в модели (3.19)–(3.24) для закупки комплектующих можно использовать кредит помимо собственных оборотных средств, причем кредит выдается предприятию под процент α (в долях).

Для того чтобы выяснить, целесообразно ли привлекать кредит для закупки комплектующих, необходимо рассмотреть две стратегии.

1. Кредит не привлекается. В этом случае решается оптимизационная задача (3.19)–(3.24) и находится объем прибыли, задаваемый целевым функционалом (3.19).

2. Кредит привлекается с учетом процента α и решается задача о закупке комплектующих с учетом этого требования. Тогда оптимизационная модель будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{n} \int_0^T c_i(\xi(t)) x_i(t)\,dt - \\ -\alpha\left(\sum_{j=1}^{m} \beta_j \int_0^T Z_j(t)\,dt - \int_0^T f(t)\,dt\right) \to \max,\end{gathered} \tag{3.38}$$

$$\sum_{i=1}^{n} l_{ij} \int_0^t x_i(t')\,dt' \le \int_0^t W_j(t')\,dt' + \int_0^t Z_j(t')\,dt', \tag{3.39}$$

$$\sum_{i=1}^{n} v_i \int_0^T x_i(t)\,dt \le V, \tag{3.40}$$

$$\sum_{i=1}^{n} t_{il} \int_{t_1}^{t_2} x_i(t')dt' \le \frac{t_2 - t_1}{T} k_l \tau_l,$$
$$l = \overline{1,K},\ \ \forall t_1, t_2 \in (0;T), t_2 > t_1, \tag{3.41}$$

$$\sum_{j=1}^{m} \beta_j \int_{0}^{t} Z_j(t')dt' \le \int_{0}^{t} f(t')dt' +$$
$$+\int_{0}^{t} f_{кр}(t')dt',\ \ \forall t \in (0;T), \tag{3.42}$$

$$\sum_{j=1}^{m} \beta_j \int_{0}^{t} Z_j(t')dt' > \int_{0}^{t} f(t')dt', \tag{3.43}$$

$$\int_{0}^{T} x_i(t)dt \le Pt_i,\ \ i = \overline{1,n}, \tag{3.44}$$

$$x(t) \ge 0. \tag{3.45}$$

В модели (3.38)–(3.45) используются следующие обозначения: ± – кредитная ставка (в долях), $f_{кр}(t)$ – интенсивность поступления кредитных ресурсов.

Величина

$$\alpha\left(\sum_{j=1}^{m} \beta_j \int_{0}^{T} Z_j(t)dt - \int_{0}^{T} f(t)dt\right)$$

– это величина отчислений банку за пользование кредитными ресурсами.

Таким образом, решая задачу (3.19)–(3.24) без кредита и (3.38)–(3.45) с кредитом выбираем тот вариант, который соответствует большему значению прибыли (целевые функции (3.19) и (3.38)).

3.8. Динамическая модель сборочного производства с учетом оттока конечной продукции со склада. В этой модели предполагается, что в процессе производства на интервале (0; T) на склад не только поступает готовая продукция, но и осуществляется ее вывоз клиентам (отток). В этой ситуации модель выбора оптимальной производственной программы может быть представлена следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{0}^{T} c_i(\xi(t)) x_i(t)dt \to \max, \tag{3.46}$$

$$\sum_{i=1}^{n} l_{ij} \int_{0}^{t} x_i(t')dt' \le \int_{0}^{t} W_j(t')dt',\ \forall t \in (0;T),\ j = \overline{1,M}, \tag{3.47}$$

$$V - \sum_{i=1}^{n} v_i \int_{0}^{T} x_i(t')dt' + \sum_{i=1}^{n} v_i \int_{0}^{T} q_i(t')dt' \ge 0,\ \ \forall t \in (0;T), \tag{3.48}$$

$$\sum_{i=1}^{n} t_{il} \int_{t_1}^{t_2} x_i(t')dt' \le \frac{t_2 - t_1}{T} k_l \tau_l,\ \ \ l = \overline{1,K},$$
$$\forall t_1, t_2 \in (0;T), t_2 > t_1, \tag{3.49}$$

$$\int_0^T x_i(t)dt \le Pt_i,\ \ i = \overline{1,n},\ x(t) \ge 0,\ \forall t \in (0;T). \qquad (3.50)$$

Здесь $q_i(t)$ – интенсивность оттока готовой продукции со склада в момент t, V – первоначальная емкость склада. Таким образом, ограничение (3.48) говорит о том, что в каждый момент времени $t \in$ (0; T) склад не должен быть переполнен.

3.9. Динамическая модель управления оборотными средствами группы предприятий, выпускающих однородную продукцию. Ниже будет рассмотрена ситуация, когда необходимо решить проблему оптимизации производственной программы нескольких предприятий в условиях ограничений на производственные мощности, объем оборотных средств, направляемых на закупку комплектующих, объем складских площадей, на которых хранятся комплектующие.

В этих условиях оптимизационная модель может быть сформирована следующим образом:

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\int_0^T x_{ij}(t)c_{ij}(\xi(t))dt \to \max. \qquad (3.51)$$

Здесь $x_{ij}(t)$ – интенсивность выпуска продукции вида iна предприятии вида j, $c_{ij}(\square(t))$ – маржинальный доход от выпуска продукции вида iна предприятии вида j в момент времени t, при уровне накопленной инфляции $\xi(t)$:

$$\sum_{i=1}^{n} t_{il}\int_{t_1}^{t_2} x_i(t')dt' \le \frac{t_2 - t_1}{T}\theta_{lj},\ \ l = \overline{1,K}, j = \overline{1,M},$$

$$\forall t_1, t_2 \in (0;T), t_2 > t_1, \qquad (3.52)$$

где θ_{lj} – лимит эффективного времени работы оборудования вида l на предприятии вида j, t_{il} – время закупки оборудования вида l при выпуске одной единицы продукции вида j. Неравенство (3.52) – это ограничение на равномерность загрузки оборудования.

$$\sum_{i=1}^{n} v_i\int_0^T x_{ij}(t)dt \le W_j,\ \ j = \overline{1,M}. \qquad (3.53)$$

Здесь v_i – объем склада, занимаемый комплектующими для одной единицы продукции вида i, $\int_0^T x_{ij}(t)dt$ – объем выпуска продукции вида i на предприятии j, W_j – емкость склада предприятия j.

$$\sum_{i=1}^{n} l_{iq}\int_0^t x_{ij}(t')dt' \le \int_0^t Z_{qj}(t')dt',\ \ j = \overline{1,M}, q = \overline{1,L}. \qquad (3.54)$$

Здесь $Z_{qj}(t)$ – интенсивность закупки комплектующих вида q на предприятии j, L – количество комплектующих вида q, необходимых для выпуска единицы продукции вида i.

$$\sum_{q=1}^{L}\beta_q\int_0^t Z_{qj}(t')dt' \le \int_0^t f_j(t')dt',\ \ j = \overline{1,M},\ \forall t \in (0;T), \qquad (3.55)$$

где β_q – цена комплектующих вида q, $f_j(t)$ – интенсивность поступления оборотных средств на предприятие j. Неравенство (3.55) – это ограничение на объем использования оборотных средств предприятия j. Также существует следующее ограничение на спрос:

$$\sum_{j=1}^{M}\int_{0}^{T}x_{ij}\left(t\right)dt \le Pt_i,\ \ i=\overline{1,n},\ x\left(t\right)\ge 0\forall t\in\left(0;T\right). \tag{3.56}$$

3.10. Динамическая модель управления оборотными средствами нескольких предприятий с учетом привлечения кредита. Рассмотрим обобщение предыдущей модели в условиях возможности привлечения кредита как для закупки комплектующих, так и для аренды дополнительных складских помещений. Далее будем считать, что кредит для закупки комплектующих привлекается под процент $\pm_1$(в долях), а кредит для аренды склада – под процент $\pm_2$ (в долях).

Целесообразность привлечения кредитных ресурсов можно оценить, если рассмотреть следующие возможности его использования:

а) кредит не привлекается;

б) кредит привлекается для закупки комплектующих;

в) кредит привлекается для дополнительной аренды складских помещений;

г) кредит привлекается и для закупки комплектующих, и для дополнительной аренды склада.

Ситуация а), когда кредит не привлекается, рассмотрена в модели (3.51)–(3.56). Далее она будет называться задачей 1.

Рассмотрим ситуацию б), далее будем называть ее задачей 2. Модель оптимизации прибыли в этом случае может быть следующей:

$$\begin{gathered}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\int_{0}^{T}x_{ij}\left(t\right)c_{ij}\left(\xi\left(t\right)\right)dt-\alpha_1\Big(\sum_{j=1}^{M}\sum_{q=1}^{L}\beta_q\int_{0}^{t}Z_{qj}\left(t'\right)dt'-\\ -\sum_{j=1}^{M}\int_{0}^{t}f_j\left(t'\right)dt'\Big)\to\max,\end{gathered} \tag{3.57}$$

$$\sum_{i=1}^{n}t_{il}\int_{t_1}^{t_2}x_{ij}\left(t'\right)dt'\le\frac{t_2-t_1}{T}\theta_{lj},\ \ \ l=\overline{1,K},j=\overline{1,M}, \tag{3.58}$$

$$\sum_{i=1}^{n}v_i\int_{0}^{T}x_{ij}\left(t\right)dt\le W_j,\ \ j=\overline{1,M}, \tag{3.59}$$

$$\sum_{i=1}^{n}l_{iq}\int_{0}^{t}x_{ij}\left(t'\right)dt'\le\int_{0}^{t}Z_{qj}\left(t'\right)dt',\ \ j=\overline{1,M},q=\overline{1,L}, \tag{3.60}$$

$$\sum_{q=1}^{L}\beta_q\int_{0}^{t}Z_{qj}\left(t'\right)dt'\le\int_{0}^{t}f_j\left(t'\right)dt'+\int_{0}^{t}f_j^{кр}\left(t'\right)dt',j=\overline{1,M}. \tag{3.61}$$

Здесь $f_j^{кр}\left(t\right)$ – интенсивность поступления кредитных средств на предприятие j.

$$\sum_{q=1}^{L}\beta_q\int_{0}^{t}Z_{qj}\left(t'\right)dt'>\int_{0}^{t}f_j\left(t'\right)dt',\ \ j=\overline{1},\ \left(0,t\right)\subseteq\left(0;T\right). \tag{3.62}$$

Ограничение (3.62) означает, что существует интервал времени $\left(0,t\right)\subseteq\left(0;T\right)$, на котором затраты на закупку комплектующих превышают имеющиеся у предприятия оборотные средства на отрезке времени $\left(0,t\right)$, и поэтому недостаток оборотных средств компенсируется за счет привлечения кредита под процент $\pm_1$.

$$\sum_{j=1}^{M}\int_{0}^{T}x_{ij}\left(t\right)dt\le Pt_i,\ \ i=\overline{1,n},\ \ j=\overline{1,M} \tag{3.63}$$

Отметим, что в целевой функции (3.55) отрицательное слагаемое задает объем дополнительных затрат, связанных с привлечением кредита.

Рассмотрим ситуацию, когда кредит привлекается для дополнительной аренды склада (задача 3).

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\int_{0}^{T} x_{ij}(t)c_{ij}(\xi(t))dt-(1+\alpha_2)\sum_{j=1}^{M}W_j y_j \to \max, \tag{3.64}$$

$$\sum_{i=1}^{n}t_{il}\int_{t_1}^{t_2} x_{ij}(t')dt' \le \frac{t_2-t_1}{T}\theta_{lj}, \quad l=\overline{1,K}, j=\overline{1,M}, \tag{3.65}$$

$$\sum_{i=1}^{n}v_i\int_{0}^{T} x_{ij}(t)dt \le W_j + w_j y_j, \quad j=\overline{1,M}. \tag{3.66}$$

Здесь w_j – емкость дополнительно арендованных складских помещений, y_j –стоимость аренды одной единицы складского пространства.

$$\sum_{i=1}^{n}v_i\int_{0}^{T} x_{ij}(t)dt > W_j, \quad j=\overline{1,M}. \tag{3.67}$$

Из ограничения (3.67) следует, что объем комплектующих при выпуске конечной продукции на предприятии j выше емкости склада, на котором хранятся данные комплектующие.

$$\sum_{i=1}^{n}l_{iq}\int_{0}^{t} x_{ij}(t')dt' \le \int_{0}^{t} Z_{qj}(t')dt', \quad j=\overline{1,M}, q=\overline{1,L}, \tag{3.68}$$

$$\sum_{q=1}^{L}\beta_q\int_{0}^{t} Z_{qj}(t')dt' \le \int_{0}^{t} f_j(t')dt', \quad j=\overline{1,M}, \ \forall t\in(0;T), \tag{3.69}$$

$$\sum_{j=1}^{M}\int_{0}^{T} x_{ij}(t')dt' \le Pt_i, \quad i=\overline{1,n}, \quad j=\overline{1,M}. \tag{3.70}$$

Отметим, что в целевой функции (3.64) слагаемое

$$(1+\alpha_2)\sum_{j=1}^{M}W_j y_j$$

– это затраты на дополнительную аренду склада.

Рассмотрим ситуацию, когда кредит привлекается и с целью закупки комплектующих, и с целью аренды дополнительных складских площадей (задача 4).

$$\begin{gathered}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\int_{0}^{T} x_{ij}(t)c_{ij}(\xi(t))dt-\alpha_2\Big(\sum_{j=1}^{m}\sum_{q=1}^{L}\beta_q\int_{0}^{T} Z_{qj}(t')dt'-\\ -\sum_{j=1}^{M}\int_{0}^{t} f_j(t')dt'\Big)-(1+\alpha_2)\sum_{j=1}^{M}W_j y_j \to \max,\end{gathered} \tag{3.71}$$

$$\sum_{i=1}^{n}t_{il}\int_{t_1}^{t_2} x_{ij}(t')dt' \le \frac{t_2-t_1}{T}\theta_{lj}, \quad l=\overline{1,K}, j=\overline{1,M}, \tag{3.72}$$

$$\sum_{i=1}^{n} v_i \int_0^T x_{ij}(t)\,dt \le W_j + w_j y_j, \quad j = \overline{1, M}, \tag{3.73}$$

$$\sum_{i=1}^{n} v_i \int_0^T x_{ij}(t)\,dt > W_j, \quad j = \overline{1, M}, \tag{3.74}$$

$$\begin{gathered} \sum_{i=1}^{n} l_{iq} \int_0^t x_{ij}(t')\,dt' \le \int_0^t Z_{qj}(t')\,dt', \\ j = \overline{1, M}, q = \overline{1, L}, \ \forall t \in (0; T), \end{gathered} \tag{3.75}$$

$$\begin{gathered} \sum_{q=1}^{L} \beta_q \int_0^t Z_{qj}(t')\,dt' \le \int_0^t f_j(t')\,dt' + \int_0^t f_j^{\text{кр}}(t')\,dt', \\ j = \overline{1, M}, \end{gathered} \tag{3.76}$$

$$\sum_{q=1}^{L} \beta_q \int_0^t Z_{qj}(t')\,dt' > \int_0^t f_j(t')\,dt', \tag{3.77}$$

$$\sum_{j=1}^{M} \int_0^T x_{ij}(t)\,dt \le Pt_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, M}. \tag{3.78}$$

Таким образом, были рассмотрены различные варианты привлечения кредита. Для оценки эффективности каждого варианта решается соответствующая оптимизационная задача (задачи 1–4). В итоге выбирается та стратегия, которая дает более высокое значение маржинального дохода (целевых функционалов (3.51), (3.57), (3.64), (3.71)).

4. Компьютерные расчеты по выбору оптимальной производственной программы на примере металлургического предприятия. Рассмотрим металлургическое предприятие, специализирующееся на производстве сортового и листового проката для реализации на российском строительном рынке. Ассортимент строительного проката, производимого на российском рынке, насчитывает сотни товарных позиций, включая различные виды арматуры, балок и швеллеров, гнутых металлических профилей из тонкого листа, металлические бруски и пр. Все эти виды продукции не являются взаимозаменяемыми и необходимы при реализации большинства строительных проектов как в сфере жилищного строительства, так и в секторе коммерческой недвижимости. Стоимость изделий, реализуемых металлургическими предприятиями, постоянно меняется на фоне динамики котировок мирового рынка стали и чугуна, каменного угля и кокса, а также железорудного сырья, лома и стальной заготовки.

В настоящее время российские производители металлических изделий функционируют в условиях неблагоприятной рыночной конъюнктуры: в частности, по данным Росстата, объем строительных работ в России в 2016 г. сократился на 5%. При этом на фоне сокращения предложения коксующегося угля со стороны Китая более чем в 1,5 раза выросли цены на кокс, используемый при выплавке чугуна доменным способом. Это привело к удорожанию черных металлов и росту цен на готовую продукцию, что еще сильнее отталкивает покупателей находящейся в кризисе строительной отрасли.

Основным сегментом рынка, потребляющим металлические изделия вышеописанного типа, являются частные строительные компании. В работе не рассматриваются ситуации государственных закупок или поставок крупным потребителям (например, холдингам ОАО «РЖД» или ПАО «Газпром», закупающим данные изделия для внутренних нужд), поскольку для участия в процедуре тендера фокусная компания принимает решение о формировании производственной программы исходя из запросов крупного заказчика, имеющего большее влияние на рынке. В случае же реализации продукции большому перечню небольших компаний по краткосрочным контрактам у производителя есть возможность более гибко организовать производственный процесс.

Исходя из вышеописанного можно сделать вывод, что применение оптимизационных моделей выбора производственной программы предприятий целесообразно для предприятий-производителей строительного проката в условиях нестабильности рыночной ситуации и необходимости сокращать затраты предприятия с целью повышения рентабельности бизнеса.

4.1. Описание фокусной компании-производителя металлических изделий. Рассмотрим в качестве примера предприятие, которое является одним из ключевых производителей металлургической продукции строительного сортамента в своем регионе. Его деятельность в условиях нестабильности спроса и общего снижения объемов строительных работ требует максимальной эффективности управления финансовыми ресурсами. В связи с этим необходимо привести информацию об ассортименте готовой продукции (ГП) данного предприятия, потребляемых при ее производстве материальных ресурсах (МР), а также об имеющемся оборудовании, которое используется для изготовления металлических изделий.

Также есть информация о ценах, по которым продукция должна будет реализовываться в течение периода (при этом цены могут и изменяться при существенном изменении рыночной конъюнктуры). Для расчетов цены видов продукции, измеряемой в тоннах, квадратных метрах и иных единицах, приведены к руб/т. Объемы продукции также приведены к тоннам (табл. 1).

Рассматривается ситуация определения производственной программы предприятия на один плановый период (квартал). Компания располагает прогнозом спроса на этот период по всем ранее обращавшимся к ней клиентам (суммарный спрос по ним учитывается как величина спроса на один вид продукции), при этом есть некий минимальный объем реализации (заказ), также суммируемый по клиентам компании. Максимальный объем реализации вычисляется исходя из обмена информацией с контрагентами и статистики продаж в предыдущих периодах (отношение объемов продаж к предварительно размещенным заказам). Также в него закладывается возможный дополнительный объем реализации новым покупателям, ранее не обращавшимся к фокусной компании (их спрос вычисляется как разность между долями уже существующих клиентов и общей емкостью рыночного сегмента).

Имеются следующие данные о потребляемых для различных видов продукции ресурсах. Помимо этого, нужно дать описание запасам предприятия, хранящимся на складах вблизи производственной площадки (данные об остатках приведены на начало периода) (табл. 2).

Таблица 1. Перечень выпускаемой продукции, цена и величина спроса на ГП

Продукция	Цена реализации, руб/т	Размер заказа, т	Максимальная величина спроса, т
Швеллер №10	17 685.5	12.7	15.6
Арматура для ж/б конструкций 6 мм гл.	25 173.2	11.2	14.9
Арматура для ж/б конструкций 12 мм гл.	25 393.9	12.6	16.1
Брусок металлический 5х50 мм	20 281.7	13.3	16.7
Швеллер № 16	23 762.7	13.4	16.6
Балка 20х16 мм	16 825.3	12.5	16.6
Балка 25х25 мм	19 669.7	12.4	15.1
Балка 20х20 мм	19 848.4	12.4	14.7
Арматура 20 мм гл.	24 228.4	13.0	16.8
Профиль квадратный 23х23х1,5	19 715.5	12.8	15.7
Профиль квадратный 10х10х1,5	19 810.9	14.1	16.9
Профиль металлический 140 3СП5	18 339.6	12.7	16.9
Уголок 80х80х2	18 096.8	13.1	17.5
Шестигранник стальной 14 мм	20 008.4	13.9	15.8
Труба профильная 5х5х3	23 781.7	11.9	15.5
Труба профильная 5х5х2	22 402.5	12.2	15.0
Труба профильная 6х6х3	24 528.6	11.1	14.5
Профиль потолочный П60х27-3000	20 619.8	14.3	17.2
Профиль перфорированный 08ПС	24 435.4	11.9	13.4
Тавр тепличный 32х25х3	23 730.5	11.5	13.2

Таблица 2. Нормы расхода МР (на тонну ГП) для различных видов продукции

Катанка 6/12/20	Лист стальной 1,5/2/3/5	Заготовка квадратная	Цинковое покрытие	Краска	Электроэнергия для питания станков	ФОТ производственного прсонала
мм, т		т			руб.	
		1.01			56.5	848.0
1.16					66.1	836.0
1.18					65.2	965.0
		1.15		.	55.7	991.0
1.1					51.7	808.0
		0.96		0.004	89.2	804.0
		1.07		0.006	92.1	945.0
		1.1		0.005	79.7	806.0
1.11					64.0	857.0
		1.08	0.005		78.2	836.0
		1.12	0.006		86.8	872.0
		1.03	0.005		82.7	844.0
		1.02			48.7	864.0
		1.2			29.5	970.0
	1.1		0.007	0.007	108.5	880.0
	1.02		0.007	0.008	111.6	971.0
	1.13		0.007	0.006	97.5	859.0
	0.95		0.003		61.4	964.0
	1.16		0.003		56.1	818.0
	1.11		0.002		64.6	947.0

В табл. 2 указаны нормы расхода электроэнергии из расчета стоимости одного кВт*ч, равной 2 руб., и мощности эксплуатируемого оборудования. В переменные издержки входит фонд оплаты труда (ФОТ) производственного персонала со сдельной системой оплаты труда. Данные виды затрат сразу переведены в денежный эквивалент и суммируются в модели без повторного умножения на стоимость их приобретения. Часть материальных ресурсов используется только для некоторых видов продукции (в случае, если материальный ресурс какого-либо вида не применяется при производстве определенной номенклатурной позиции, в таблице не указана норма его расхода). Это дополнительно усложняет процесс принятия управленческих решений, поскольку от грамотного определения производственной программы будет зависеть, надо ли будет отделу снабжения приобретать все возможные МР или же только их часть.

Предприятие располагает двумя производственными линиями, каждая из которых включает в себя по одному виду вышеперечисленного оборудования. Загрузка производственных мощностей в штатной ситуации достигает 70% при условии трехсменного графика работы по 30 дней/мес (табл. 3).

Стоит отметить, что поскольку все объемы и затраты приводятся на тонну, в рамках решения данной задачи нет принципиальной разницы в цене закупки стальных листов и катанки различного сортамента, так как их различие для предприятия обусловлено в первую очередь габаритными, а не весовыми или иными качественными характеристиками.

Данные о стоимости закупки МР и объемах располагаемых запасов представлены в табл. 4. Также предприятие имеет данные о своих постоянных издержках и располагаемых финансовых средствах на банковском счете, которые можно использовать как для закупки недостающих МР, так и для приобретения нового оборудования и аренды складских мощностей в случае необходимости. В постоянные издержки предприятия входят затраты на электроэнергию для освещения и вентиляции, отопление, МР, используемые вне производства ключевой продукции компании, включая канцелярские товары и расходные материалы для обслуживаю-

Таблица 3. Нормы расходы времени при производстве готовой продукции, мин

Прокатный стан			Нож для резки		Установка	
№1	№2	№3	проката	стали	для оцинковки	для покраски
		112	194	166		
162			159	174		
143			170	183		
		104	169	187		
119			144	131		
		153	186	185		153
		172	189	138		191
		138	195	146		134
137			177	176		
		149	113	190	163	
		185	131	192	176	
		197	151	173	137	
		110	196	108		
			127	126		
	128		177	172	167	197
	187		198	135	188	180
	200		168	199	126	104
	174		128	130	104	
	107		102	129	135	
	157		148	116	140	

Таблица 4. Данные о стоимости закупки МР и объемах располагаемых запасов

Вид материального ресурса	Катанка 6/12/20	Лист стальной 1,5/2/3/5	Заготовка квадратная	Цинковое покрытие	Краска
	мм				
Стоимость закупки МР, руб/т	19500	18800	15570	14000	18000
Объем запаса МР на складах предприятия, т	60.2	82.6	147.7	0.6	0.5

щих хозяйств, оплата труда менеджеров и другого персонала с повременной системой оплаты труда и ряд других затрат. Для фокусной компании примем, что общая величина таких издержек составит 400 000 руб. за период. При этом предприятие располагает дополнительным объемом денежных средств в размере 900 000 руб. для обеспечения деятельности в будущем.

Используя имеющиеся данные, управленческому персоналу необходимо найти оптимальную производственную программу предприятия при помощи наиболее подходящей для рассматриваемой ситуации модели выбора производственной программы.

4.2. Математическая постановка задачи выбора оптимальной производственной программы предприятия. На основании вышеперечисленных данных и табл. 5 сформируем постановку задачи выбора производственной программы предприятия.

В рамках представленных условий сформируем в Excel модели целевой функционал (1.1) и его ограничения (1.2)–(1.6), включая ограничения на целочисленность решения, его неотрицательность и соответствие объему спроса на производимую продукцию. В результате применения надстройки «Поиск решения» была определена следующая производственная программа, задаваемая вектором в крайнем правом столбце табл. 6 (данные приведены с окру-

Таблица 5. Данные о стоимости реализации ГП и переменных издержках, руб/т

Продукция	Цена реализации	Переменные издержки на единицу продукции
Швеллер № 10	17 685.5	16630.2
Арматура для ж/б конструкций 6 мм гл.	25 173.2	23522.1
Арматура для ж/б конструкций 12 мм гл.	25 393.9	24040.2
Брусок металлический 5х50 мм	20 281.7	18952.2
Швеллер № 16	23 762.7	22309.7
Балка 20х16 мм	16 825.3	15912.4
Балка 25х25 мм	19 669.7	17805.0
Балка 20х20 мм	19 848.4	18102.7
Арматура 20 мм гл.	24 228.4	22566.0
Профиль квадратный 23х23х1,5	19 715.5	17799.8
Профиль квадратный 10х10х1,5	19 810.9	18481.2
Профиль металлический 140 3СП5	18 339.6	17033.8
Уголок 80х80х2	18 096.8	16794.1
Шестигранник стальной 14 мм	20 008.4	19683.5
Труба профильная 5х5х3	23 781.7	21892.5
Труба профильная 5х5х2	22 402.5	20500.6
Труба профильная 6х6х3	24 528.6	22406.5
Профиль потолочный П60х27-3000	20 619.8	18927.4
Профиль перфорированный 08ПС	24 435.4	22724.1
Тавр тепличный 32х25х3	23 730.5	21907.6

Таблица 6. Оптимальная производственная программа рассматриваемого предприятия

Продукция	Количество производимой продукции, т
Швеллер № 10	12.684
Арматура для ж/б конструкций 6 мм гл.	11.166
Арматура для ж/б конструкций 12 мм гл.	12.617
Брусок металлический 5х50 мм	13.327
Швеллер № 16	13.359
Балка 20х16 мм	12.518
Балка 25х25 мм	15.136
Балка 20х20 мм	13.189
Арматура 20 мм гл.	15.881
Профиль квадратный 23х23х1,5	15.690
Профиль квадратный 10х10х1,5	14.085
Профиль металлический 140 3СП5	12.687
Уголок 80х80х2	13.136
Шестигранник стальной 14 мм	15.787
Труба профильная 5х5х3	11.928
Труба профильная 5х5х2	12.159
Труба профильная 6х6х3	11.795
Профиль потолочный П60х27-3000	17.188
Профиль перфорированный 08ПС	11.857
Тавр тепличный 32х25х3	12.298

Таблица 7. Оптимальная производственная программа рассматриваемого предприятия с учетом дополнительной закупки материальных ресурсов

№ п.п.	Продукция	Количество производимой продукции, т
1	Швеллер № 10	12.684
2	Арматура для ж/б конструкций 6 мм гл.	11.166
3	Арматура для ж/б конструкций 12 мм гл.	12.617
4	Брусок железный 5х50 мм	13.327
5	Швеллер № 16	13.359
6	Балка 20х16 мм	12.518
7	Балка 25х25 мм	12.384
8	Балка 20х20 мм	12.444
9	Арматура 20 мм гл.	13.029
10	Профиль квадратный 23х23х1,5	12.837
11	Профиль квадратный 10х10х1,5	14.085
12	Профиль металлический 140 3СП5	12.687
13	Уголок 80х80х2	13.136
14	Шестигранник стальной 14 мм	13.930
15	Труба профильная 5х5х3	11.928
16	Труба профильная 5х5х2	12.159
17	Труба профильная 6х6х3	11.146
18	Профиль потолочный П60х27-3000	14.323
19	Профиль перфорированный 08ПС	11.857
20	Тавр тепличный 32х25х3	11.494

Таблица 8. Вектор закупки дополнительных материальных ресурсов

Наименование ресурса	Величина закупки, т
Катанка 6/12/20 мм	11.874
Лист стальной 1,5/2/3/5 мм	16.300
Заготовка квадратная	42.382
Цинковое покрытие	0.117
Краска	0.090

глением до третьего знака после запятой по причине того, что ограничение на целочисленность решения распространяется на килограммы, а не на тонны).

Таким образом, в условиях практического примера было проиллюстрировано решение оптимизационной задачи (1.1)–(1.6). Исходные данные были таковы, что у предприятия хватало запасов для производства продукции в рамках ограничения на размер заказа. Однако если размер заказа увеличится в связи с ростом спроса на продукцию металлургической отрасли в целом по региону, где функционирует рассматриваемое предприятие, данная задача в определенный момент времени не будет иметь допустимых решений. В таком случае предприятию будет необходимо использовать свои финансовые ресурсы для закупки дополнительного объема запасов, для чего в модели присутствуют ограничения (1.9)–(1.15). Если собственных финансовых ресурсов по-прежнему недостаточно для выполнения всех ограничений, то предприятие следует рассмотреть модель выбора оптимальной производственной программы с условием привлечения кредита (2.12)–(2.18).

Рассмотрим решение задачи с учетом формул (1.9)–(1.15). Пусть в данной задаче на 20% уменьшится объем располагаемых запасов предприятия. Тогда ему будет необходимо привлечь дополнительный объем МР за счет собственных финансовых средств. В данном случае постановка задачи в MS Excel несколько изменится. При этом необходимо создать дополнительный целевой функционал, в который добавится слагаемое (1.9), однако для расчета прибыли предприятия продолжаем использовать формулу (1.1). Стоит отметить, что в данный момент предприятие не планирует закупать дополнительное оборудование, в связи с чем ограничения на эти затраты и не влияют на поиск решения. Также следует учесть неотрицательность объемов дополнительно закупаемых МР, что задается при помощи заново создаваемого ограничения на ячейки, содержащие значения Z_j.

В результате применения надстройки "поиск решения" была определена следующая оптимальная производственная программа предприятия (табл. 7). В сравнении с предыдущей моделью изменилось решение для товарных позиций № 7–10, 14, 17, 18 и 20. Для остальных позиций решение осталось неизменно.

С помощью модификации модели с учетом дополнительных закупок МР была получена другая производственная программа (табл. 7, 8). По мере усложнения задачи решение приближается к наилучшему для рассматриваемого предприятия, поэтому целесообразно более углубленно изучить особенности процесса снабжения предприятия, хранения ГП, ее потребления и иных характеристик, влияющих на выбор модели.

Заключение. Предложенные в работе модели выбора оптимальной производственной программы предприятия сокращают издержки производства и увеличивают прибыль предприятия при сохранении требуемого уровня обслуживания клиентов с точки зрения полноты и своевременности поставок ГП. В современных условиях производственным предприятиям необходимо использовать все имеющиеся резервы повышения доходности активов, поэтому применение математических методов при принятии решений становится все более актуальным.

В работе были рассмотрены модели, позволяющие оптимизировать производственную программу предприятия в зависимости от объема располагаемых материальных и финансовых ресурсов, а также в условиях изменяющихся цен, что дает возможность использовать данные модели любым предприятиям вне зависимости от их текущего финансового положения и степени неопределенности внешней среды. Решение поставленных задач средствами MS Excel также делает предложенные модели доступными для всех сфер бизнеса, в том числе для малых предприятий. Применение предложенных моделей оптимизирует работу производственного предприятия с учетом имеющихся складских мощностей и интенсивности потребления производимой продукции. Особенности производственного процесса и хранения ГП позволяют применять все доступные предприятию резервы повышения прибыли за счет оптимизации использования имеющихся ресурсов.

Для наиболее эффективной организации функционирования всей цепи поставок необходимо не только оптимизировать производственную программу предприятия путем формирования графика производства с помощью предложенных моделей, но и согласовать планы снабжения и производства, чтобы избежать формирования излишних запасов на складе. Высвобождение финансовых средств за счет повышения оборачиваемости запасов МР даст возможность при необходимости увеличивать объемы инвестиций в закупку нового оборудования, в том числе для расширения узких мест производства и дальнейшего повышения его эффективности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Карлова Н., Пузанова Е.* Российская обрабатывающая промышленность в условиях санкций: результаты опроса предприятий. Аналитическая записка. Центральный банк Российской Федерации, 2023.
2. *Данилин Н.Н.* Реструктуризация системы управления предприятием в условиях кризиса. Стратегии бизнеса. 2014 № 2, С. 82–87. https://doi.org/10.17747/2311-7184-2014-2-82-87
3. *Mishchenko A.V., Solodovnikov V.V., Apalkova T.G.* Dynamic Models of Production -finance Activity of Enterprises in Conditions of Uncertainties and Risk // Intern. J. of Logistics Systems and Management. 2022. V. 43. No. 1. Pp. 86–111.
4. *Апалькова Т.Г., Мищенко. А.В.* Методы и модели оценки эффективности управления производственно-финансовой деятельностью в промышленной логистике // Логистика и управление цепями поставок. 2016. № 2 (73). С. 8–27.
5. *Мищенко А.В., Андреева М.В.* Модели управления производственной деятельностью предприятия в условиях привлечения заемных средств // Финансы и кредит. 2009. № 2 (338). С. 12–21.
6. *Мищенко А.В., Виноградова Е.В.* Оптимизационные модели управления финансовыми ресурсами предприятия, М.: ИНФРА-М, 2015.

ИЗВЕСТИЯ РАН. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2024, № 2, С. 130–142

ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ И ИДЕНТИФИКАЦИЯ

УДК 519.7

ИНТЕРВАЛЬНЫЕ НАБЛЮДАТЕЛИ ДЛЯ ГИБРИДНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ[1]

© 2024 г. А. Н. Жирабок[a, b, *], А. В. Зуев[b], А. Е. Шумский[a]

[a]*Дальневосточный федеральный ун-т, Владивосток, Россия*

[b]*Институт проблем морских технологий ДВО РАН, Владивосток, Россия*

**e-mail: zhirabok@mail.ru*

Поступила в редакцию: 21.07.2023 г.

После доработки 08.01.2024 г.

Принята к публикации 29.01.2024 г.

Рассматривается задача построения интервальных наблюдателей для гибридных непрерывных стационарных систем при наличии внешних возмущений и шумов измерений. Предполагается, что непрерывная динамика такой системы описывается линейным или нелинейным дифференциальным уравнением состояния с линейной функцией выхода. Значения параметров системы зависят от области, достигнутой ее состоянием, и переключаются с помощью управляющей системы с конечным числом состояний. Приводятся соотношения, позволяющие построить гибридный интервальный наблюдатель минимальной размерности, гарантированно оценивающий множество допустимых значений заданной линейной вектор-функции состояния системы. Для решения задачи используются парная алгебра разбиений и линейная алгебра. Теоретические результаты иллюстрируются примером.

Ключевые слова: гибридные системы, внешние возмущения, шум измерений, интервальные наблюдатели, алгебра разбиений, линейная алгебра.

DOI: 10.31857/S0002338824020116, **EDN:** VOETJU

INTERVAL OBSERVERS FOR HYBRID CONTINUOUS-TIME STATIONARY SYSTEMS

A. Zhirabok[a, b, *], A. Zuev[b], A. Shumsky[a]

[a]*Far Eastern Federal University, Vladivostok, Russia*

[b]*Institute of Marine Technology Problems, Vladivostok, Russia*

**e-mail: zhirabok@mail.ru*

The problem of interval observer design for hybrid continuous-time stationary systems under external disturbances and measurement noise is studied. It is assumed that continuous-time dynamic of such systems is described by linear or nonlinear differential state equations with linear function of output. System parameters depend on system states and are switched based on the control system with finite set of states. The relations allowing designing hybrid interval observer of minimal dimension estimating the set of admissible values of the prescribed linear vector function of the system states are derived. To solve the problem, algebra of partitions and linear algebra are used. Theoretical results are illustrated by example.

Keywords: hybrid systems, external disturbances, measurement noise, interval observers, algebra of partitions, linear algebra.

Введение. Настоящая статья является распространением результатов работы [1], в которой рассматривалась задача построения интервальных наблюдателей для систем, описываемых линейными моделями с непрерывным временем, на гибридные системы (ГС). Гибридные системы представляют собой специальный класс динамических систем, особенность которых состоит в том, что они сочетают конечно-автоматную динамику с непрерывной динамикой. Изучение ГС мотивировано фундаментальной гибридной структурой многих современных систем.

[1] Работа поддержана Российским научным фондом (проект № 23-29-00191), https://rscf.ru/project/23-29-00191/.

Предполагается, что непрерывная динамика зависит от параметров, значения которых определяются выходами конечного автомата (КА). Когда состояние динамической системы достигает определенной области, происходит переключение КА и соответственно изменение параметров. Такой тип ГС был рассмотрен в общем виде в [2–4] и в контексте задачи диагностирования в [5, 6]. Существует много способов описания ГС и правил переключения, включая зависимые от состояния и от времени. Наш выбор обусловлен двумя причинами. Во-первых, предлагаемое описание является достаточно общим и включает в себя другие, зависимые от состояния переключения. Во-вторых, реальные сложные системы имеют две части: управляющую с конечным числом состояний и операционную с непрерывной динамикой; предлагаемая модель хорошо подходит для описания таких систем.

Задача построения интервальных наблюдателей, которые в каждый момент времени вырабатывают гарантированную оценку множества допустимых значений вектора состояния для различных классов динамических систем с неопределенностями, активно исследуется последние годы, обстоятельные обзоры полученных за это время результатов содержатся в [7, 8], решения для различных классов систем, а также практические приложения приведены в [9–14], в том числе для гибридных систем – в [11–14]. Характерной особенностью этих работ является то, что в них определяется оценка множества допустимых значений всего вектора состояния, в то время как для практических приложений может потребоваться аналогичная оценка только для заданной линейной функции вектора состояния. Соответствующий интервальный наблюдатель может оказаться существенно проще наблюдателя полной размерности, интервал станет уже, а класс систем, для которых такой наблюдатель может быть построен, расширится.

В работе ставится и решается задача построения интервальных наблюдателей для гибридных систем, операционная часть которых описывается линейными и нелинейными непрерывными стационарными динамическими моделями, работающими в условиях действия внешних возмущений и шумов измерений, которые позволяют оценить множество допустимых значений заданной линейной функции вектора состояния.

1. Описание ГС. Предполагается, что ГС состоит из двух основных частей. Первая из них – управляющая система (УС) с конечным числом состояний, вторая представляет собой операционную систему (ОС) с непрерывной динамикой. Предполагается, что УС описывается моделью конечного автомата Мура

$$A = (I, S, O, \delta, \lambda),$$

где I, S и O – конечные множества входов, состояний и выходов, а функции переходов δ и выходов λ имеют следующий смысл:

$$s(t^+) = s(t+0) = \delta(s(t), i(t)),\ o(t) = \lambda(s(t)), \tag{1.1}$$

где $s(t^+) \in S$ – состояние УС после его мгновенного перехода из состояния $s(t) \in S$ под входом $i(t) \in I$, $o(t) \in O$ – выход, соответствующий состоянию $s(t)$; обе рассмотренные функции задаются таблицами. Предполагается, что автомат A минимален (неприводим).

Для простоты вначале рассматриваются ОС, описываемые линейными уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= F_o x(t) + G_o u(t) + L\rho(t), \\ y(t) &= Hx(t) + v(t), \end{aligned} \tag{1.2}$$

влияние и учет нелинейностей будет рассмотрено в разд. 4. Здесь $x(t) \in R^n$, $u(t) \in R^m$ и $y(t) \in R^l$ – векторы состояния, управления и выхода; F_o, G_o и H – матрицы размеров $n \times n$, $n \times m$ и $l \times n$ соответственно; L – известная матрица размера $n \times q$; $\rho(t) \in R^{\rho}$ – неизвестная ограниченная функция времени, описывающая возмущения на систему, $\| \rho(t) \| \le \rho_*$; $v(t) \in R^l$ – неизвестная ограниченная функция времени, описывающая шумы измерений, $\| v(t) \| \le v_*$, где $\| \cdot \|$ – евклидова норма. Матрицы F_o и G_o соответствуют режиму ОС, активированному выходом $o \in O$ УС. Предполагается, что элементы этих матриц представляют собой известные функции от параметров $a = (a_1, a_2, \ldots, a_q)$, зависимость значений этих параметров от выходов УС устанавливается специальной таблицей. Отметим, что уравнение (1.2) справедливо только между моментами времени переключения его параметров.

Для согласования работы УС и ОС используется активатор режима (АР), описываемый моделью

$$i(t) = \beta(x(t)). \tag{1.3}$$

Рассмотренная структура ГС представлена на рис. 1.

2. Постановка задачи. Требуется построить гибридный интервальный наблюдатель с минимальной размерностью операционной части, формирующий нижнюю $\underline{z}(t)$ и верхнюю $\overline{z}(t)$ границы известной линейной вектор-функции состояния $x(t)$, заданной матрицей M в виде $z(t) = Mx(t)$, $z(t) \in R^s$, для которых гарантированно выполняется неравенство $\underline{z}(t) \le z(t) \le \overline{z}(t)$ при всех $t \ge 0$, которое следует понимать покомпонентно. Структура такого наблюдателя практически совпадает со структурой ГС с той разницей, что его выходом являются границы $\underline{z}(t)$ и $\overline{z}(t)$ (рис. 2); в обозначение каждого блока добавлена буква «Г», подчеркивающая его принадлежность гибридному наблюдателю. Предполагается, что для решения поставленной задачи доступными в ГС (1.1), (1.2) являются только входы и выходы ОС (1.2).

АРГ формирует выходы для работы УСГ путем преобразования выходных сигналов ГС и вектора состояния ОСГ:

$$i_*(t) = \beta_*(x_*(t), y(t)) \tag{2.1}$$

для некоторой функции β_*, где $x_*(t) \in R^k$ – вектор состояния ОСГ, k – ее размерность. УСГ описывается конечно-автоматной моделью в виде

$$A_* = (I_*, S_*, O_*, \delta_*, \lambda_*) \tag{2.2}$$

с конечными множествами входов I_*, состояний S_*, выходов O_* и функциями переходов и выходов, аналогичными функциям (1.1):

$$s_*(t^+) = \delta_*(s_*(t), i_*(t)), \quad o_*(t) = \lambda_*(s_*(t)), \tag{2.3}$$

где $i_* \in I_*$, $s_* \in S_*$, $o_* \in O_*$. Для согласования работы УС и УСГ должны выполняться следующие соотношения:

$$s_*(t) = \vartheta(s(t)), \tag{2.4}$$

$$o_*(t) = \eta(o(t)), \tag{2.5}$$

$$i_*(t) = \sigma(i(t)) \tag{2.6}$$

для некоторых функций ϑ, η и σ.

Критерием качества решения задачи является ширина интервала $[\underline{z}(t), \overline{z}(t)]$, поскольку она характеризует точность оценивания переменной $z(t)$. Для ее уменьшения строится редуцированная (имеющая меньшую размерность) модель исходной системы (1.2), оценивающая заданную переменную $z(t)$, на основе которой синтезируется ОСГ; эта модель должна быть нечувствительной к возмущению $\rho(t)$.

Требование нечувствительности объясняется следующим. В общем случае (когда допускается чувствительность к возмущению) модель описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{x}_*(t) &= F_* x_*(t) + J_{*o} H x(t) + G_{*o} u(t) + L_* \rho(t), \\ z(t) &= H_z x_*(t) + Q y(t), \end{aligned} \tag{2.7}$$

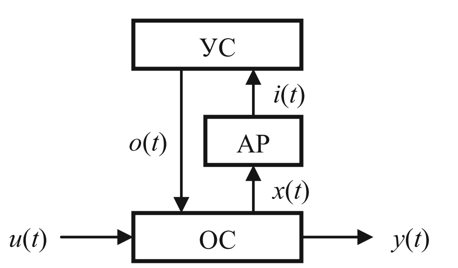


Рис. 1. Структура гибридной системы

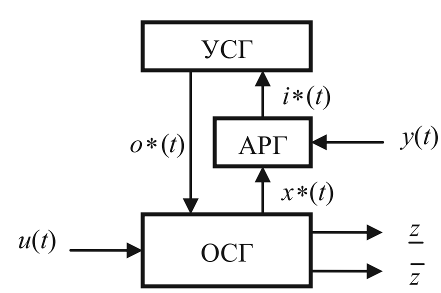


Рис. 2. Структура гибридного интервального наблюдателя

где $x_*(t) \in R^k$, $k < n$ – размерность модели, F_*, J_{*_o}, G_{*_o}, L_*, H_z, Q – матрицы, подлежащие определению. Присутствие слагаемого $L_*\rho(t)$ в (2.7), характеризующего вклад возмущения в модель, приводит к тому, что оно в преобразованном виде войдет в уравнения, описывающие интервальный наблюдатель, увеличивая ширину интервала. В случае $L_* = 0$ наблюдатель будет свободен от возмущения $\rho(t)$, а ширина интервала станет меньше.

З а м е ч а н и е 1. В отличие от строящегося интервального наблюдателя, модель (2.7) – это виртуальный объект. Фактически она представляет собой некоторую часть системы (1.2), описываемую отдельными уравнениями; сама по себе эта часть может быть неустойчивой. То, что модель – часть системы (1.2), объясняет вид слагаемого $J_{*_o}Hx(t)$ в (2.7), в форме $J_{*_o}y(t)$ оно появится в интервальном наблюдателе.

Известно [15], что интервальный наблюдатель может строиться на основе одной из двух канонических форм матрицы F_* – идентификационной и диагональной жордановой с разными собственными числами. Для систем с непрерывным временем более предпочтительной является вторая, поскольку при выборе отрицательных собственных чисел она обладает необходимыми свойствами устойчивости и мецлеровости. Мецлеровость означает, что внедиагональные элементы матрицы неотрицательны [15].

Таким образом, первая подлежащая решению задача при синтезе гибридного интервального наблюдателя может быть сформулирована следующим образом: построить модель (2.7) минимальной размерности, нечувствительную к возмущению $\rho(t)$, на основе чего далее найти описание ОСГ. Во второй задаче требуется найти описание автомата (2.2) при ограничениях, накладываемых соотношениями (2.1), (2.4)–(2.6). Из (2.4) следует, что УСГ может иметь число режимов меньшее, чем УС, т.е. разным режимам УС может соответствовать один режим УСГ.

3. Решение первой задачи для линейных систем. Известно [1], что матрицы, описывающие модель, удовлетворят соотношениям

$$\Phi F_o = F_*\Phi + J_{*_o}H, \qquad G_{*_o} = \Phi G_o, \qquad L_* = \Phi L, \tag{3.1}$$

где постоянная матрица Φ связывает векторы состояния системы и модели: $x_*(t) = \Phi x(t)$. Для получения (3.1) продифференцируем обе части последнего равенства: $\dot{x}_*(t) = \Phi\dot{x}(t)$ и заменим производные $\dot{x}_*(t)$ и $\dot{x}(t)$ правыми частями уравнений (1.2) и (2.7) соответственно:

$$\begin{gathered}\Phi F_o x(t) + \Phi G_o u(t) + \Phi L\rho(t) = \\ = F_*x_*(t) + J_{*_o}Hx(t) + G_{*_o}u(t) + L_*\rho(t).\end{gathered}$$

Произведем преобразования, принимая во внимание $x_*(t) = \Phi x(t)$:

$$\begin{gathered}(\Phi F_o - F_*\Phi - J_{*_o}H)x(t) + (\Phi G_o - G_{*_o})\times \\ \times u(t) + (\Phi L - L_*)\rho(t) = 0.\end{gathered}$$

Нетрудно видеть, что из соотношений (3.1) следует последнее равенство.

Поскольку матрица F_* задается в диагональной жордановой форме

$$F_* = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_k \end{pmatrix}$$

с отрицательными собственными числами $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$, то первое уравнение в (3.1) может быть представлено в виде k независимых уравнений:

$$\Phi_i F_o = \lambda_i \Phi_i + J_{*oi}H, \qquad i = \overline{1,k}. \tag{3.2}$$

Дополнительное требование $L_* = \Phi L = 0$ – нечувствительность к возмущениям – учитывается следующим образом. Введем матрицу L_0 максимального ранга, содержащую все линейно независимые решения уравнения $L_0 L = 0$, тогда $\Phi = NL_0$ для некоторой матрицы N. В результате уравнение (3.2) может быть записано в виде

$$(N_i \quad -J_{*oi})\begin{pmatrix} L_0(F_o - \lambda_i I_n) \\ H \end{pmatrix} = 0, \qquad i = \overline{1,k}. \tag{3.3}$$

Учитывая, что $z(t) = Mx(t) = H_z x_*(t) + Qy(t)$ и $x_*(t) = \Phi x(t)$, получаем равенство

$$Mx(t) = H_z \Phi x(t) + QHx(t),$$

которое справедливо, если матрицы H_z и Q удовлетворяют уравнению

$$M = H_z\Phi + QH = (H_z \quad Q)\begin{pmatrix} \Phi \\ H \end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

Оно имеет решение, когда

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} \Phi \\ H \end{pmatrix} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} \Phi \\ H \\ M \end{pmatrix}, \tag{3.5}$$

т.е. когда матрица $(\Phi^{\mathrm{T}} \;\; H^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$ системы алгебраических уравнений (3.4) и расширенная матрица $(\Phi^{\mathrm{T}} \;\; H^{\mathrm{T}} \;\; M^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$ имеют одинаковые ранги [16, с. 50].

Для решения первой задачи, т.е. построения модели минимальной размерности, ищется нетривиальное решение уравнения (3.3). А именно выбирается минимальное число конкретных значений $\lambda_i < 0$, обеспечивающих устойчивость матрицы F_*, таких, что определяемые из уравнения (3.3) с помощью пакета Matlab строки $\Phi_i = N_i L_0$ формируют матрицу Φ, которая должна удовлетворять условию (3.5); вместе с Φ из этого же уравнения находится матрица J_{*oi}. Далее из алгебраического уравнения (3.4) также с помощью пакета Matlab определяются матрицы H_z и Q, из (3.1) – матрица G_{*o}.

С учетом найденных матриц по аналогии с [1, 8] ОСГ описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}}_*(t) &= F_*\underline{x}_*(t) + J_{*o}y(t) + G_{*o}u(t) - |J_{*o}|E_l v_*, \\ \dot{\overline{x}}_*(t) &= F_*\overline{x}_*(t) + J_{*o}y(t) + G_{*o}u(t) + |J_{*o}|E_l v_*, \\ \underline{z}(t) &= H_z\underline{x}_*(t) + Qy(t), \\ \overline{z}(t) &= H_z\overline{x}_*(t) + Qy(t), \\ \underline{x}_*(0) &= \underline{x}_{*0}, \quad \overline{x}_*(0) = \overline{x}_{*0}, \end{aligned} \tag{3.6}$$

где E_l – $l \times 1$-матрица, составленная из единиц; матрица $|J_{*o}|$ составляется из абсолютных значений соответствующих элементов матрицы J_{*o}. Отметим, что по сравнению с моделью (2.7) ОСГ содержит дополнительный член $|J_{*o}|E_k v_*$, формирующий искомый интервал.

Т е о р е м а 1. Пусть $H_z \geq 0$, $\underline{x}_*(0) \leq x_*(0) \leq \overline{x}_*(0)$ и матрица F_* задана в диагональной жордановой форме, тогда для интервального наблюдателя (3.6) при всех $t \geq 0$ выполняются соотношения

$$\underline{x}_*(t) \leq x_*(t) \leq \overline{x}_*(t), \qquad \underline{z}(t) \leq z(t) \leq \overline{z}(t).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Введем ошибки оценивания:

$$\begin{aligned} \underline{e}_*(t) &= x_*(t) - \underline{x}_*(t), \qquad \overline{e}_*(t) = \overline{x}_*(t) - x_*(t), \\ \underline{e}_z(t) &= z(t) - \underline{z}(t), \qquad \overline{e}_z(t) = \overline{z}(t) - z(t). \end{aligned} \tag{3.7}$$

С учетом (2.7) при $L_* = 0$ и (3.6) можно получить дифференциальные уравнения

$$\begin{aligned} \dot{\underline{e}}_*(t) &= F_*\underline{e}_*(t) + J_{*o}(Hx(t) - y(t)) + |J_{*o}|E_l v_* = \\ &= F_*\underline{e}_*(t) - J_{*o}v(t) + |J_{*o}|E_l v_*, \\ \dot{\overline{e}}_*(t) &= F_*\overline{e}_*(t) + J_{*o}(y(t) - Hx(t)) + |J_{*o}|E_l v_* = \\ &= F_*\overline{e}_*(t) + J_{*o}v(t) + |J_{*o}|E_l v_*. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Из условия $\underline{x}_*(0) \le x_*(0) \le \overline{x}_*(0)$ следует $\underline{e}_*(0) \ge 0$ и $\overline{e}_*(0) \ge 0$. Отметим, что в (3.8) $| J_{*o} | E_l v_* \pm J_{*o} v(t) \ge 0$ при всех $t \ge 0$ и матрица F_* мецлерова; такая система называется монотонной, или неотрицательной [8]. Ее решения при $\underline{e}_*(0) \ge 0$, $\overline{e}_*(0) \ge 0$ будут поэлементно неотрицательными, т.е. $\underline{e}_*(t) \ge 0$, $\overline{e}_*(t) \ge 0$ для всех $t \ge 0$ [8], откуда, согласно (3.7), следует $\underline{x}_*(t) \le x_*(t) \le \overline{x}_*(t)$. Так как $z(t) = H_z x_*(t) + Qy(t)$, то из (2.7) и (3.6) имеем

$$\underline{e}_z(t) = H_z x_*(t) - H_z \underline{x}_*(t) = H_z \underline{e}_*(t),$$
$$\overline{e}_z(t) = H_z \overline{x}_*(t) - H_z x_*(t) = H_z \overline{e}_*(t).$$

Тогда с учетом (3.7), неравенств $\underline{e}_*(t) \ge 0$, $\overline{e}_*(t) \ge 0$ и $H_z \ge 0$ получаем $\underline{e}_z(t) \ge 0,\ \overline{e}_z(t) \ge 0$, что эквивалентно соотношению $\underline{z}(t) \le z(t) \le \overline{z}(t)$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 2. Теорема показывает, что переменные $\underline{z}(t)$ и $\overline{z}(t)$, формируемые интервальным наблюдателем, действительно являются нижней и верхней границами для заданной переменной $z(t)$. Если $H_z \le 0$, то соотношения для $\underline{z}(t)$ и $\overline{z}(t)$ в (3.6) изменяются:

$$\underline{z}(t) = H_z \overline{x}_*(t) + Qy(t),$$
$$\overline{z}(t) = H_z \underline{x}_*(t) + Qy(t).$$

4. Решение первой задачи, учет нелинейностей. Если ОС описывается нелинейными уравнениями, модель (2.7) и ОСГ (3.6) также будут нелинейными. Рассмотрим этот случай детально, предполагая для простоты, что система содержит только один вид нелинейности, что отражается в (1.2) дополнительной нелинейной составляющей:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = F_o x(t) + G_o u(t) + L\rho(t) &+ \\ + C_o \psi(A_o x(t), u(t))&, \\ y(t) = Hx(t) + v(t)&, \end{aligned}$$

где элементы матриц C_o и A_o представляют собой известные функции от параметров $a = (a_1, a_2, \ldots, a_q)$, скалярная функция $\psi(A_o x, u)$ может быть негладкой.

Модель (2.7) также содержит дополнительную нелинейную составляющую:

$$\begin{aligned} \dot{x}_*(t) = F_* x_*(t) + J_{*o} Hx(t) + G_{*o} u(t) &+ \\ + C_{*o} \psi_{*o}(x_*(t), Hx(t), u(t))&, \\ z(t) = H_z x_*(t) + Qy(t)&, \end{aligned} \tag{4.1}$$

где $C_{*o} = \Phi C_o$, $\psi_{*o}(x_*, Hx, u)$ – это функция ψ, в которой аргумент $A_o x$ заменен на $A_{*o}(x_*^{\mathrm{T}}, (Hx)^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$, матрица A_{*o} определяется из уравнения

$$A_o = A_{*o} \begin{pmatrix} \Phi \\ H \end{pmatrix}. \tag{4.2}$$

Отметим, что в ОСГ нелинейная составляющая принимает вид $\psi_{*o}(x_*, y, u)$.

Для учета нелинейной составляющей в ОСГ (3.6) наложим дополнительное ограничение на функцию $\psi_{*o}(x_*, y, u)$: будем полагать, что она монотонна по аргументам x_{*i} для всех $i = \overline{1,k}$ и y_j для всех $j = \overline{1,l}$ независимо от значений других аргументов. Будем рассматривать два типа монотонности, когда при увеличении y_j значение функции $\psi_{*o}(x_*, y_j, u)$ увеличивается или уменьшается; аналогично для x_{*i}.

1. Если $y'_j \ge y_j$ для всех $j = \overline{1,l}$, т.е. $y' \ge y$ покомпонентно, то $\psi_{*o}(x_*, y', u) \ge \psi_{*o}(x_*, y, u)$ при всех x_* и u. В этом случае эта функция входит в первое уравнение ОСГ (3.6) в виде

$$\begin{pmatrix} C_{*o1} \psi_{*o}(\underline{x}_*, \phi_1(\underline{y}, \overline{y}), u) \\ \vdots \\ C_{*ok} \psi_{*o}(\underline{x}_*, \phi_k(\underline{y}, \overline{y}), u) \end{pmatrix}, \tag{4.3}$$

где C_{*oi} – i-й элемент матрицы C_{*o}, $\underline{y} = Hx - E_l v_*$, $\overline{y} = Hx + E_l v_*$,

$$\phi_i(\underline{y},\overline{y}) = 0,5((1+sign(C_{*oi}))\underline{y} + (1-sign(C_{*oi}))\overline{y}), \quad i=\overline{1,k}\,. \tag{4.4}$$

Нетрудно видеть, что для первого типа монотонности из $C_{*oi} > 0$ следует $\phi_i(\underline{y},\overline{y}) = \underline{y}$, из $C_{*oi} < 0$ вытекает $\phi_i(\underline{y},\overline{y}) = \overline{y}$.

2. Если $y' \ge y$ покомпонентно, то $\psi_{*o}(x_*,y',u) \le \psi_{*o}(x_*,y,u)$ при всех x_* и u. В этом случае эта функция входит в первое уравнение ОСГ (3.6):

$$\begin{pmatrix} C_{*o1}\psi_{*o}(\underline{x}_*,\varphi_1(\underline{y},\overline{y}),u) \\ \vdots \\ C_{*ok}\psi_{*o}(\underline{x}_*,\varphi_k(\underline{y},\overline{y}),u) \end{pmatrix}, \tag{4.5}$$

где

$$\varphi_i(\underline{y},\overline{y}) = 0,5((1-sign(C_{*oi}))\underline{y} + (1+sign(C_{*oi}))\overline{y}), \quad i=\overline{1,k}. \tag{4.6}$$

Т е о р е м а 2. Указанный выбор функций (4.3) и (4.5) обеспечивает положительность всех компонент вектора ошибки $\underline{e}_*(t) = x_*(t) - \underline{x}_*(t)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим первый тип монотонности для переменной y, предполагая этот же тип для x_*. В нелинейном случае i-е уравнение для ошибки (3.7) $\dot{\underline{e}}_*(t) = F_*\underline{e}_*(t) - J_{*o}v(t) + |\,J_{*o}\,|\,E_k v_*$ дополняется слагаемым

$$C_{*oi}(\psi_{*o}(x_*,Hx,u) - \psi_{*o}(\underline{x}_*,\phi_1(\underline{y},\overline{y}),u)),$$

которое при $C_{*oi} > 0$ принимает вид $C_{*oi}(\psi_{*o}(x_*,Hx,u) - \psi_{*o}(\underline{x}_*,\underline{y},u))$. Поскольку $\underline{y} = Hx - E_l v_*$ и $v_* \ge 0$, то $Hx \ge \underline{y}$ покомпонентно и из-за монотонности функции $\psi_{*o}(x_*,y,u)$ по x_* и y это слагаемое неотрицательно. Так как при $t=0$ по предположению $x_*(0) \ge \underline{x}_*(0)$, т.е. $\underline{e}_{*i}(0) \ge 0$, а матрица F_* в (3.7) мецлерова, то, согласно [10], по индукции получаем $\underline{e}_{*i}(t) \ge 0$ при всех $t \ge 0$, $i = \overline{1,k}$. Подобным образом показывается, что $\underline{e}_{*i}(t) \ge 0$ при всех $i = \overline{1,k}$ для случая $C_{*oi} < 0$ и второго типа монотонности.

Для аналогичного анализа второго уравнение ОСГ (3.6) функции $\phi_1,...,\phi_k$ в (4.3) заменяются на $\varphi_1,...,\varphi_k$ из (4.6), функции $\varphi_1,...,\varphi_k$ в (4.5) – на $\phi_1,...,\phi_k$ из (4.4). Доказательство того, что $\overline{e}_{*i}(t) \ge 0$ для всех $i = \overline{1,k}$, производится аналогично. Теорема доказана.

Если переменная x_* в $\psi_{*o}(x_*,y,u)$ монотонна по второму типу, то $\underline{x}_*$ в (4.5) и (4.6) заменяется на $\overline{x}_*$. Случай, когда ГС содержит несколько видов нелинейностей, подобен рассмотренному выше и детально изложен в [17].

З а м е ч а н и е 3. Введение нелинейности в устойчивую линейную модель может нарушить эту устойчивость, здесь необходим специальный анализ, который можно найти, в частности, в [18].

Поскольку матрицы J_{*o}, G_{*o}, C_{*o} и A_{*o} в (4.1) общем случае зависят от параметров, значения которых могут меняться, гибридный интервальный наблюдатель должен содержать УСГ, который может иметь число режимов меньшее, чем УС, т.е. разным режимам УС может соответствовать один режим УСГ. Вторая задача посвящена построению минимальной УСГ, для решения которой используется нетрадиционный математический аппарат парной алгебры разбиений, поэтому коротко опишем его.

5. Парная алгебра разбиений. Математический аппарат парной алгебры разбиений, используемой для анализа конечных автоматов, содержит три конструкции, ее элементами являются разбиения на множестве S [19, 20], каждое из которых представляет собой совокупность непересекающихся подмножеств этого множества, называемых блоками, объединение которых дает S. Если два элемента s и s' содержатся в некотором блоке разбиения π_α, это обозначается в виде $s \equiv s'(\pi_\alpha)$.

5.1. О т н о ш е н и е ч а с т и ч н о г о п р е д п о р я д к а. Для двух разбиений π_α и π_β выполняется отношение $\pi_\alpha \le \pi_\beta$, если каждый блок разбиения π_α содержится в некотором блоке разбиения π_β. Существуют два разбиения, обозначаемые символами $\mathbf{0}$ и $\mathbf{1}$ соответственно, такие, что $\mathbf{0} \le \pi_\alpha \le \mathbf{1}$ для произвольного разбиения π_α; $\mathbf{0}$ означает, что каждый элемент множества S содержится в отдельном блоке, $\mathbf{1}$ – все элементы в одном блоке.

5.2. Б и н а р н ы е о п е р а ц и и. Поскольку пара $(S,\le)$ – решетка, то для заданных разбиений π_α и π_β можно ввести бинарные операции $\times$ и $\oplus$, определяемые как наибольшая нижняя и наименьшая верхняя грани этих разбиений.

5.3. Операторы $\mathbf{m}$ и $\mathbf{M}$. Для заданного π разбиение $\mathbf{m}(\pi)$ представляет собой наименьшее разбиение, для которого выполняется соотношение

$$\forall s,s' \in S \quad [s \equiv s'(\pi)] \;\Rightarrow\; [\delta(s,i) \equiv \delta(s',i)(\mathbf{m}(\pi))]$$

при всех $i \in I$, где I – множество входов, δ – функция переходов автомата. Оператор $\mathbf{m}$ вычисляется по правилу

$$\mathbf{m}(\pi) = \prod_{i\in I} \pi_i,$$

где разбиение π_i задается соотношением

$$\forall s,s' \in S \quad [s \equiv s'(\pi)] \;\Rightarrow\; [\delta(s,i) \equiv \delta(s',i)(\pi_i)]\,.$$

Для заданного π разбиение $\mathbf{M}(\pi)$ представляет собой наибольшее разбиение, для которого выполняется соотношение

$$\forall s,s' \in S \quad [s \equiv s'(\mathbf{M}(\pi))] \;\Rightarrow\; [\delta(s,i) \equiv \delta(s',i)(\pi)]$$

при всех $i \in I$. Оператор $\mathbf{M}$ вычисляется по правилу

$$\mathbf{M}(\pi) = \sum_{i\in I} \pi_i,$$

где разбиение π_i задается соотношением

$$\forall s,s' \in S \quad [s \equiv s'(\pi_i)] \;\Rightarrow\; [\delta(s,i) \equiv \delta(s',i)(\pi)].$$

Установим соответствие между разбиениями на S и функциями с множеством определения S по правилу $s \equiv s'(\pi_\alpha) \Leftrightarrow \alpha(s) = \alpha(s')$ для всех $s,s' \in S$, т.е. элементы s и s' находятся в одном блоке разбиения π_α , соответствующего функции α , если их образы для этой функции совпадают.

Основные свойства операций $\times$ и $+$ и оператора $\mathbf{m}$ состоят в следующем [19, 20]:

1) $(\pi + \rho) + \mu = \pi + (\rho + \mu)$, $(\pi \times \rho) \times \mu = \pi \times (\rho \times \mu)$,
2) $\pi \times (\pi + \rho) = \pi$, $\pi + (\pi \times \rho) = \pi$,
3) $\mathbf{m}(\pi + \rho) = \mathbf{m}(\pi) + \mathbf{m}(\rho)$, $\mathbf{M}(\pi \times \rho) = \mathbf{M}(\pi) \times \mathbf{M}(\rho)$,

где π, ρ и μ – произвольные разбиения.

6. Решение второй задачи. Предположение о том, что для решения поставленной задачи доступными в ГС (1.1), (1.2) являются только входы и выходы ОС (1.2), накладывает определенные ограничения на возможность реализации УСГ, рассмотрим их. Из соотношений $i = \beta(x)$, $i_*(t) = \beta_*(x_*(t), y(t))$ и $i_*(t) = \sigma(i(t))$ следует $\beta_*(x_*(t), y(t)) = \sigma(\beta(x(t)))$. Поскольку $x_*(t) = \Phi x(t)$ и $y(t) = Hx(t)$, то $\beta_*(\Phi x, Hx) = \rho(\beta(x))$. Для получения конструктивного результата предположим, что аргументы функций β и β_* представляют собой линейные комбинации компонент вектора x , задаваемые матрицами B и B_* соответственно. Тогда из $\beta_*(\Phi x, Hx) = \sigma(\beta(x))$ следует $B_*\begin{pmatrix}\Phi\\ H\end{pmatrix} = \sigma(B)$. Это уравнение имеет решение, когда

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix}\Phi\\ H\\ B\end{pmatrix} < \operatorname{rank}\begin{pmatrix}\Phi\\ H\end{pmatrix} + \operatorname{rank}(B). \tag{6.1}$$

Если это условие не выполняется, задача синтеза гибридного интервального наблюдателя с построенной ОСГ решения не имеет; при увеличении размерности k оно может быть получено.

Введем на множестве O семейство разбиений π_j: $o \equiv o'(\pi_j)$, если коэффициент a_j имеет одинаковые значения в режимах o и o' , $j = \overline{1,q}$, q – число коэффициентов. Кроме того, введем разбиение π_η на O , определяемое функцией η в (2.5), по правилу $o \equiv o'(\pi_\eta) \Leftrightarrow \eta(o) = \eta(o')$.

Теорема 3. Если модель (4.1) содержит параметры a_{c_1} , a_{c_2} , ..., a_{c_d} , то выполняются неравенства

$$\pi_\eta \le \pi_j, \quad j = \overline{c_1, c_d}. \tag{6.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть (4.1) содержит параметр a_j и режимы o и o' принадлежат некоторому блоку разбиения π_η. Это означает, что значения параметра a_j одинаковы для режимов o и o', т.е. эти режимы находятся в некотором блоке разбиения π_j. Тогда по определению отношения частичного порядка для разбиений отсюда следует, что $\pi_\eta \le \pi_j$. Теорема доказана.

Условие (6.2) можно использовать для построения минимального по числу состояний УСГ следующим образом. Пусть модель (4.1) содержит параметры a_{c_1}, a_{c_2}, ..., a_{c_d}. Поскольку, согласно теореме 3, $\pi_\eta \le \pi_j$, $j = \overline{c_1, c_d}$, то $\pi_\eta \le \pi_{c_1} \times ... \times \pi_{c_d}$. Если $\pi_{c_1} \times ... \times \pi_{c_d} \ne \mathbf{0}$, примем $\pi_\eta = \pi_{c_1} \times ... \times \pi_{c_d}$.

На основе разбиения π_η на O введем разбиение π на S по правилу: $s \equiv s'(\pi) \Leftrightarrow \lambda(s) \equiv \lambda(s')(\pi_\eta)$. Построим семейство разбиений:

$$\pi_\vartheta^i = \pi \times \mathbf{M}(\pi) \times ... \times \mathbf{M}^i(\pi), \qquad i = 0,1,..., \tag{6.3}$$

где $\mathbf{M}^{i+1} = \mathbf{M}(\mathbf{M}^i)$, $\mathbf{M}^0(\pi) = \pi$. Когда при некотором j получается $\pi_\vartheta^j = \pi_\vartheta^{j+1}$, разбиение $\pi_\vartheta = \pi_\vartheta^j$ имеет свойство подстановки [18]; индекс ϑ подчеркивает, что разбиение π_ϑ соответствует функции ϑ в (2.4). Если $\pi_\vartheta \ne \mathbf{0}$, его можно использовать для минимизации автомата A, т.е. уменьшения числа его состояний, обозначая блоки разбиения π_ϑ состояниями s_* нового автомата $A_* = (I_*, S_*, O_*, \delta_*, \lambda_*)$, заменяя в таблице переходов автомата A исходные состояния новыми состояниями и сжимая ее, удаляя повторяющиеся строки.

Таким образом, множество S_* – это множество блоков разбиения π_ϑ, число элементов множества S_* равно числу блоков этого разбиения; множество O_* – множество блоков разбиения π_η, число элементов множества O_* равно числу блоков этого разбиения. Функция δ_* описывается сжатой таблицей переходов автомата A, в которой удалены повторяющиеся строки. Функция λ_* описывается таблицей выходов автомата A, которая также сжимается после замены состояний и выходов исходного автомата состояниями из множества S_* и выходами из множества O_* соответственно: если состояние s_* соответствует некоторому блоку B_{π_θ} разбиения π_θ, то $\lambda_*(s_*) = \eta(\lambda(s))$, $s \in B_{\pi_\theta}$. Можно принять $I_* = I$, хотя в некоторых случаях число входов можно также сократить, объединяя одинаковые столбцы матрицы переходов автомата A_* (если таковые имеются).

Если $\pi_{c_1} \times ... \times \pi_{c_d} = \mathbf{0}$ или $\pi_\vartheta = \mathbf{0}$, минимизация УС невозможна, поскольку по предположению автомат A неприводим; тогда УСГ совпадает с УС.

7. Пример. Рассмотрим систему управления:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= a_1 u_1(t) - a_2\sqrt{x_1(t) - x_2(t)},\\
\dot{x}_2(t) &= a_3 u_2(t) + a_2\sqrt{x_1(t) - x_2(t)} - a_4\sqrt{x_2(t) - x_3(t)},\\
\dot{x}_3(t) &= a_4\sqrt{x_2(t) - x_3(t)} - a_5\sqrt{x_3(t) - a_6} + \rho(t),\\
y_1(t) &= x_2(t) + v_1(t), \quad y_2(t) = x_3(t) + v_2(t).
\end{aligned} \tag{7.1}$$

Уравнения (7.1) описывают так называемую трехтанковую систему, состоящую из трех резервуаров, соединенных между собой трубами. Жидкость поступает в первый и второй танки и выливается из третьего танка. Уровни жидкости в танках обозначены $x_1(t)$, $x_2(t)$ и $x_3(t)$; $a_1 - a_6$ – коэффициенты, значения которых определяются геометрическими размерами системы. Предполагается, что значения коэффициентов a_1, a_2 и a_3 могут меняться в зависимости от логического выхода УС $o(t)$ согласно табл.1, остальные коэффициенты постоянны; УС описывается табл.2, функция активатора режима задана в виде

$$i = \beta(x) = \begin{cases} i_1, & \text{если } x_1 - x_2 \ge 5,\\ i_2, & \text{если } 2 \le x_1 - x_2 \le 5,\\ i_3, & \text{если } x_1 - x_2 \le 2. \end{cases} \tag{7.2}$$

Требуется найти интервальную оценку для неизмеряемой переменной $x_1(t)$.

Поскольку уравнения (7.1) содержат только нелинейные члены, для них $F = 0$ и решение задачи описанным методом невозможно. Для устранения этого недостатка добавим в первое уравнение формальный член $-a_2(x_1 - x_2) + a_2(x_1 - x_2)$, первый элемент которого отнесем

Таблица 1. Зависимость коэффициентов ОС от режима УС

Коэффициент	O			
	o_1	o_2	o_3	o_4
a_1	0	0.5	0.5	2
a_2	0.2	0.9	0.9	0.1
a_3	4	4	2	0.5

Таблица 2. Описание автомата A

$s(t)$	$s(t^+)$			$o(t)$
	$i_1(t)$	$i_2(t)$	$i_2(t)$	
s_1	s_1	s_2	s_3	o_1
s_2	s_1	s_2	s_4	o_2
s_3	s_1	s_3	s_4	o_3
s_4	s_2	s_4	s_4	o_4

к линейной части, второй – к нелинейной. Аналогично во второе уравнение добавим член $a_2(x_1-x_2)-a_4(x_2-x_3)-(a_2(x_1-x_2)-a_4(x_2-x_3))$ в третье – член $(a_4(x_2-x_3)-a_5x_3)-(a_4(x_2-x_3)-a_5x_3)$. В результате получим следующее описание системы:

$$F_o=\begin{pmatrix}-a_2 & a_2 & 0\\ a_2 & -(a_2+a_4) & a_4\\ 0 & a_4 & -(a_4+a_5)\end{pmatrix},\quad G_o=\begin{pmatrix}a_1 & 0\\ 0 & a_3\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad H=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad L=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},$$

$$C_o=\begin{pmatrix}a_2 & 0 & 0\\ -a_2 & a_4 & 0\\ 0 & -a_4 & a_5\end{pmatrix},\quad \Psi(x,u)=\begin{pmatrix}-\sqrt{A_1x}+A_1x\\ -\sqrt{A_2x}+A_2x\\ -\sqrt{A_3x}+A_3x\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}.$$

$$A_1=(1\quad -1\quad 0),\quad A_2=(0\quad 1\quad -1),\quad A_3=(0\quad 0\quad 1).$$

Так как $L_0=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$, то уравнение (3.3) можно записать в виде

$$(N_i\quad -J_{*oi})\begin{pmatrix}-a_2-\lambda_i & a_2 & 0\\ a_2 & -(a_2+a_4)-\lambda_i & a_4\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=0.$$

Примем $\lambda_1=-a_2$ и получим $N_1=(1\quad 0)$, $J_{*o1}=(a_2\quad 0)$, откуда $\Phi=N_1L_0=(1\quad 0\quad 0)$ и $G_{*o}=(a_1\quad 0)$. Так как $M=(1\quad 0\quad 0)$, условие (3.5) с очевидностью выполняется, из (3.4) следует $H_z=1$, $Q=0$. Поскольку активатор режима (7.2) имеет линейную основу с матрицей B, нетрудно проверить, что условие (6.1) выполняется.

Линейная модель, нечувствительная к возмущению, при $x_*=\Phi x=x_1$ принимает вид

$$\dot{x}_*(t) = a_1 u_1(t) - a_2(x_*(t) - H_1 x(t)),$$
$$z(t) = x_*(t).$$

Решение уравнения (4.2) – это матрица $A_* = (1 \quad -1 \quad 0)$; $C_{*_o} = \Phi C_o = a_2$. Нелинейная составляющая описывается выражением

$$\psi_{*_o}(x_*, y) = a_2(x_*(t) - H_1 x(t)) - a_2\sqrt{x_*(t) - H_1 x(t)}.$$

В результате получаем итоговую нелинейную модель:

$$\begin{aligned} \dot{x}_*(t) &= a_1 u_1(t) - a_2\sqrt{x_*(t) - H_1 x(t)}, \\ z(t) &= x_*(t). \end{aligned} \tag{7.3}$$

Из (7.3) следует, что переменные $x_*(t)$ и $H_1 x(t)$ влияют на нелинейную составляющую монотонно, а исходя из типа этой монотонности и результатов разд. 4 получаем описание ОСГ:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}}_*(t) &= a_1 u_1(t) - a_2\sqrt{\underline{x}_*(t) - (y_1(t) - v_{*1})}, \\ \dot{\overline{x}}_*(t) &= a_1 u_1(t) - a_2\sqrt{\overline{x}_*(t) - (y_1(t) + v_{*1})}, \\ \underline{z}(t) &= \underline{x}_*(t), \quad \overline{z}(t) = \overline{x}_*(t). \end{aligned} \tag{7.4}$$

Из табл. 2 следует, что $\pi_1 = \pi_2 = \{(o_1),(o_2,o_3),(o_4)\}$, $\pi_3 = \{(o_1,o_2),(o_3),(o_4)\}$. Поскольку в описание (7.3) входят параметры a_1 и a_2, то $\pi_\eta = \pi_1 \times \pi_2 = \{(o_1),(o_2,o_3),(o_4)\}$ и $\pi = \{(s_1),(s_2,s_3),(s_4)\}$. На основе табл. 1 получаем $\mathbf{M}(\pi) = \{(s_1),(s_2,s_3),(s_4)\}$, а тогда по формуле (6.3) $\pi_\vartheta = \{(s_1),(s_2,s_3),(s_4)\}$. Обозначая блоки разбиений π_η и π_ϑ символами o_{*1}, o_{*2}, o_{*3} и s_{*1}, s_{*2}, s_{*3} соответственно, построим на основе табл.1 и 2 автомат A_* (табл. 3) и зависимость коэффициентов ОСГ (7.4) от режима УСГ (табл. 4). Поскольку входы УС и УСГ совпадают, ρ представляет собой тождественную функцию; тогда из уравнения $B_* \begin{pmatrix} \Phi \\ H \end{pmatrix} = B$ следует, что $B_* = B$. В результате АРГ принимает вид

$$i = \beta_*(x_*, y) = \begin{cases} i_1, & \text{если } x_* - y_1 \ge 5, \\ i_2, & \text{если } 2 \le x_* - y_1 \le 5, \\ i_3, & \text{если } x_* - y_1 \le 2. \end{cases}$$

При моделировании с начальными условиями $x(0) = (5 \;\; 4 \;\; 1)^{\mathrm{T}}$, $\underline{x}_*(0) = 1$ и $\overline{x}_*(0) = 10$ примем $u_1(t) = 0.2(1 + \sin(t))$, $u_2(t) = 0.4(1 + \sin(3t))$. Результаты моделирования представлены на

Таблица 3. Описание автомата A_*

$s_*(t)$	$s_*(t^+)$			$o_*(t)$
	$i_1(t)$	$i_2(t)$	$i_2(t)$	
s_{*1}	s_{*1}	s_{*2}	s_{*2}	o_{*1}
s_{*2}	s_{*1}	s_{*2}	s_{*3}	o_{*2}
s_{*3}	s_{*2}	s_{*3}	s_{*3}	o_{*3}

Таблица 4. Зависимость коэффициентов ОСГ от режима УСГ

Коэффициент	O_*		
	o_{*1}	o_{*2}	o_{*3}
a_1	0	0.1	2
a_2	0.2	0.2	0.1

рис. 3 и 4. На рис. 3 переключения сохраняются на всем интервале моделирования, на рис. 4 они отключаются при $t > 80$, что дает возможность увидеть влияние переключений на процесс интервального оценивания. Нижняя линия на рис. 2 и 3 представляет поведение автомата A, где состояниям $s_1 - s_4$ соответствуют числа $1 - 4$.

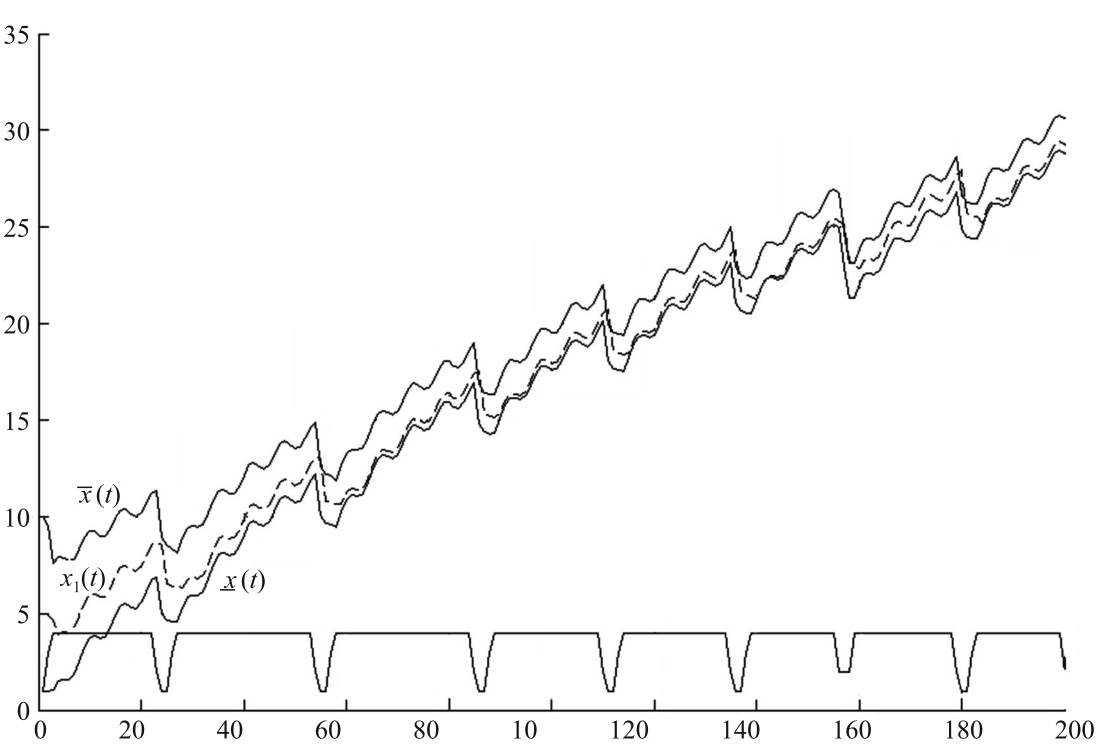


Рис. 3. Поведение интервальной оценки при наличии переключений

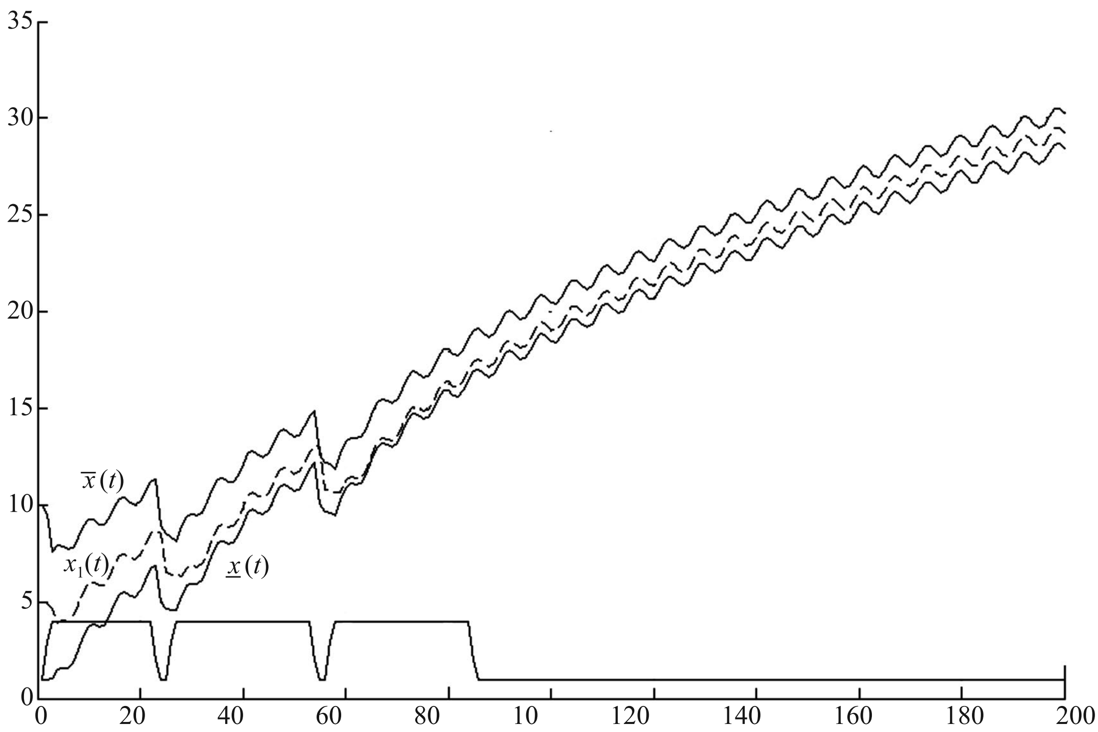


Рис. 4. Поведение интервальной оценки при прерывании переключений

Заключение. Работа посвящена проблеме интервального оценивания в гибридных системах. Полученное решение проблемы предполагает на первом этапе построение интервального наблюдателя для заданной линейной функции вектора состояния исходной системы, на втором – построение конечного автомата, управляющего работой интервального наблюдателя. Для решения используются парная алгебра разбиений и линейная алгебра – для управляющей и операционной подсистем соответственно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Жирабок А.Н., Зуев А.В., Ким Чхун Ир* Метод построения интервальных наблюдателей для стационарных линейных систем // Изв. РАН. ТиСУ. 2022. № 4. С. 22–32.
2. *Cocquempot V., Mezyani T., Staroswiecki M.* Fault Detection and Isolation for Hybrid Systems Using Structured Parity Residuals // Proc. 5th Asian Control Conf. Tokyo, 2004. P. 1204–1212.
3. *Gruyitch L.* Nonlinear Hybrid Control Systems // Nonlinear Anal. Hybrid Syst. 2007. V. 1. P. 139–140.
4. *Leth J., Wisniewski R.* Local Analysis of Hybrid Systems on Polyhedral Sets with State-dependent Switching // Int. J. Appl. Math. Comput. Sci. 2014. V. 24. P. 341–355.
5. *Yang H., Jiang B., Cocquempot V.* Fault Tolerant Control Design for Hybrid Systems, Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 2010.
6. *Shumsky A., Zhirabok A., Jiang B., Yang H.* Transformation of Hybrid Systems: Application to Reduced Order Observer Design // IASTED Int. Conf. Control and Applications. Crete, 2012. P. 98–103.
7. *Shumsky A., Zhirabok A.* Redundancy Relations for Fault Diagnosis in Hybrid Systems // IFAC Symposium SAFEPROCESS'2012. Mexico, 2012. P. 1226–1231.
8. *Ефимов Д.В., Раисси Т.* Построение интервальных наблюдателей для динамических систем с неопределенностями // АиТ. 2016. № 2. С. 5–49.
9. *Khan A., Xie W, Zhang L., Liu L.* Design and Applications of Interval Observers for Uncertain Dynamical Systems // IET Circuits Devices Syst. 2020. V. 14. P. 721–740.
10. *Chebotarev S., Efimov D., Raissi T., Zolghadri A.* Interval Observers for Continuous-time LPV Systems with L1/L2 Performance // Automatica. 2015. V. 51. P. 82–89.
11. *Efimov D., Raissi T., Chebotarev S., Zolghadri A.* Interval State Observer for Nonlinear Time Varying Systems // Automatica. 2013. V. 49. P. 200–206.
12. *Dinh T., Marouani G., Raïssi T., Wang Z., Messaoud H.* Optimal Interval Observers for Discrete-time Linear Switched Systems // Intern. J. Control. 2019. № 2. DOI: 10.1080/00207179.2019.1575518.
13. *Zammali C., Van Gorp J., Wang Z., Raïssi T.* Sensor Fault Detection for Switched Systems Using Interval Observer with L_∞ Performance // European J. Control. 2020. No. 4. DOI: https://doi.org/10.1016/j.ejcon.2020.06.004.
14. *Marouani G., Dinh T., Raïssi T., Wang X., Messaoud H.* Unknown Input Interval Observers for Discrete-time Linear Switched Systems // European J. Control. 2020. No. 4. DOI: https://doi.org/10.1016/j.ejcon.2020.09.004
15. *Жирабок А.Н., Зуев А.В., Филаретов В.Ф., Шумский А.Е., Ким Ч.И.* Каноническая форма Жордана в задачах диагностирования и оценивания // АиТ. 2022. № 9. С. 36–54.
16. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике. М. Наука, 1968.
17. *Жирабок А.Н., Зуев А.В., Филаретов В.Ф., Шумский А.Е.* Идентификация дефектов в нелинейных системах на основе скользящих наблюдателей с ослабленными условиями существования // Изв. РАН. ТиСУ. 2022. № 3. С. 21–30.
18. *Жирабок А.Н., Ким Чхун Ир* Виртуальные датчики в задаче функционального диагностирования нелинейных систем // Изв. РАН. ТиСУ. 2022. № 1. С. 67–75.
19. *Hartmanis J., Stearns R.* The Algebraic Structure Theory of Sequential Machines. N.Y.: Prentice-Hall, 1966.
20. *Жирабок А.Н., Шумский А.Е.* Соотношения избыточности для диагностирования гибридных систем // Изв. РАН. ТиСУ. 2018. № 4. С.122–138.

ИЗВЕСТИЯ РАН. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2024, № 2, С. 143–153

СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

УДК 004.042

УПРАВЛЕНИЕ БУФЕРИЗАЦИЕЙ ВИДЕОИНФОРМАЦИИ, ДЕКОДИРОВАННОЙ ИЗ ЦИКЛИЧЕСКИХ СТРУКТУР

© 2024 г. М. Ю. Звездочкин[a], В. В. Миронов[b, *]

[a]Филиал акционерного общества «Ракетно-космический центр «Прогресс» — особое конструкторское бюро «Спектр», Рязань, Россия

[b]Рязанский государственный радиотехнический университет имени В.Ф. Уткина, Рязань, Россия

**e-mail: mironov1vv@mail.ru*

Поступила в редакцию 18.04.2023 г.
После доработки 08.01.2024 г.
Принята к публикации 29.01.2024 г.

Поставлена задача соблюдения временных междукадровых интервалов при извлечении видеокадров из входного потока, сгруппированного в циклические квазителеметрические структуры. Рассмотрена организация программного буфера либо совокупности буферов видеокадров как общий подход к решению указанной задачи. Описано несколько способов организации таких буферов и управления их работой в системе обработки и передачи видеоинформации. Проведена экспериментальная проверка описанных способов, предложены рекомендации по применению.

Ключевые слова: бортовая система видеоконтроля, обработка видеоинформации, потоковое видео.

DOI: 10.31857/S0002338824020124, **EDN:** VODEYE

CONTROL OF VIDEO BUFFERING FOR VIDEOSTREAMS DECODED FROM CYCLIC STRUCTURES

M. Y. Zvyozdochkin[a], V. V. Mironov[b, *]

[a]Joint Stock company Space Rocket Centre Progress - SDB «Spectr»

[b]Ryazan State Radio Engineering University named after V.F. Utkin

**e-mail: mironov1vv@mail.ru*

Article formulates a problem of compliance of time inter-frame delays via video frames decoding from input cyclic-structured video stream. Implementation of software buffer or buffers set is reviewed as a general approach to solving this problem. Some methods of implementation of such buffers for video processing and transmission systems are proposed. Experimental research of these methods is conducted; recommendations for use are offered.

Keywords: onboard video monitoring system, video processing, video streaming.

Введение. Среди всего многообразия систем видеоконтроля и видеонаблюдения особняком находятся системы, передающие видеоинформацию (ВИ) поверх циклических информационных структур. В роли циклических структур могут выступать, в частности, структуры, используемые в телеметрии. Применение телеметрических структур для ВИ характерно для космической отрасли при совместной передаче телеметрической информации и ВИ [1–3].

Циклы входной ВИ и видеокадры асинхронны. Один цикл может содержать один или несколько видеокадров, при этом видеокадр может быть «разорван» между соседними циклами. И циклы, и кадры имеют свои собственные маркеры (синхрогруппы).

Для подобных систем также характерны следующие особенности:

один информационный поток содержит комбинированный видеопоток от нескольких камер, каждый кадр включает в себя идентификатор видеокамеры;

частота кадров по отдельно взятой камере является переменной;

частота циклов объединенного информационного потока фиксирована;

каждый кадр имеет индивидуальную метку времени.

Переменная частота кадров долгое время являлась достаточно редким решением для потокового видео, публикации на данную тему редки и носят разрозненный характер [4]. Лишь в последнее время переменная частота стала получать популярность с распространением кодека H.265. Из форматов медиафайлов переменная частота кадров поддерживается форматом MKV (Matroska).

Для рассматриваемого класса систем на конкретном временном участке (в космических запусках — участок циклограммы полета) переменная частота кадров находится в окрестности некоторого среднего значения. При переходе к следующему участку это среднее значение существенно меняется.

1. Постановка задачи. В системе обработки и передачи (СОП) ВИ, принятая в циклических структурах, должна быть преобразована в общепринятые видеоформаты и отправлена конечным потребителям, а также зарегистрирована в видеофайлы общепринятых форматов. Отправка конечным потребителям может осуществляться, например, по протоколам RTSP/RTP (real-time streaming protocol / real-time transport protocol) либо как поток пакетов протокола UDP (user datagram protocol). Зарегистрированная ВИ в дальнейшем может подвергаться дополнительной обработке [5].

При отправке конечным потребителям междукадровые интервалы каждого потока должны соответствовать исходным интервалам, сформированным видеокамерой. В противном случае потребитель будет наблюдать артефакты в виде неравномерного по времени, «дерганого» видеоряда.

Для формирования достоверных междукадровых интервалов видеокадры, декодированные из комбинированного сигнала, должны помещаться в программный буфер (буферы) и извлекаться из него непосредственно перед отправкой ВИ потребителям. Буферизация видеопотока широко применяется в передаче потоковой ВИ [6, 7]. При этом могут варьироваться такие параметры, как количество буферов (один буфер на все кадры либо отдельные буферы по каждой камере), размер каждого буфера (в видеокадрах), время жизни (lifetime) буфера (буфер может быть как циклическим, так и формироваться на заранее заданное время), метод определения времени извлечения кадров из буфера.

В статье будет рассмотрено несколько методов управления программным буфером видеокадров, их достоинства, недостатки, проведена экспериментальная проверка перечисленных методов и сформулированы рекомендации по их применению.

2. Циклический кадровый буфер. Простейшим способом буферизации является организация единого буфера выделенных кадров. Буфер представляет собой N кадровых массивов $Fr_1,\ldots,Fr_N$, в каждом из которых размещается один кадр ВИ в сжатом либо несжатом виде.

Буфер заполняется по мере получения циклов ВИ в СОП. Кадры изымаются из буфера и отправляются на обработку по таймеру, с задержкой, вычисленной на основании временных меток текущего и предыдущего кадра:

$$\Delta t = t_{cur} - t_{prev}. \tag{2.1}$$

Буфер является кольцевым: по достижении конца буфера следующие кадры записываются в массивы с наименьшими номерами. Таким образом, следующий за Fr_N кадр будет записан в массив Fr_1 (рис. 1). Здесь Fr_{Last} — последний по времени записанный кадр, Fr_{Cur} — последний считанный, Fr_{Prev} — предыдущий считанный.

Достоинство простейшего буфера — универсальность: его можно применять не только для циклических структур, но и для любого видеопотока с переменной частотой кадров. Недостатком этого способа является его чрезвычайная уязвимость к искажениям временных ме-

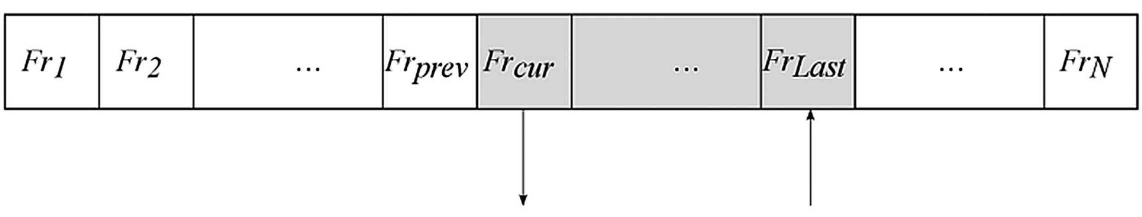


Рис. 1. Простейший циклический буфер

ток. Искажение одной временной метки может привести к длительному перерыву или вообще прекращению передачи.

Второй, не столь фатальный, но во многих случаях также неприемлемый недостаток — накопление погрешности расчета временных задержек. Поскольку интервал между кадрами вычисляется с конечной точностью, результатом накопления может быть либо запаздывание обработки вплоть до переполнения буфера и потери кадров, либо опустошение буфера, равнозначное отключению буферизации как таковой.

Разновидностью этого способа является организация раздельных буферов по каждой видеокамере. По мере вычленения кадров из цикла определяется, к какой камере относится кадр, после чего кадр помещается в соответствующий буфер (рис. 2).

Задержка в этом случае вычисляется для каждого буфера отдельно, относительно предыдущего кадра по этой же камере.

Организация раздельных буферов снижает риск прекращения передачи из-за единичной ошибки временной метки и упрощает расчет задержек, поскольку этот метод обеспечивает положительность временных интервалов между соседними кадрами:

$$\Delta t > 0. \tag{2.2}$$

Однако при этом отмеченное выше накопление погрешности расчета временных задержек приводит к визуально заметной рассинхронизации ВИ с разных камер. В частности, на практике, если заполненность буфера приближается к 100%, то в течение минуты «разбежка» по времени между двумя одновременно отображаемыми камерами из трех может достигать 3–5 с, что неприемлемо.

Отмеченный выше недостаток варианта с одним буфером (влияние существенного искажения одной временной метки) смягчается, но не устраняется полностью: длительный перерыв

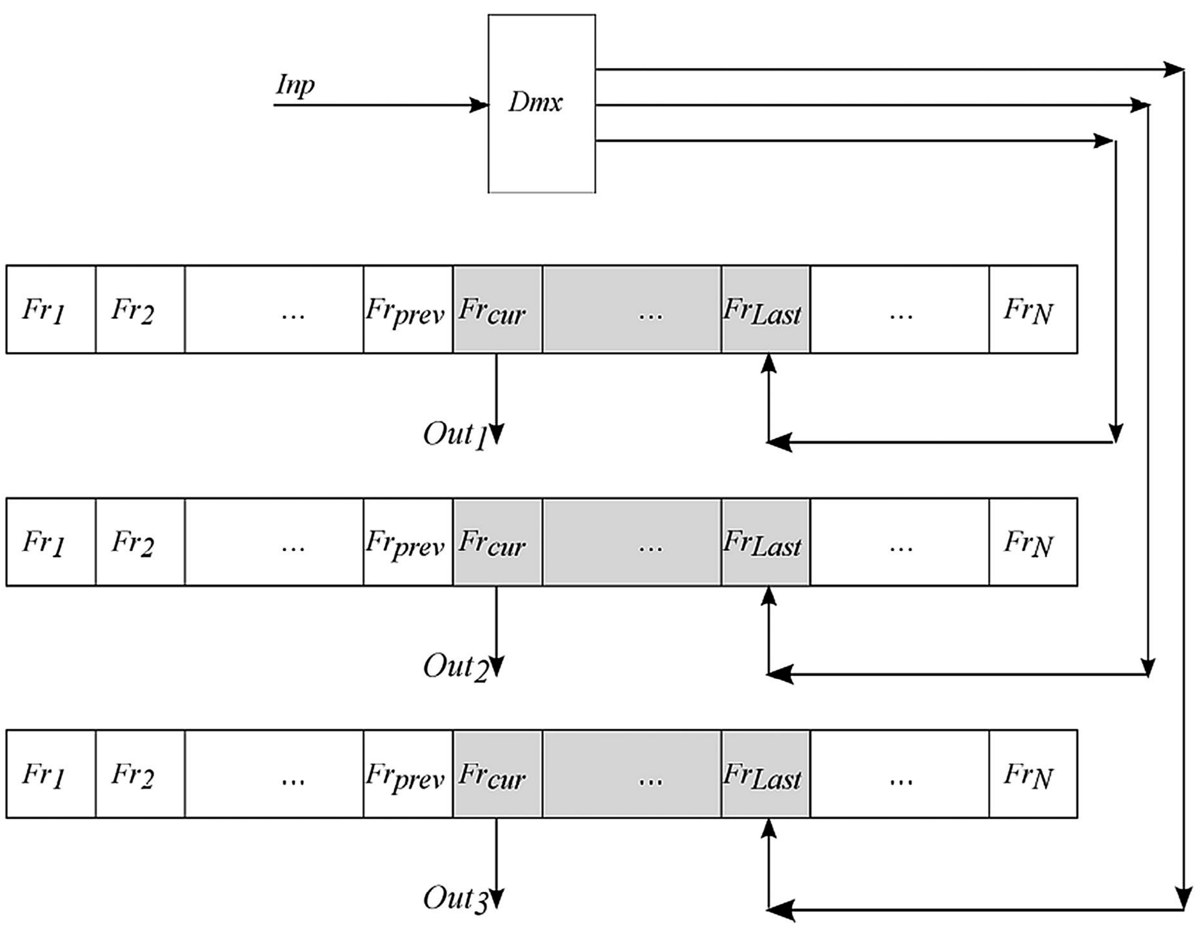


Рис. 2. Раздельные циклические буферы

(прекращение) передачи может произойти не по всем камерам, а только по одной. Практика показала, что это также неприемлемо.

3. Привязка к времени начала приема. Один из методов борьбы с основной проблемой простейшего кадрового буфера — накоплением погрешности расчета временных задержек — состоит в принципиальном изменении метода вычисления задержки.

В начале приема ВИ фиксируется текущее системное время СОП T_s и сопоставляется с временем метки первого полученного кадра T_v:

$$\Delta T_{ses} = T_s - T_v. \tag{3.1}$$

После выделения очередного кадра также фиксируется текущее значение системного времени $\mathcal{D} = \mathcal{D}_z\left(x, y\right)$. После этого задержка для показа этого кадра определяется как

$$\Delta t = t_{cur} + \Delta T_{ses} - t_s. \tag{3.2}$$

Таким образом, время показа следующего кадра не зависит от времени показа предыдущего, а определяется исключительно системным временем.

Данный метод решает проблему программного расчета временных интервалов, т.е. исключаются предпосылки к накоплению погрешности расчета временных задержек. Однако остается проблема неточности программного таймера. Кроме этого, метод предполагает, что расхождение приращения времени на передающей стороне (устанавливающей временные метки) и на обрабатывающей стороне (СОП) невелико. Как правило, при исправных технических средствах это условие соблюдается. Оно может быть нарушено при воспроизведении ВИ различного рода программными имитаторами. Поэтому применение этого метода требует, чтобы программный имитатор применял таймер высокой точности (см. ниже).

4. Применение ОС реального времени. Дальнейшее повышение точности буферизации возможно с помощью операционных систем реального времени (ОСРВ). Особенностью ОСРВ является гарантированное время отклика при обработке событий.

Этот метод способен дать наилучшие результаты по достижению заявленных временных характеристик. Однако для этого необходимо использовать инструментарий и библиотеки, специфичные для выбранной ОСРВ. Отсюда вытекают два недостатка данного подхода:

высокая трудоемкость разработки;

плохая переносимость кода — созданное программное обеспечение (ПО) невозможно с минимальными усилиями перенести с одной ОСРВ на другую, трудоемкость переноса приближается к разработке с нуля.

5. Использование таймера высокой точности. Компромиссным методом (по сравнению с предыдущим) является применение таймера высокой точности, присутствующего на всех современных вычислительных средствах. Однако несмотря на компромиссность данного решения, недостатки его те же, что и в предыдущем случае — высокая трудоемкость разработки (хотя и в меньшей степени) и плохая переносимость кода. Дело в том, что прикладной программный интерфейс (API, application programming interface) для вызова таймера высокой точности индивидуален для каждой ОС.

6. Внесение поправок в вычисление временных интервалов. Все рассмотренные выше методы предполагали детерминированное определение задержек на базе поступающей ВИ. Теперь рассмотрим адаптивный алгоритм, предусматривающий явное управление и основанный на внесении отрицательной обратной связи в работу буфера (буферов).

Для каждого буфера в каждый момент времени известна заполненность, т.е. отношение количества помещенных и неизвлеченных кадров к емкости буфера:

$$R_b = \frac{N_{Last} - N_{Cur} + 1}{N}. \tag{6.1}$$

Здесь N_{Last} — номер последнего занесенного в буфер кадра, N_{Cur} — номер наиболее старого кадра (извлекаемого в первую очередь), N — максимальное количество кадров в буфере.

Если $N_{Cur} > N_{Last}$, т.е. заполненная часть кольцевого буфера преодолела его границу, (6.1) видоизменяется следующим образом:

$$R_b = \frac{N_{Last} + \left(N - N_{Cur} + 1\right)}{N}. \tag{6.2}$$

Суть алгоритма состоит в коррекции временной задержки таймера относительно вычисленного предыдущими методами значения в зависимости от заполненности буфера.

Для буфера определяются четыре пороговых значения:

R_{aon} — если R_b превышает это значение, вычисленная временная задержка уменьшается (включается ускорение выборки);

R_{aoff} — если R_b опускается ниже этого значения, ускорение выборки перестает применяться;

R_{don} — если R_b опускается ниже этого значения, вычисленная временная задержка увеличивается (включается замедление выборки);

R_{doff} — если R_b превышает это значение, замедление выборки перестает использоваться.

Перечисленные пороговые значения должны подчиняться условию

$$0 < R_{don} < R_{doff} < R_{aoff} < R_{aon} < 1. \tag{6.3}$$

Исходя из этих пороговых значений, буфер может находиться в трех состояниях.

Состояние нормальной передачи Sn. Задержка, устанавливаемая для таймера, равна вычисленной. При этом контролируется соблюдение двух условий:

$$R_b < R_{aon}, \tag{6.4}$$

$$R_b > R_{don}. \tag{6.5}$$

При нарушении условия (6.4) буфер переводится в состояние ускорения выборки. При нарушении условия (6.5) — в состояние замедления выборки.

Состояние ускорения выборки Sa. Задержка уменьшается умножением на коэффициент K_a. В этом режиме условия (6.4) и (6.5) не контролируются. Контролируется условие

$$R_b > R_{aoff}. \tag{6.6}$$

Если R_b уменьшилось настолько, что (5.6) перестало выполняться, буфер переводится в состояние нормальной передачи.

Состояние замедления выборки Sd. Это есть начальный режим работы буфера (буфер пуст). Задержка уменьшается умножением на коэффициент K_d В этом режиме условия (6.4)–(6.6) не контролируются. Контролируется условие

$$R_b < R_{doff}. \tag{6.7}$$

Если R_b увеличилось настолько, что (6.7) перестало выполняться, буфер переводится в состояние нормальной передачи. Пороговые значения R_{aon}, R_{aoff}, R_{don} и R_{doff}, а также коэффициенты K_a и K_d устанавливаются до начала сеанса обработки. Состояния буфера и переходы между ними можно выразить в виде графа (рис. 3).

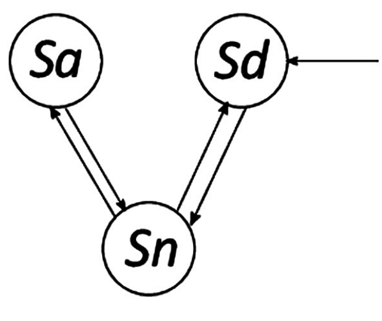


Рис. 3. Состояния буфера и переходы между ними

Более продвинутый вариант этого метода можно получить, если вместо введения коэффициентов K_a и K_d плавно варьировать изменение задержки в диапазонах $0 < R_b < R_{don}$ и $R_{aon} < R_b < 1$.

Описанный в этом пункте метод хорошо справляется с погрешностями таймера низкой точности; для исправления грубых ошибок его целесообразно дополнять другими методами. Метод работает при допущении, что усредненная частота кадров на входе соответствует реальному масштабу времени. Для правильного расчета поправок буфер должен быть единым для всех видеопотоков.

7. Привязка к циклам входной информации. При работе с принимаемой извне информацией (не воспроизводимой!) можно опереться на то, что поступление телеметрических циклов на вход наземного оборудования происходит с периодичностью, соответствующей времени записи. Это позволяет создавать буфер сокращенного размера и буферизовать только кадры в пределах одного цикла или совокупности циклов (например, если известно, что в 1с приходит четыре цикла, можно помещать в буфер все кадры в пределах 1с).

Рассмотрим реализацию такого подхода. В памяти организуется два буфера, приемный и передающий (рис. 4). Размер каждого буфера M на единицу больше, чем максимальное количество целых кадров, которые могут быть переданы в цикле. В отличие от рассмотренного ранее, эти буферы не являются кольцевыми, и все кадры из них должны быть извлечены за время, не превышающее длительности двух циклов.

По приходу информационного цикла из него извлекаются кадры, в том числе (при наличии) остаток кадра, начало которого содержалось в предыдущем цикле. Кадры помещаются в приемный буфер, для каждого из них вычисляется задержка относительно начала цикла. Общая задержка для каждого кадра определяется как

$$\Delta t = t_{cur} - t_{cycle} + \Delta t_b. \tag{7.1}$$

Здесь t_{cycle} — время, соответствующее началу цикла, Δt_b — задержка, необходимая для отображения последнего неоконченного кадра из предыдущего цикла. Время начала цикла может определяется либо по внешнему счетчику (при его наличии), либо как наименьшее из времен, выделенных из цикла кадров.

Если не вводить задержку Δt_b, возможна неравномерность выдачи изображения («подергивания») на границах циклов. Значение Δt_b должно удовлетворять условию

$$\Delta t_b \geq \frac{1}{f_{\min}}. \tag{7.2}$$

Здесь $f_{\min}$ — наименьшее значение общей частоты кадров от всех источников. Это гарантирует, что при отсутствии ошибок во временных метках задержки между переданными кадрами будут соответствовать задержкам исходного видеопотока (первым передается кадр, который не был завершен в предыдущем цикле). При оценке Δt_b также следует учитывать, что принятый цикл в ряде систем должен быть подвергнут декодированию с применением помехоустой-

Рис. 4. Буфер с привязкой к циклам входной информации

чивого кода Рида-Соломона [8, 9], что влечет за собой значительные траты процессорного времени.

Ошибки во временных метках должны обрабатываться отдельно. Если время одного из кадров не удается прочитать, либо оно лежит за пределами цикла, кадру принудительно присваивается то же время, что и предыдущему, и он отправляется потребителям одновременно с предыдущим. Альтернативное решение для кадров с некорректным временем состоит в том, чтобы такие кадры браковать полностью и не отправлять в выходном видеопотоке. Однако для кадров, время которых лежит за пределами цикла, это решение не подходит.

Каждый из кадров, помещенных в буфер, отсылается потребителю по отдельному таймеру, отрабатывающему индивидуальную задержку. Заметим, что, поскольку кадры передаются с задержкой, часть кадров текущего цикла будет передаваться уже во время обработки следующего. Следовательно, в программной реализации метода должны быть созданы два множества (комплекта) таймеров, инициируемых по очереди.

Кроме того, в момент начала обработки следующего цикла приемному буферу присваивается статус передающего, на роль приемного назначается второй буфер. Если во втором буфере к моменту смены ролей оставались кадры (например, за счет искаженных временных задержек), они либо удаляются, либо незамедлительно передаются. Второй подход предпочтительнее, если отклонение временной метки незначительно.

Описанная простейшая реализация предполагает, что время разбиения принятого цикла на кадры пренебрежимо мало по сравнению с длительностью цикла, а следовательно, все временные задержки могут быть корректно посчитаны в начале обработки цикла. Если это условие не выполняется, для сохранения достоверных временных задержек между кадрами при установке интервалов таймеров следует придерживаться одного из следующих подходов:

либо запускать таймеры только по окончании выделения всех кадров из цикла;

либо при запуске каждого таймера вносить в значение задержки поправку, равную времени, прошедшему с начала обработки цикла (для каждого кадра это время индивидуально).

Первый подход проще в реализации, но означает внесение дополнительной общей временной задержки по отношению к указанной выше. Второй подход сложнее, но для используемых в настоящее время вычислительных средств более надежен. Важнейшим преимуществом метода привязки к циклам входной информации является гарантированная синхронизация выходных видеопотоков с входным информационным потоком. Расхождение по времени выходных потоков с входным, а также выходных потоков между собой *не накапливается*. Явных недостатков метод не имеет, но существуют ограничения по применимости:

метод применим только для работы воспроизведения необработанного циклического потока (не для извлеченных из него видеопотоков);

метод неприменим, если для передачи конечным потребителям требуется обеспечение задержки меньшей, чем длительность цикла.

Следует заметить, что эффективность буферизации по циклам зависит от среднего количества кадров в цикле. Если в цикле передается 1 кадр, метод вырождается и эквивалентен отсутствию буферизации вообще. При 4–6 кадрах в цикле (в среднем) метод обеспечивает высокую плавность отображения ВИ.

8. Экспериментальная проверка. С учетом проблем, обозначенных выше, для оценки методов буферизации введем следующие временные характеристики (все интервалы измеряются в миллисекундах, если не оговорено противное).

Расхождение между теоретическим и практическим интервалом следования циклов — ΔT_{cyc}. Характеризует достоверность главного временного интервала, на котором основано применение методов. В частности, если фактический интервал окажется существенно выше заявленного, то для метода привязки к циклам на стыке циклов воспроизведение потеряет плавность, будет «рваным». А для метода циклических буферов перерывы между кадрами будут возникать по мере опустошения буферов.

Для i-го цикла ΔT_{cyc} определяется как

$$\Delta T_{cyc} = \left(T_{ct,i} - T_{ct,i-1}\right) - \left(T_{cr,i} - T_{cr,i-1}\right). \tag{8.1}$$

Здесь T_{ct} и T_{cr} — время цикла по временной метке и время поступления цикла на вход СОП соответственно.

Модуль разности между интервалом двух соседних кадров от одной камеры, вычисленным по их временным меткам, и интервалом отсылки этих кадров потребителю — ΔT_1. Характеризует плавность воспроизведения видеопотока. Для i-го кадра определяется как

$$\Delta T_1 = \left|\left(T_{s,i} - T_{s,i-1}\right) - \left(T_{f,i} - T_{f,i-1}\right)\right|. \tag{8.2}$$

Здесь $T_{s,i}$ и $T_{s,i-1}$ — время отсылки текущего и предыдущего кадров, $T_{f,i}$ и $T_{f,i-1}$ — их временные метки.

Расхождение между временем декодирования очередного кадра и временем его отсылки потребителям – ΔT_{send}. Характеризует задержку обработки видеопотока в системе в целом и ее вероятное накопление. Данный параметр следует контролировать как в статике (усредненный по кадрам), так и в динамике (в течение процесса регистрации), с целью выявить возможное накопление указанного расхождения:

$$\Delta T_{send} = T_s - T_d. \tag{8.3}$$

Здесь T_d – время декодирования кадра, T_s – время его отсылки потребителям.

Разность интервала между временными метками двух соседних кадров по разным камерам, вычисленных по временным меткам, и интервала отсылки этих кадров потребителю – ΔT_{pair}. Характеризует временное расхождение видеоряда от разных камер, что актуально при организации независимых буферов по каждой камере. Неоднозначность представляет определение, какой кадр от другой камеры считать «соседним», учитывая, что кадры передаются асинхронно и с переменной частотой. Мы для каждого кадра от камеры C2 находили кадр с наибольшим временем от камеры C1, время которого $T_{f,c1}$ меньше или совпадает с временем кадра от C2 $T_{f,c2}$, и фиксировали время отсылки этих кадров, $T_{s,c1}$ и $T_{s,c2}$ соответственно:

$$\Delta T_{pair} = \left(T_{s,c1} - T_{s,c2}\right) - \left(T_{f,c1} - T_{f,c2}\right). \tag{8.4}$$

Как и ΔT_{send}, задержка ΔT_{pair} тоже может накапливаться. Соответственно, для ΔT_{pair} также следует не только найти усредненное значение, но и построить зависимость от времени.

Поскольку, как отмечено во Введении, средняя частота кадров на различных участках полета может отличаться, характеристики ΔT_1, ΔT_{pair} и ΔT_{send} целесообразно рассчитывать не только в абсолютных величинах, но и в процентах – δT_1, δT_{pair} и δT_{send} соответственно. Среднее значение ΔT_{cyc} постоянно, для него достаточно дать усредненную оценку в миллисекундах.

Кроме временных, вводятся количественные характеристики:

T_{log} — длительность эксперимента на основании временных меток событий прихода циклов ИИ, декодирования и отправки кадров;

T_{fr} — длительность видеопотока на основании временных меток видеокадров;

N_{fs} — общее количество видеокадров, зарегистрированных во время сеанса;

N_{lost} — количество потерянных кадров, в частности за счет переполнения буферов.

В ходе экспериментов для каждого декодированного кадра фиксировались:

временная метка, сопутствовавшая кадру;

номер камеры;

время декодирования кадра;

время отсылки кадра потребителю по ЛВС;

номер кадра в последовательности кадров от данной камеры;

номер кадра в общей последовательности кадров от всех камер.

Для каждого цикла фиксировались:

время прихода цикла;

уникальный номер цикла в общей последовательности циклов.

После получения экспериментальных данных для каждого цикла вычислялось ΔT_{cyc} с последующим нахождением среднего значения. Для каждого кадра, кроме первых кадров по каждой из камер, были вычислены характеристики ΔT_1 и ΔT_{send}. Пары соседних кадров строились по первой и второй камерам, для каждой пары было найдено ΔT_{pair}.

Далее для каждой из характеристик находилось минимальное, среднее и максимальное значение. Для ΔT_{send} и ΔT_{pair}, кроме того, была построена зависимость данной величины от времени, прошедшего с начала регистрации.

Всего проведено две серии экспериментов на различных входных данных (разные участки ВИ). Для одних и тех же технических средств (компьютер под управлением ОС AstraLinux) по очереди испытывались следующие методы:

«нет буфера» — буферизация отключена, каждый декодированный кадр немедленно передается потребителям; в экспериментальную проверку этот вырожденный псевдометод включен для сравнения;

«3 буфера» — кольцевые буферы, по каждому буферу на камеру;

Таблица 1. Эксперименты на участке с двумя камерами

Эксперимент	T_{log}	T_{fr}	N_{fs}	N_{lost}	ΔT_{cyc}	ΔT_1	ΔT_{send}	ΔT_{pair}
Нет буфера	00:08:06.829	00:08:13.017	10734	675	253.342	125.311	0.148394	11.7404
»	00:08:07.866	00:08:13.017	10734	675	253.342	125.487	0.138554	11.6884
»	00:08:08.157	00:08:13.017	10733	675	253.342	125.459	0.14762	11.6265
Три буфера	00:08:36.818	00:08:13.017	10734	7148	253.342	31.7017	2220.84	−1504.76
»	00:08:44.192	00:08:13.017	10734	6886	253.342	34.9509	1947.72	−1683.05
»	00:08:46.216	00:08:13.017	10734	6879	253.342	36.1681	1899.18	−565.845
Адаптивный	00:06:24.488	00:08:13.017	10730	4181	253.472	67.8703	6581.13	−24.9392
»	00:06:22.552	00:08:13.017	10733	4048	253.472	68.0483	6521.6	−56.6006
»	00:06:24.143	00:08:13.017	10733	4156	253.342	68.4624	6579.88	−84.1589
По циклам	00:08:13.449	00:08:07.759	10633	746	253.212	28.4431	130.099	16.3416
»	00:07:59.726	00:08:13.017	10734	762	253.342	27.2222	129.416	18.1065
»	00:08:12.786	00:08:13.017	10733	747	253.342	28.0204	130.363	16.5853

Таблица 2. Эксперименты на участке с тремя камерами

Эксперимент	T_{log}	T_{fr}	N_{fs}	N_{lost}	ΔT_{cyc}	ΔT_1	ΔT_{send}	ΔT_{pair}
Нет буфера	00:07:39.018	00:07:47.717	5814	0	250.939	39.709	0.0568475	−155.542
»	00:07:44.917	00:07:47.717	5814	0	250.939	39.6419	0.103359	−158.524
Три буфера	00:07:48.990	00:07:47.717	5813	215	250.939	0.523661	3751.85	−162.488
»	00:07:49.982	00:07:47.717	5814	163	250.939	1.25091	2686.22	−163.82
Адаптивный	00:06:03.167	00:07:47.717	5814	552	250.939	59.8665	8767.76	−68.4793
»	00:06:02.728	00:07:47.717	5814	557	250.939	60.0424	8783.41	−43.8476
По циклам	00:07:45.483	00:07:47.717	5814	8	250.939	36.9659	19.7576	−16.2115
»	00:07:42.857	00:07:47.717	5814	10	250.939	36.9597	19.0631	−14.4581

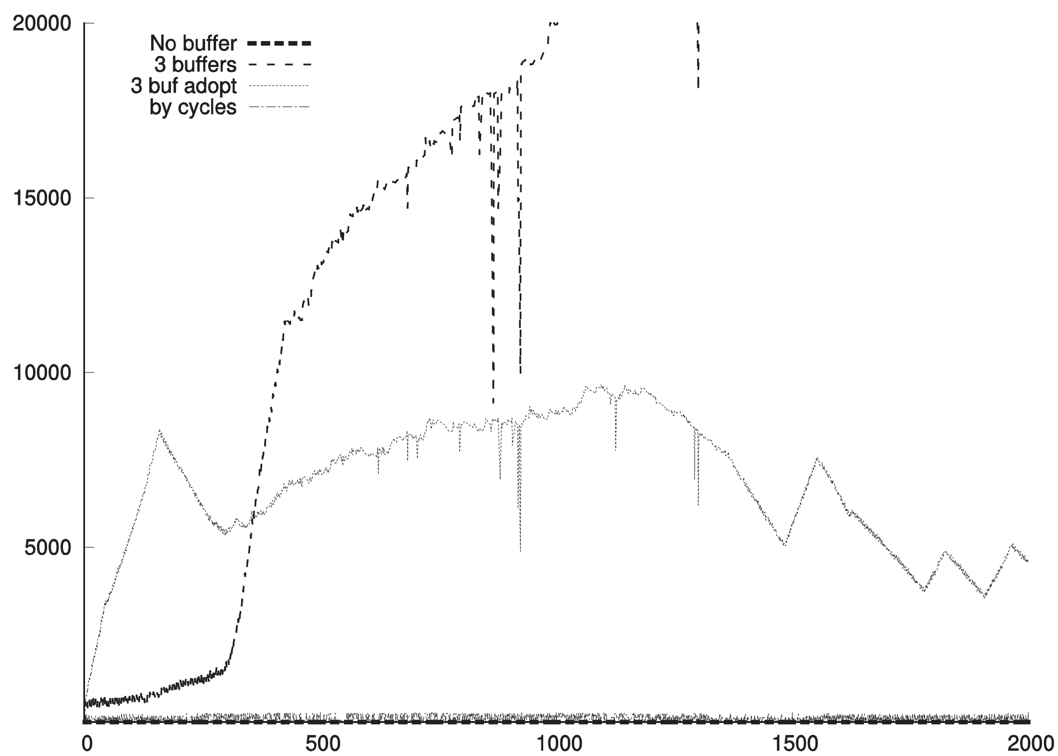


Рис. 5. Зависимость задержки обработки от номера кадра

«адаптивный» — то же, но с внесением поправкой в вычисление временных интервалов;

«по циклам» — буферизация с привязкой к циклам входной информации.

Усредненные результаты экспериментальной проверки приведены в табл. 1, 2. Все интервалы, кроме общих длительностей экспериментов и фрагментов (T_{log} и T_{fr}), приведены в миллисекундах, значения T_{log} и T_{fr} — в формате «часы – минуты – секунды – миллисекунды».

Для величин ΔT_{send} и ΔT_{pair} измерена их динамика во времени. Зависимость ΔT_{send} (мс) от номера кадра приведена на рис. 5. Зависимость ΔT_{pair} (мс) от номера кадра представлена на рис. 6.

По итогам представленных результатов можно сделать следующие выводы.

Значение ΔT_{cyc} отличается от теоретического (250 мс) всего на 3 мс (1.2%) на одном участке и на 0.9 мс (существенно менее 1%) — на другом. Таким образом, достоверность главного временного интервала, на котором основано применение методов, подтверждена.

По количеству потерянных кадров наихудшие результаты показал метод трех кольцевых буферов. Это объясняется предсказанным выше накоплением задержки и переполнением буфера. Адаптивная поправка может улучшить этот результат, но может и ухудшить.

По плавности воспроизведения потока ΔT_1 метод трех буферов и метод с привязкой к циклам показывают примерно одинаковый результат с незначительным перевесом в сторону последнего, поскольку оба этих метода учитывают заявленные в видеопотоке интервалы между кадрами. Отсутствие буфера резко ухудшает картину по этому критерию, поскольку деко-

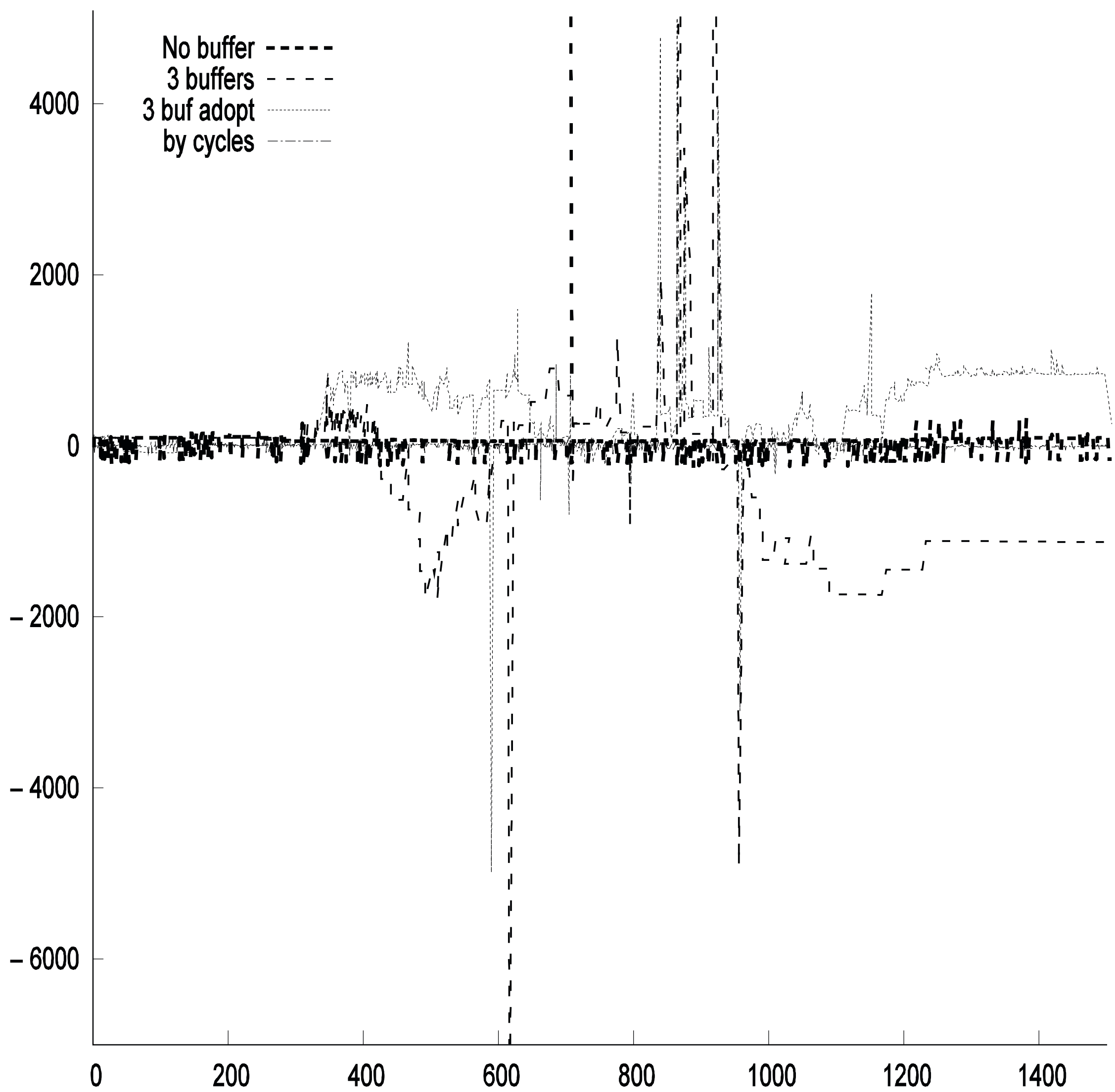


Рис. 6. Зависимость синхронности видеоряда от номера кадра

дированные кадры выдаются потребителям «пакетно» с небольшой задержкой. Метод трех буферов с адаптивной поправкой занимает промежуточное положение.

По расхождению между временем декодирования и временем отправки кадра ΔT_{send} предпочтительнее всего оказывается полное отсутствие буферизации по очевидным причинам (кадр отсылается сразу же после его выделения). Метод привязки к циклам показывает в среднем небольшое (и как показывают опыты) незаметное для глаза отставание. Результаты же для метода трех буферов даже в среднем демонстрируют существенную задержку (более 2 с). В динамике же видно, что в то время как два других метода дают колебание в районе нуля, у метода трех буферов сразу начинает нарастать задержка, однако адаптивный метод ограничивает эту задержку (рис. 5, 6).

Наконец, по синхронности видеоряда от разных камер ΔT_{pair} метод привязки к циклам незначительно хуже, чем отсутствие буферизации. Метод трех буферов демонстрирует значительное заметное для глаза расхождение камер по времени. В динамике у него видны регулярные отклонения от оси абсцисс в обе стороны. Для потребителей ВИ это означает отставание изображения сначала по одной камере, потом по другой. Для адаптивного метода поведение зависимости аналогично. Метод привязки к циклам на этом фоне показывает колебание в районе нуля.

По совокупности всех перечисленных факторов метод привязки к циклам входной информации дает наилучший результат. Метод же трех буферов без принятия дополнительных мер по большинству показателей оказывается даже хуже, чем полное отсутствие буферизации, хотя по плавности воспроизведения он успешно конкурирует с методом привязки к циклам входной информации.

Заключение. Некоторые из решений, изложенных в статье, могут применяться в сочетании. Для циклического кадрового буфера допустимо использование одного из дополнительных методов: либо привязки к времени начала приема, либо внесения поправок в вычисление временных интервалов. В то же время буфер с привязкой к циклам входной информации не требует применения этих дополнительных методов (и не совместим с ними).

Если создаваемая СОП ВИ удовлетворяет ограничениям, указанным в разделе 7, мы рекомендуем использовать привязку к циклам входной информации как наиболее надежный метод.

Внешние решения, такие как применение операционных систем реального времени, могут использоваться, если к точности временных характеристик предъявляются повышенные требования, в частности, гарантированное время отклика.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Грибков Н.В., Бобылев А.В., Юрков Ю.А., Жуковский С.Ю., Грибков В.Н.* Радиопередающее устройство с частотной модуляцией и временным разделением каналов для высокоинформативных телеметрических систем // Ракетно-космическое приборостроение и информационные системы. 2017. Т. 4. № 2. С. 61–67.
2. *Климов Д.И., Мамедов Т.Т., Губайдуллин И.Р.* Тенденции развития видеотелеметрических систем для измерения температуры термонагруженных областей средств выведения // Ракетно-космическое приборостроение и информационные системы. 2020. Т. 7. № 4. С. 90–96.
3. Бортовая система видеоконтроля для ракет-носителей и разгонных блоков БСВК // Сайт ООО «ИРЗ». https://www.irz.ru/products/11/500.htm (дата обращения 10.03.2021).
4. *Yu Yuan, D. Feng, Yuzhuo Zhong* Fast Adaptive Variable Frame-rate Coding // IEEE 59th Vehicular Technology Conference. VTC 2004-Spring (IEEE Cat. No.04CH37514). Milan, Italy, 2004. 17–19 May.
5. *Бочкарева В.Г., Матвеев И.А., Мурынин А.Б., Цурков В.И.* Методы улучшения изображений, основанные на пространственном спектральном анализе // Изв. РАН. ТиСУ. 2015. № 6. С. 62–70.
6. *Гайдамака Ю., Самуйлов А.* Анализ стратегий заполнения буфера оборудования пользователя при предоставлении услуги потокового видео в одноранговой сети // T-Comm: Телекоммуникации и транспорт. 2013. № 2. С. 30–32.
7. *Гребёнкина Т.Ю.* Сегментация рынка программного обеспечения для потоковой передачи видеоданных // Электронные средства и системы управления. Материалы докладов международной научно-практической конференции. 2019. № 1–2. С. 185–188.
8. *Блейхут Р.* Теория и практика кодов, контролирующих ошибки / Пер. с англ. М.: Мир, 1986. 576 с.
9. *Золотарев В.В., Овечкин Г.В.* Помехоустойчивое кодирование. Методы и алгоритмы. М. : Горячая Линия – Телеком, 2004.

СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖУЩИМИСЯ ОБЪЕКТАМИ

УДК 531.3:681.5.01

ОБ УПРАВЛЕНИИ ДВИЖЕНИЕМ ПЕРСПЕКТИВНОГО ТРАНСПОРТНОГО КОСМИЧЕСКОГО КОРАБЛЯ С ПОМОЩЬЮ РАКЕТНЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ

А. В. Сумароков[a, b, *]

[a]*ПАО «Ракетно-космическая корпорация «Энергия» имени С.П. Королёва», Королёв, МО, Россия*
[b]*ФГАОУВО «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)», Долгопрудный, МО, Россия*
**e-mail: anton.sumarokov@rsce.ru*

Поступила в редакцию 24.10.2023 г.
После доработки 14.11.2023 г.
Принята к публикации 29.01.2024 г.

Рассматривается управление движением перспективного транспортного корабля «Орел». Для маневрирования и угловой стабилизации в качестве исполнительных органов применяется двигательная установка. В целях обеспечения одновременного управления перемещениями центра масс космического аппарата и его стабилизацией с помощью двигателей в каждый момент времени приходится решать задачи определения потребного изменения скорости космического аппарата, выбора оптимальной конфигурации двигателей для управления угловым движением аппарата и коррекции его орбиты, а также задачу прогнозирования параметров его движения. Приводятся методы решения этих задач, примененные при разработке системы управления перспективного транспортного корабля «Орел». Работоспособность описанных алгоритмов подтверждается результатами математического моделирования на наземном стенде отработки бортового программного обеспечения.

Ключевые слова: ракетные двигатели ориентации, перспективный транстпортный корабль, алгоритм управления, задача линейного программирования, коррекция орбиты.

DOI: 10.31857/S0002338824020137, **EDN:** VOBQLW

ON ADVANCED MANNED SPACECRAFT MOTION CONTROLL USING JET THRUSTERS

A. V. Sumarokov[a, b, *]

[a]*Korolev Rocket and Space Corporation Energia, Korolev, Moscow Region, Russia*
[b]*Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University), Dolgoprudny, Moscow Region, Russia*
**e-mail: anton.sumarokov@rsce.ru*

The motion control of the advanced manned spacecraft “Orel” is considered. For maneuvering and angular stabilization, a propulsion system is used as an actuator. In order to ensure simultaneous control of the motion of the center of mass of the spacecraft (SC) and its stabilization with the help of engines at each moment of time, it is necessary to solve the problems of determining the required change in the speed of the SC, choosing the optimal configuration of the engines, and the problem of predicting the motion parameters of the SC. Methods for solving these problems, applied in the development of the control system of the manned spacecraft “Orel”, are presented. The operability of the described algorithms is confirmed by the results of mathematical modeling on a ground test bench for onboard software.

Keywords: jet propulsion attitude thrusters, advanced manned spacecraft, algorithm of controll, linear optimization problem, reboost

Введение. Пилотируемый транспортный корабль (ПТК) нового поколения «Орел», разработка которого в настоящий момент завершается, должен прийти на смену пилотируемым кораблям серии «Союз» и стать основным средством доставки экипажей на проектируемую Российскую орбитальную станцию [**1**]. Вместе с тем технический задел, реализованный в данном корабле, должен обеспечить России доступ пилотируемых полетов как на низкие околоземные, так и на окололунные орбиты. Кроме того, этот корабль должен стать средством для проведения различных космических экспериментов, связанных с изучением жизнедеятельности человека в космосе, созданием новых материалов и технологий [**2**], исследованием Земли из космоса [**3**, **4**]. С точки зрения системы управления движением корабль «Орел» отчасти подобен транспортным пилотируемым и грузовым кораблям типа «Союз», «Прогресс», решающим в ходе своего полета схожие задачи [**5**]. Как и на данных кораблях, на ПТК для осуществления угловых и пространственных маневров используется набор ракетных двигателей, размещенных в различных точках двигательного отсека. Однако вместе с тем в корабле «Орел» имеется и ряд особенностей, позволивших значительно расширить функционал системы управления движением [**6**]. В частности, одной из особенностей является возможность индивидуального управления каждым двигателем ориентации, в то время как на кораблях «Союз» и «Прогресс» управляющие воздействия, рассчитанные в бортовых алгоритмах, выдаются сразу на группы двигателей. Данное обстоятельство дает возможность оптимизировать конфигурацию включаемых двигателей в зависимости от величины и направления требуемого приращения линейной и угловой скоростей с точки зрения расхода топлива, необходимого на их реализацию. Это достигается с помощью алгоритма, подобного использованному ранее на многофункциональном лабораторном модуле «Наука» [**7**, **8**]. Как и на данном модуле, указанная особенность позволяет значительно расширить возможности системы управления с точки зрения автоматической реконфигурации набора применяемых двигателей в случае отказов отдельных двигателей. Однако в отличие от модуля «Наука» в ПТК «Орел» предлагается использовать методы оптимизации не только для управления угловым движением, но и при реализации орбитальных маневров с помощью двигателей причаливания и ориентации.

1. Постановка задачи. Рассматривается алгоритм формирования совокупности управляющих сигналов на двигатели ПТК «Орел». Алгоритм обеспечивает одновременное управление движением как центра масс корабля, так и вокруг его центра масс на участке автономного полета. Двигательная установка (ДУ) ПТК состоит из 32 двигателей двух типов: 30 двигателей причаливания и ориентации (ДПО) тягой ~248 Н, которые используются для управления движением и центра масс и осуществления угловых маневров; 2 маршевых двигателя (МД) тягой ~20000 Н, имеющие возможность отклонения вектора тяги – для осуществления орбитальных маневров. Рассматриваемый в работе алгоритм управления не затрагивает применение МД.

Для перемещений центра масс аппарата и его вращения с помощью ракетных двигателей управление осуществляется с использованием широтно-импульсной модуляции длительности включения двигателей. Все ДПО распределены по поверхности двигательного отсека ПТК для обеспечения возможности создания управляющих воздействий по любому из 12 каналов управления (6 пространственных и 6 угловых). На рис. 1 черными стрелками для каждого ДПО изображены направления истечения продуктов сгорания. Направление тяги, создаваемой ДПО, имеет соответственно противоположное направление. Двигатели расположены в восьми блоках, которые образуют три пояса двигателей. Первый пояс находится на дон-

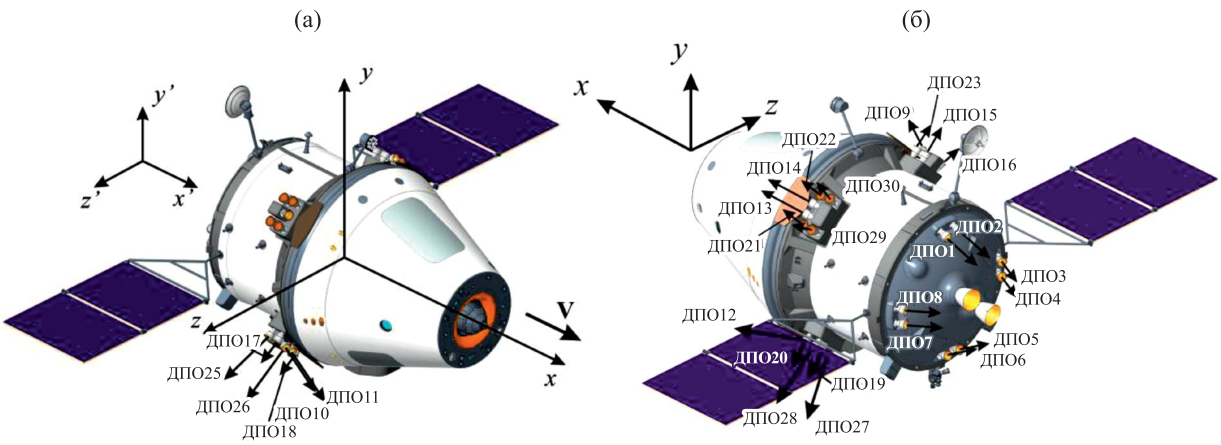


Рис. 1. Положение осей связанной системы координат ПТК и расположение двигателей

ном экране двигательного отсека и состоит из восьми ДПО (ДПО1-ДПО8 на рис. 1,*б*). Указанный набор двигателей используется для перемещения в направлении $+X$ и создания моментов в каналах рысканья и тангажа. Средний пояс размещен вблизи положения центра масс на продольной оси ПТК и состоит из восьми ДПО (ДПО23-ДПО30 на рис. 1). Данные двигатели создают небольшие управляющие моменты (по сравнению с ДПО донного торца) и применяются в основном для перемещений в боковых каналах $\pm Y$ и $\pm Z$. Наконец, передний пояс расположен ближе к возвращаемому аппарату и состоит из 14 ДПО (ДПО9-ДПО22 на рис. 1). Предназначение двигателей данного пояса: обеспечение перемещения в направлении $-X$ и создание моментов в каналах тангажа и рысканья (ДПО9-ДПО14 на рис. 1) и в канале крена (ДПО15-ДПО22 на рис. 1). Двигатели разделены на два гидравлических коллектора (в одном – 14 ДПО в другом – 16 ДПО), каждый из которых отдельно позволяет решать поставленную задачу управления пространственным движением ПТК. В качестве основного варианта управления рассматривается одновременное использование всех 30 ДПО. Одной из проблем при формировании управляющих длительностей включения двигателей является то обстоятельство, что направления тяг подавляющего большинства двигателей не совпадают ни с каналами измерителя угловой скорости, ни с направлениями осей связанной системы координат ПТК. В основном практически все двигатели создают воздействия сразу по всем каналам управления, что затрудняет возможности их комбинирования для формирования управляющего воздействия только по одному или нескольких выбранным каналам.

В качестве связанного базиса ПТК применяется система координат с началом в центре масс: продольная ось Ox направлена в сторону стыковочного узла, ось Oy – в сторону кронштейна крепления штанги, на которой установлена остронаправленная антенна, а ось Oz совпадает с осью вращения солнечных батарей и дополняет систему до правой тройки (рис. 1,*а*).

Как и в случае модуля «Наука», задача управления пространственным движением с помощью двигателей состоит из трех основных частей: определение потребного изменения скорости космического аппарата (КА) на каждом такте управления бортовой центральной вычислительной машины; реализация потребного изменения угловой скорости с помощью ДУ путем выбора оптимальной схемы включения двигателей; прогнозирование изменения параметров движения КА.

2. Определение потребного изменения скорости КА. Введем орбитальную систему координат. Расположение осей этой системы аналогично описанному в [**9**]: ось Oy' направлена вдоль радиус вектора от центра Земли, ось Oz' – против вектора угловой скорости орбитального движения, ось Ox' – в сторону вектора линейной скорости и дополняет систему до правой тройки. На рис. 1,*а* показано взаимное расположение осей орбитального базиса и связанного при нулевых угловых рассогласованиях. В подавляющем большинстве случаев в качестве целевой ориентации ПТК «Орел» в контур управления задается некоторое постоянное положение относительно орбитального базиса, определяемое $\mathbf{R}$ – кватернионом перехода из орбитального в целевой базис. Данный базис вращается вместе с орбитальным. Относительно целевого базиса в контуре управления рассчитываются угловые ошибки ориентации в виде управляющего кватерниона $\mathrm{N} = \begin{bmatrix} N_0 & N_x & N_y & N_z \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$. В случае, если при помощи показаний позиционных датчиков известно рассогласование между орбитальным и связанным базисом Λ, управляющий кватернион определяется как

$$\mathbf{N} = \tilde{\mathbf{R}} \circ \Lambda,$$

где ~ означает операцию сопряжения кватерниона $\mathbf{R}$, задающего целевую ориентацию ПТК относительно орбитального базиса.

В [**7**] показано, что решение задачи определения потребного изменения скорости КА при малых угловых рассогласованиях может быть осуществлено при помощи фазовой плоскости, а в случае, если угол рассогласования между целевой ориентацией и связанным базисом велик, осуществляется поворот вокруг оси Эйлера [**10–12**].

На рис. 2 изображены параметры управления ПТК на фазовой плоскости для каждого канала управления в координатах угла рассогласования $\nu_i \approx 2N_i$, $i = x, y, z$, $N_0 \geq 0$, между заданным положением корабля относительно целевой системы координат и реальным его положением (по оси абсцисс) и разности между проекцией на оси управления текущей оценки угловой скорости $\hat{\omega}_i(t)$ и программной угловой скоростью вращения целевого базиса ω_i^B, $i = x, y, z$ (по оси ординат). Оценка угловой скорости $\hat{\omega}_i(t)$ получена непосредственно по показаниям датчика угловой скорости $\omega_i(t)$, $i = x, y, z$, с помощью фильтра упругих колебаний, представляющего собой фильтр Калмана [**13**, **14**]. На фазовой плоскости изображена зона нечувствительности, ограниченная линиями переключения, ширина которой по вертикали

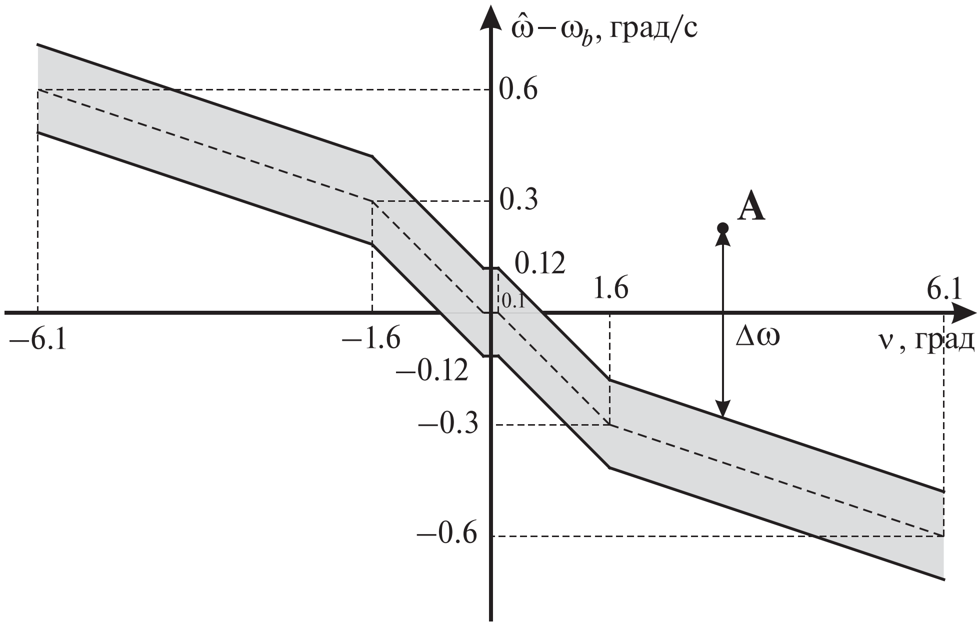


Рис. 2. Линии переключения на фазовой плоскости

составляет $\delta\omega = \pm 0.12$ град/с. В [**15**] показано, что уравнение динамики углового движения в фазовых переменных будет иметь вид

$$d\dot{\nu}_i^2 = 2\varepsilon_i d\nu_i, \tag{2.1}$$

здесь d – знак дифференциала.

В этом случае вся фазовая плоскость оказывается разделенной на три зоны. Внутри зоны нечувствительности отсутствует управление, и движение определяется $\dot{\nu}_i = \text{const}$. Снизу от зоны нечувствительности будет зона, в которой движение задается положительным моментом, согласно уравнению $\dot{\nu}_i^2 = 2\varepsilon_i\nu_i + \text{const}$ ($\varepsilon_i > 0$), а сверху – отрицательным ($\varepsilon_i < 0$). Здесь ε_i, $i = x, y, z,$ – ускорение, создаваемое двигателями в каждом канале управления. Значение произвольной постоянной в приведенных выше уравнениях определяется начальными величинами угловых рассогласований и угловых скоростей.

Как и в [**7**] для каждого канала управления потребное приращение угловой скорости (управляющий сигнал $u_i = \Delta\omega_i$, $i = x, y, z$) находится как расстояние по вертикали от точки А, соответствующей текущему состоянию системы, до ближайшей границы зоны нечувствительности с учетом гистерезиса. Будем понимать под суммарным угловым рассогласованием величину угла Эйлерова поворота от целевой к связанной ориентации. При суммарном угловом рассогласовании, превышающем 15°, происходит поворот вокруг оси Эйлера [**12**], которая определяется кватернионом рассогласования $N_i\Big/\sqrt{1-N_0^2}$, $i = x, y, z$. Управляющий сигнал в этом случае запишем следующим образом:

$$\Delta\omega_i = \hat{\omega}_i - \omega_{bi} - \omega_0 \frac{N_i}{\sqrt{1-N_0^2}} - \frac{\delta\omega_{cl}}{k_a}, \quad i = x, y, z,$$

где ω_0 – угловая скорость поворота, $k_a \geq 1$ – коэффициент углового гистерезиса, $\delta\omega_{cl}$ – ближайшая граница зоны нечувствительности по угловой скорости. При приближении в процессе разворота угла к границам зоны нечувствительности, изображенной на рис. 2, если угловое рассогласование ν_i в канале $i = x, y, z$ пока еще превышает 6.1°, а суммарное угловое рассогласование (угол кратчайшего поворота) по всем каналам уже менее 15°, то линия переключения в этом канале управления определяется движением с постоянным ускорением $e_i \approx d\omega_i/dt = \text{const}$, $i = x, y, z$. Таким образом, согласно (2.1), в первом приближении можно считать, что управляющий сигнал находится по формуле

$$\Delta\omega_i = \hat{\omega}_i - \omega_{bi} - sign(\nu_i)\sqrt{2e_i\nu_i} - \frac{\delta\omega_{cl}}{k_a}. \tag{2.2}$$

Когда угловое рассогласование ν_i в канале $i = x, y, z$ становится менее 6.1º, непосредственно используется закон управления с помощью фазовой плоскости (рис.2). Считается, что управляющая скорость в каналах, отвечающих за пространственные перемещения центра масс, задается извне и рассчитывается в алгоритмах сближения или управления движением центра масс.

3. Реализация потребного изменения угловой скорости с помощью ДУ. Подобно системе управления многоцелевого лабораторного модуля «Наука» при решении задачи реализации потребного изменения угловой скорости с помощью ДУ для выбора оптимальной схемы включения двигателей применяется алгоритм, основанный на методах линейного программирования [**16**]. Однако в отличие от того алгоритма, который использовался в этом модуле, в системе управления ПТК помимо расчета длительностей включения отдельных двигателей для реализации потребного изменения параметров углового движения также задействуется алгоритм расчета длительностей отключения части включенных двигателей при выдаче корректирующего импульса на этих же ДПО. Указанный алгоритм основан на методах линейного программирования и применяется при реализации орбитальных маневров как с помощью ДПО в качестве корректирующих двигателей, так и с применением МД. Использование данного алгоритма в ходе коррекций орбиты на МД обусловлено необходимостью создания продольной перегрузки перед его включением для обеспечения прижатия топлива к заборным горловинам баков низкого давления. Так как требуемая длительность такой перегрузки составляет несколько десятков секунд, то для угловой стабилизации в этом режиме может потребоваться отключать часть ДПО.

В результате при отсутствии требования на перемещение центра масс по продольной оси корабля задача линейного программирования (ЗЛП) для $N_{DO} = 30$ двигателей формулируется таким же образом, как в [**7**]. Требуется найти времена включения произвольной комбинации двигателей для того, чтобы достичь по всем трем каналам управления угловым движением границ зоны нечувствительности по угловой скорости (рис. 2), затратив при этом минимальное количество топлива.

Поэтому необходимо минимизировать целевую функцию:

$$Z = \sum_{n=1}^{N_{DO}} r_n\tau_n \to \min, \tag{3.1}$$

где r_n – секундный расход топлива для каждого из выбранных двигателей, τ_n – длительность работы каждого двигателя. При этом следует удовлетворить следующим шести условиям на приращение угловой скорости:

$$\begin{gathered}
\sum_{n=1}^{N_{DO}} \varepsilon_{xn}\tau_n \ge \Delta\omega^x_{down}, \qquad \sum_{n=1}^{N_{DO}} \varepsilon_{xn}\tau_n \le \Delta\omega^x_{up}, \\
\sum_{n=1}^{N_{DO}} \varepsilon_{yn}\tau_n \ge \Delta\omega^y_{down}, \qquad \sum_{n=1}^{N_{DO}} \varepsilon_{yn}\tau_n \le \Delta\omega^y_{up}, \\
\sum_{n=1}^{N_{DO}} \varepsilon_{zn}\tau_n \ge \Delta\omega^z_{down}, \qquad \sum_{n=1}^{N_{DO}} \varepsilon_{zn}\tau_n \le \Delta\omega^z_{up}, \\
\tau_n >= 0, \\
n = \overline{1, N_{DO}}\ .
\end{gathered} \tag{3.2}$$

Здесь $\mu_n = \left(\varepsilon_{xn}, \varepsilon_{yn}, \varepsilon_{zn}\right)^{\mathrm{T}}$ – угловое ускорение, создаваемое n-м двигателем, $\Delta\omega_{down} = \left(\Delta\omega^x_{down}, \Delta\omega^y_{down}, \Delta\omega^z_{down}\right)^{\mathrm{T}}$ и $\Delta\omega_{\max} = \left(\Delta\omega^x_{up}, \Delta\omega^y_{up}, \Delta\omega^z_{up}\right)^{\mathrm{T}}$ – векторы расстояний по вертикали в каждом канале управления от текущего фазового состояния системы соответственно до нижней и верхней границ зоны нечувствительности.

Следует отметить, что для максимизации линейных ускорений предусмотрено, что длительности включения двигателей для управления движением центра масс рассчитываются по заранее заложенным таблицам, после чего рассчитываются длительности включения оставшихся незадействованными двигателей при помощи решения задачи (3.1), (3.2), в результате чего формируются управляющие воздействия в каналах управления угловым движением.

В случае необходимости значительного приращения линейной скорости вдоль продольной оси корабля в режим постоянной работы включаются $N_{DO}=4$, 6 или восемь ДПО (в зависимости от готовности коллекторов и задания конфигурации используемых ДПО), и управление в каналах тангажа и рысканья происходит путем полного или частичного отключения некоторых ДПО. Ввиду того, что в ходе коррекции орбиты для минимизации длительности выдачи импульса необходимо обеспечить как можно большее ускорение центра масс вдоль продольной оси, таким образом, фактически в этом случае необходима не минимизация длительностей включения ДПО, а минимизация отключений работающих ДПО для создания максимального приращения пространственной скорости вдоль продольной оси. Кроме того, ввиду отсутствия заметных компонент ускорений от данных ДПО в канале крена управление по данному каналу исключается из ЗЛП, а реализуется отдельно при помощи ДПО15-ДПО22 с применением табличного метода:

$$\tau_n = \min\left(\left|\Delta\omega^x_{down}\right|, \left|\Delta\omega^x_{up}\right|\right) \Big/ \left|\sum_k \varepsilon_k\right|, \qquad n = a,b, \;\; k = a,b, \tag{3.3}$$

где $a,b = \{(15,19),(17,21),(16,20),(18,22)\}$ – номера пары ДПО, создающих ускорения в каналах $+X$ или $-X$. В результате ЗЛП переформулируется следующим образом: необходимо минимизировать целевую функцию (3.1) с ограничениями на не отрицательность получившегося решения $t_n \geq 0$, $n = \overline{1, N_{DO}}$ и требованием приведения угловой скорости внутрь зоны нечувствительности при минимизации отключений всех работающих двигателей:

$$\begin{gathered}
\sum_{n=1}^{N_{DO}} \varepsilon_{yn}(1-\tau_n) \geq \Delta\omega^y_{down}, \qquad \sum_{n=1}^{N_{DO}} \varepsilon_{yn}(1-\tau_n) \leq \Delta\omega^y_{up},\\
\sum_{n=1}^{N_{DO}} \varepsilon_{zn}(1-\tau_n) \geq \Delta\omega^z_{down}, \qquad \sum_{n=1}^{N_{DO}} \varepsilon_{zn}(1-\tau_n) \leq \Delta\omega^z_{up},\\
\tau_n >= 0,\; \tau_n <= 1,\\
n = \overline{1, N_{DO}}.
\end{gathered} \tag{3.4}$$

Здесь, в отличие от (3.2) и (3.3), под τ_n понимается длительность отключения отдельного двигателя.

К сожалению, формулировать и решать задачу оптимизации путем задания ограничений во всех шести каналах (три пространственных и три угловых) ввиду ее чрезвычайной вычислительной сложности для бортового компьютера не представляется возможным. В итоге используется следующая последовательность расчетов для решения задачи управления. Во-первых, при необходимости, длительности включения двигателей для управления движением центра масс в боковых каналах ($\pm Y$ и $\pm Z$) рассчитываются по заранее заложенным таблицам. Применение в данном случае таблиц оправдано тем, что пояс двигателей, создающих ускорения в боковых каналах, расположен достаточно близко к центру масс, что обеспечивает сравнительно малый уровень возмущающих угловых ускорений вокруг центра масс. Данные возмущения компенсируются остальными двигателями на последующих тактах управления. Вторым этапом следует расчет длительности отключения ДПО, формирующих ускорение в продольном канале для управления тангажом и рысканьем. Таким образом здесь решается задача совместного управления угловым движением в каналах тангажа и рысканья и линейным движением в продольном канале. На последнем этапе рассчитываются длительности включения двигателей крена путем выбора необходимой конфигурации двух ДПО из восьми создающих угловые ускорения в данном канале. Обособление канала крена также оправдано тем, что для управления используется пара двигателей, создающих силы в противоположных направлениях и, соответственно, никак не влияющих на движение центра масс. Ввиду расположения пояса этих двигателей вблизи центра масс угловые возмущения в оставшихся угловых каналах также будут невелики и в последствии будут скомпенсированы на втором этапе расчета.

Решение каждой из этих задач линейного программирования в бортовом алгоритме производится с помощью модифицированного симплекс-метода [**13**]. Полученные при помощи решения задачи (3.1)–(3.4) длительности включения двигателей $\tau_n,\ n=\overline{1,N_{DO}}$, если их максимальное значение превысило величину такта управления, составляющую 0.2 с, нормируются на это максимальное значение, и результат масштабируется к величине такта управления путем умножения на его длительность. В результате при включении найденной комбинации двигателей параметры движения КА будут изменяться в необходимом направлении. Ввиду небольших величин угловых скоростей вращения (при поворотах, не превышающих 3.5 град/с) нелинейность уравнений движения не окажет особого влияния на процесс управления, к тому же на следующем такте управления через 0.2 с задача (3.1), (3.2) или (3.1), (3.3), (3.4) будет решена заново с изменившимися начальными условиями.

4. Прогнозирование изменения параметров движения КА. После определения оптимальной на данном такте бортовой цифровой вычислительной машины (БЦВМ) комбинации двигателей и длительностей их включения найденные длительности нормируются на длительность такта, затем дискретизуются с учетом характеристик конкретных двигателей. А именно, необходимо соблюсти минимальное время работы двигателя и для обеспечения возможности их использования на следующем такте управления нужно выдержать паузу между включениями. Для ДПО минимальная длительность включения двигателей составляет 30 мс, и минимальная пауза между включениями двигателей ДПО – также 30 мс. Управляющее воздействие на каждый двигатель формируется на основе вычисленной дискретизованной длительности его включения, величина дискрета составляет 10 мс. В результате на каждый ДПО передается управляющая длительность, которая на данном такте управления длительностью 200 мс может принимать одно из следующих значений: $\tau_n = \{0, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 110, 120, 130, 140, 150, 160, 170, 200\}$ мс, $n=\overline{1,N_{DO}}$.

После задания управляющих воздействий на двигатели необходимо спрогнозировать изменение угловой и линейной скоростей от срабатывания двигателей. Реальный профиль импульса двигателя не является прямоугольным, а приблизительно выступает следующей функцией:

$$P(t)=\begin{cases}0,\ t<T_R,\\ P_{nom}\left(1-\exp\left[-k_1\left(t-T_R\right)^{n_1}\right]\right),\ T_R\le\ t<\tau,\\ P_{nom}\exp\left[-k_2\left(t-\tau-T_R\right)^{n_2}\right],\ t\ge\tau.\end{cases} \tag{4.1}$$

Здесь T_R – время «электрической» задержки прохождения команды на включение двигателя, P_{nom} – номинальная тяга двигателя, а коэффициенты k_1, k_2, n_1, n_2 можно подобрать экспериментально. На рис. 3 изображен график тяги импульса длительностью 0.2 с. Проводить точный учет профиля импульса (4.1) ввиду ограниченности вычислительных возможностей БЦВМ не является целесообразным, поэтому, как и в [**7**], задача прогнозирования изменения параметров движения КА решается путем расчета эффективной длительности работы двигателя в случае его включения на текущем такте БЦВМ по следующей формуле:

$$\tau_E=\tau-\tau_{On}+\tau_{Off},$$

где τ_{On} – задержка включения двигателя, τ_{Off} – задержка выключения двигателя. Задержки τ_{On} и τ_{Off} рассчитываются из условий равенства интегралов:

$$\int_0^{\tau_{On}}P(t)dt=\int_{\tau_{On}}^{\tau_{0.99}}\left(P_{nom}-P(t)\right)dt\ \text{ и }\ \int_{\tau}^{\tau_{Off}}\left(P_{nom}-P(t)\right)dt=\int_{\tau_{Off}}^{\tau_{0.01}}P(t)dt,$$

здесь $\tau_{0.99}$ и $\tau_{0.01}$ – длительность нарастания тяги до значения $0.99P_{nom}$ и время спада тяги до значения $0.01P_{nom}$ соответственно. Суть данных соотношений состоит в равенстве криволинейных треугольников OAB и ACD на рис. 3 при включении двигателя и аналогичных треугольников при его выключении.

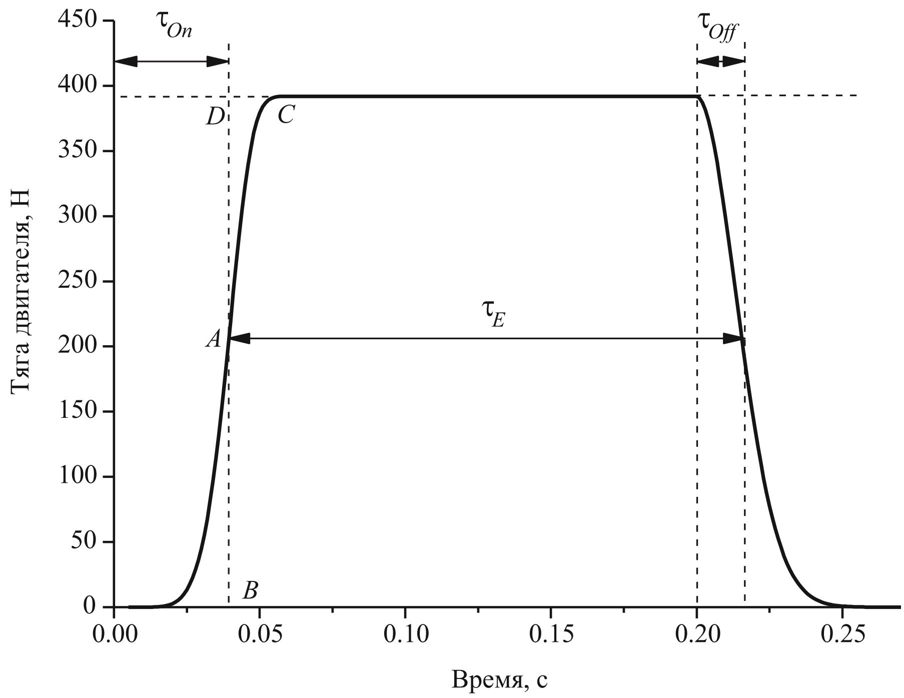


Рис. 3. Профиль тяги импульса двигателя

После расчета эффективных длительностей работы каждого двигателя вычисляется прогнозируемое приращение за такт управления угловой $\Delta\omega(t)$ и линейной $\Delta\mathbf{v}(t)$ скоростей:

$$\Delta\mathbf{v}(t) = \sum_{n=1}^{N_{DO}} \mathbf{a}_n \tau_{En}(t),\ \ \Delta\omega(t) = \sum_{n=1}^{N_{DO}} \varepsilon_n \tau_{En}(t).$$

где $\mathbf{a}_n$ и μ_n – линейное и угловое ускорения, создаваемые каждым двигателем. В частности, для ДПО задержка включения составляет 30 мс, а задержка выключения – 27 мс.

5. Результаты численного моделирования. Результаты работы алгоритма выбора набора включаемых ДПО на основе решения задачи (3.1), (3.2) были приведены в [**7**], для ПТК «Орел» поведение параметров ориентации и движения центра масс имеют похожий характер. Поэтому в данной статье более подробно рассмотрим решение задачи (3.1), (3.3), (3.4). Для демонстрации работы алгоритма расчета длительностей включения ДПО на основе решения задачи (3.1), (3.3), (3.4) далее приведены результаты моделирования реализации орбитальных маневров по декартовой (когда требуемое направление приращения линейной скорости перепроектируется на оси связанного базиса и реализация импульса осуществляется с использованием ДПО, работающих в разных направлениях) и по полярной схемам (когда в связанной системе существует некое выделенное направление, в котором имеется возможность создания большой тяги, в частности для ПТК это направления $+X$ и $-X$, и связанный базис разворачивается в пространстве таким образом, чтобы совместить указанное направление тяги с необходимым направлением выдачи импульса в инерциальном базисе). Для разнообразия продемонстрированы варианты реализации импульсов как на «разгон» (в направлении $+X$), так и на «торможение» (в направлении $-X$). Данные были получены в результате моделирования полета ПТК на наземном комплексе отработки программного обеспечения. В состав стенда входит: реальная бортовая БЦВМ с прошитым бортовым программным обеспечением; наземная модель динамики и бортовых систем; модели аппаратуры системы управления движением и внешней среды; модель упругих колебаний конструкции КА; сервисное программное обеспечение. Моделировались профили импульсов, согласно (4.1), задержки измерений и исполнения команд, ошибки установки и тяг двигателей.

На рис. 4 изображено поведение угловых скоростей и рассогласований в каналах крена, рысканья и тангажа при выполнении коррекции орбиты по декартовой схеме с импульсом ве-

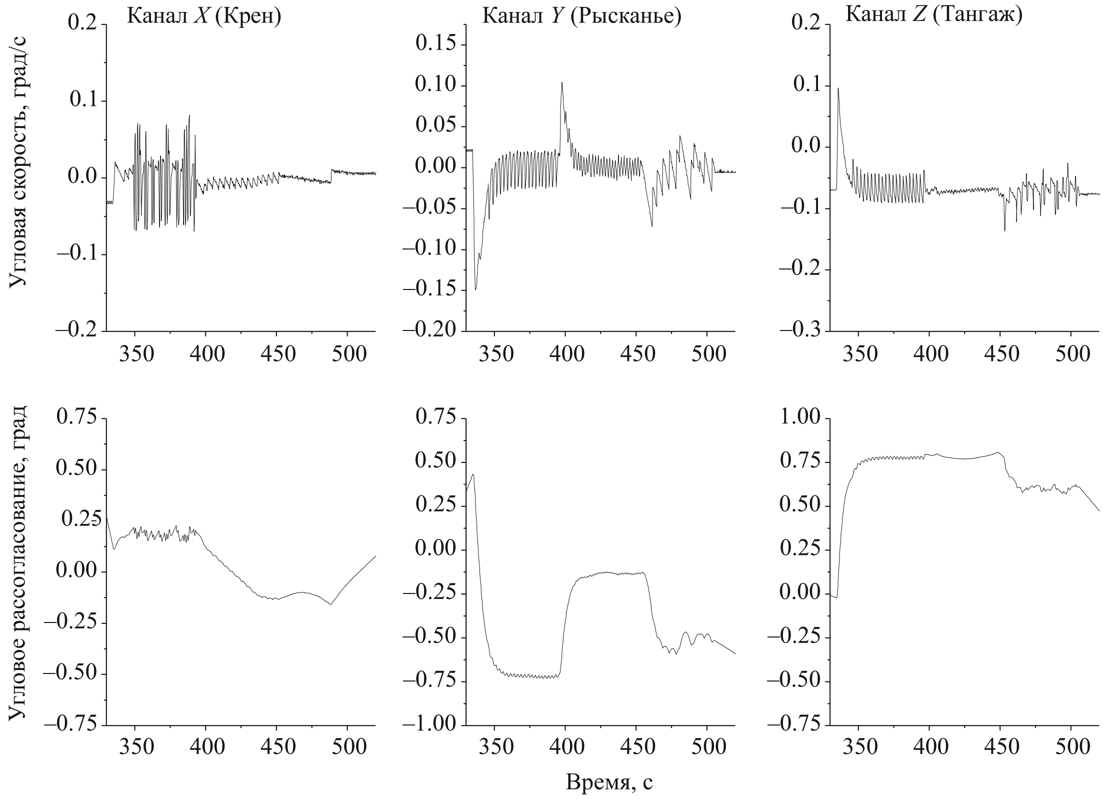


Рис. 4. Поведение угловой скорости и углового рассогласования в процессе коррекции орбиты по декартовой схеме в направлении $+X$

личиной $\Delta\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 7 & -2 & -1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$. Причем реализация его компоненты вдоль продольной оси и стабилизация в каналах тангажа и рысканья осуществляется четырьмя хвостовыми ДПО первого коллектора (ДПО1, ДПО3, ДПО5, ДПО7), управление в боковых каналах – включением ДПО среднего пояса, а для управления в канале крена используются ДПО переднего пояса ДПО17, ДПО18, ДПО21, ДПО22. На рис. 5 изображено поведение требуемых приращений скорости в линейных каналах в проекциях на оси связанного базиса. Из приведенных графиков видно, что в процессе управления угловое рассогласование не превышает 0.8°, а угловая скорость не превышает границ зоны нечувствительности, составляющих 0.12 град/с.

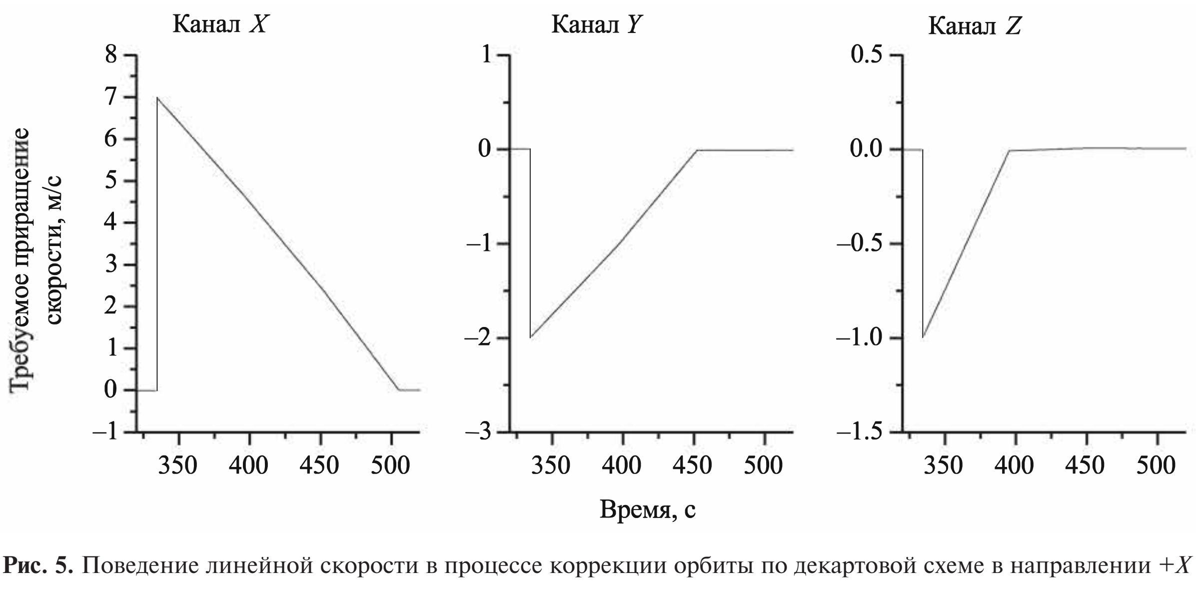


Рис. 5. Поведение линейной скорости в процессе коррекции орбиты по декартовой схеме в направлении $+X$

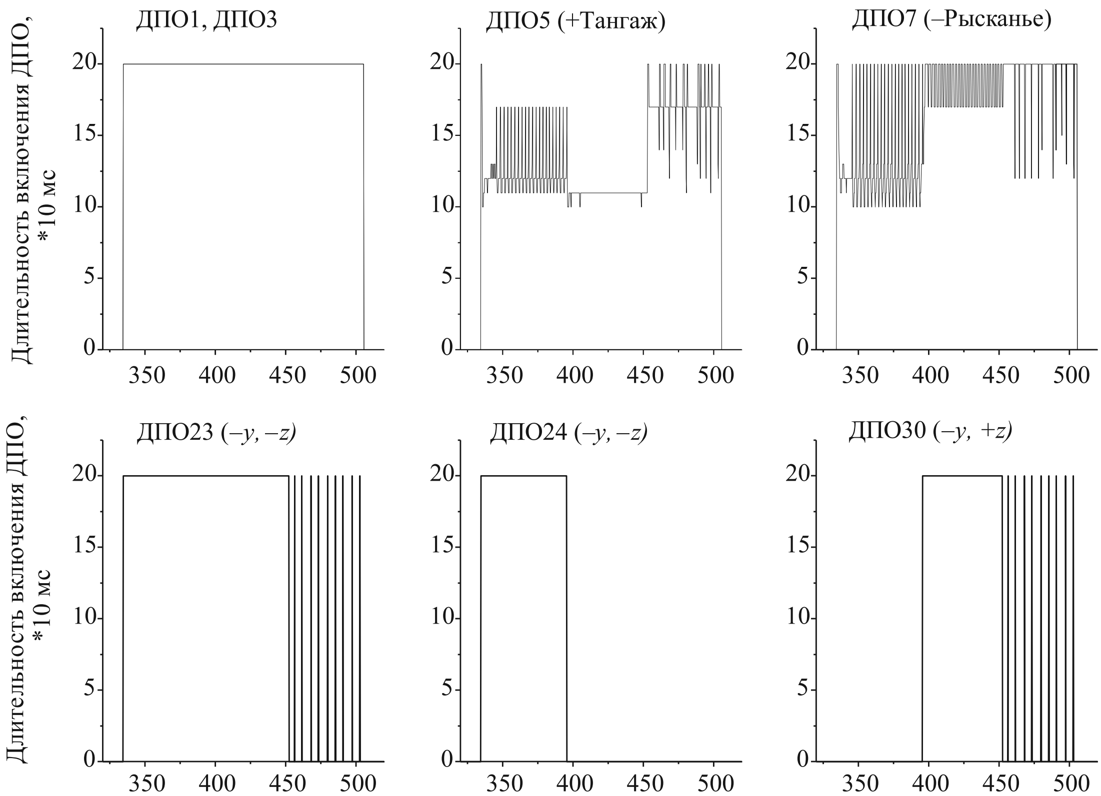


Рис. 6. Циклограмма работы ДПО при коррекции орбиты по декартовой схеме в направлении $+X$

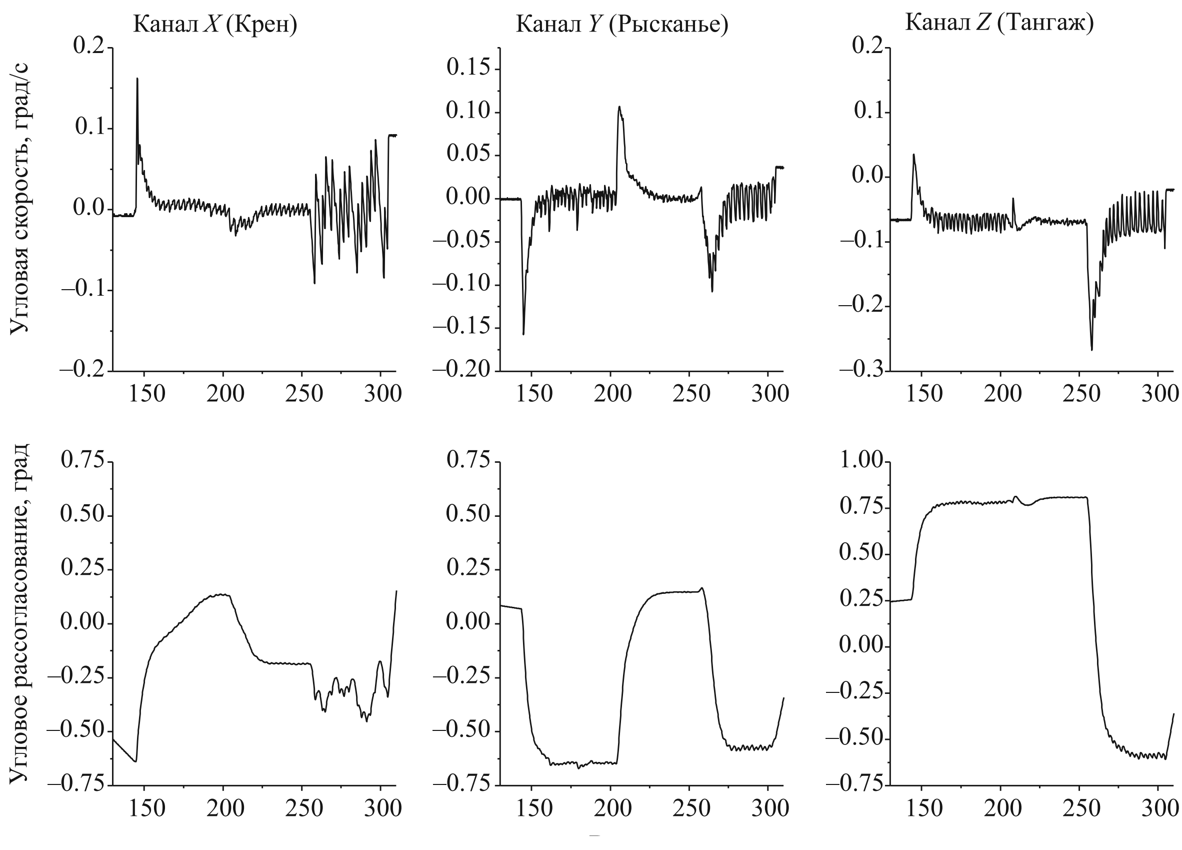


Рис. 7. Поведение угловой скорости и углового рассогласования в процессе коррекции орбиты по декартовой схеме в направлении $-X$

На рис. 6 изображены циклограммы включения ДПО, отвечающих за непосредственную реализацию импульса в продольном канале (графики в верхней части рис. 6) и в боковых каналах (графики в нижней части рис. 6). На циклограммах изображены рассчитанные алгоритмом длительности включения ДПО, представленные в квантах по 10 мс. Ввиду того что длительность такта управления составляет 200 мс, значение 20 квантов означает непрерывную работу двигателя на такте управления, меньшая величина говорит об его импульсной работе на данном такте. Графики рис. 6 демонстрируют, что для реализации импульса одновременно в двух боковых каналах $-Y$ и $-Z$ включились ДПО23 и ДПО24, создающие тягу в данном направлении. По мере отработки импульса в канале $-Z$ ДПО24 был отключен и включен ДПО30 для обеспечения тяги только в канале $-Y$. Как только реализация требуемого приращения скорости в боковых каналах была завершена, оба ДПО были отключены и включались лишь периодически для компенсации накопленных ошибок, возникших при отработке импульса в продольном канале. В свою очередь в продольном канале вначале были включены все четыре ДПО. Ввиду того что центр масс ПТК «Орел» не расположен на продольной оси, а незначительно смещен в направлениях $+Y$ и $+Z$, часть двигателей периодически отключалась для компенсации возмущающего момента, возникающего как от разности моментов двух противоположных ДПО, вызванной смещением центра масс, так и от работы ДПО, создающих тягу в боковых каналах и канале крена.

Наиболее интересной представляется работа алгоритма при реализации импульса в направлении $-X$. Все двигатели, создающие тягу в направлении $+X$, дополнительно создают тягу в основном в одном из угловых каналов или тангажа, или рысканья, в то время как двигатели, создающие тягу в направлении $-X$, дополнительно создают тягу одновременно в обоих этих угловых каналах. Поэтому создание таблицы включений для данных ДПО является достаточно сложной задачей. На рис. 7 изображено поведение угловых скоростей и рассогласований в каналах крена, рысканья и тангажа при реализации коррекции орбиты по декартовой схеме с импульсом величиной $\Delta\mathbf{V} = \begin{bmatrix} -7 & -2 & -1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$. Причем компонента импульса вдоль продольной оси и стабилизация в каналах тангажа и рысканья осуществляется четырьмя ДПО переднего пояса, входящими в состав второго гидравлического коллектора (ДПО9, ДПО10, ДПО12, ДПО13), управление в боковых каналах – включением ДПО среднего пояса, а для управления в канале крена также используются ДПО переднего пояса ДПО17, ДПО18, ДПО21, ДПО22. На рис. 8 рассмотрено поведение требуемых приращений скорости в линейных каналах в проекциях на оси связанного базиса. Из приведенных графиков видно, что в процессе управления угловое рассогласование не превышает 0.8°, а угловая скорость незначительно превышает границы зоны нечувствительности, составляющие 0.12 град/с только в моменты реакций системы управления на перестройку возмущающих моментов, что находится в допустимых пределах.

На рис. 9 показаны циклограммы включения ДПО, отвечающих за непосредственную реализацию импульса в продольном (графики в верхней части рис. 9 и левый график нижней части) и в боковых каналах (центральных и правый графики в нижней части рис. 9). На циклограммах изображены рассчитанные алгоритмом длительности включения ДПО, представленные в квантах по 10 мс. Графики рис. 9 демонстрируют, что, как и в предыдущем случае,

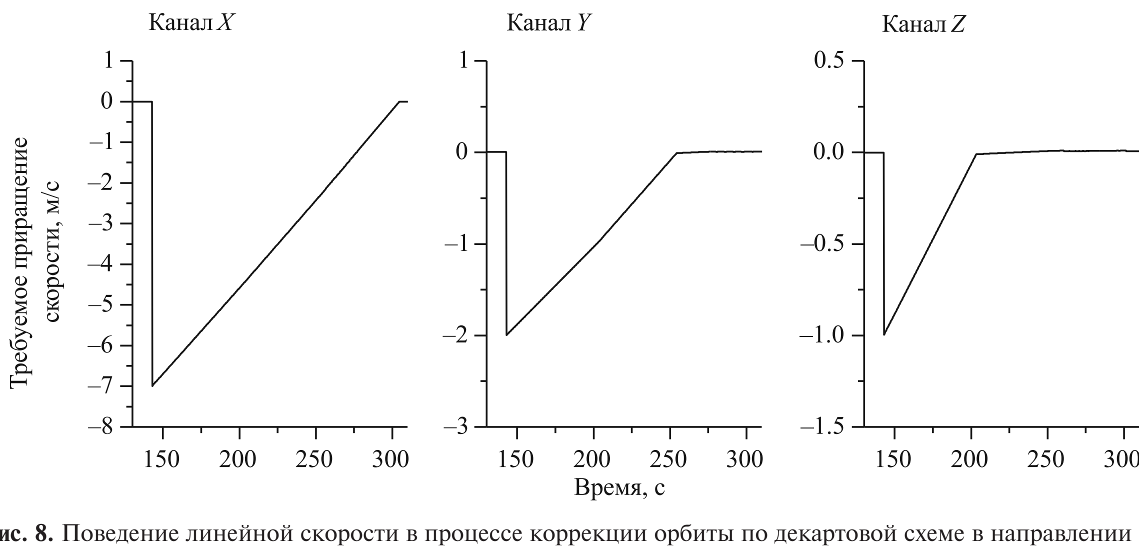


Рис. 8. Поведение линейной скорости в процессе коррекции орбиты по декартовой схеме в направлении $-X$

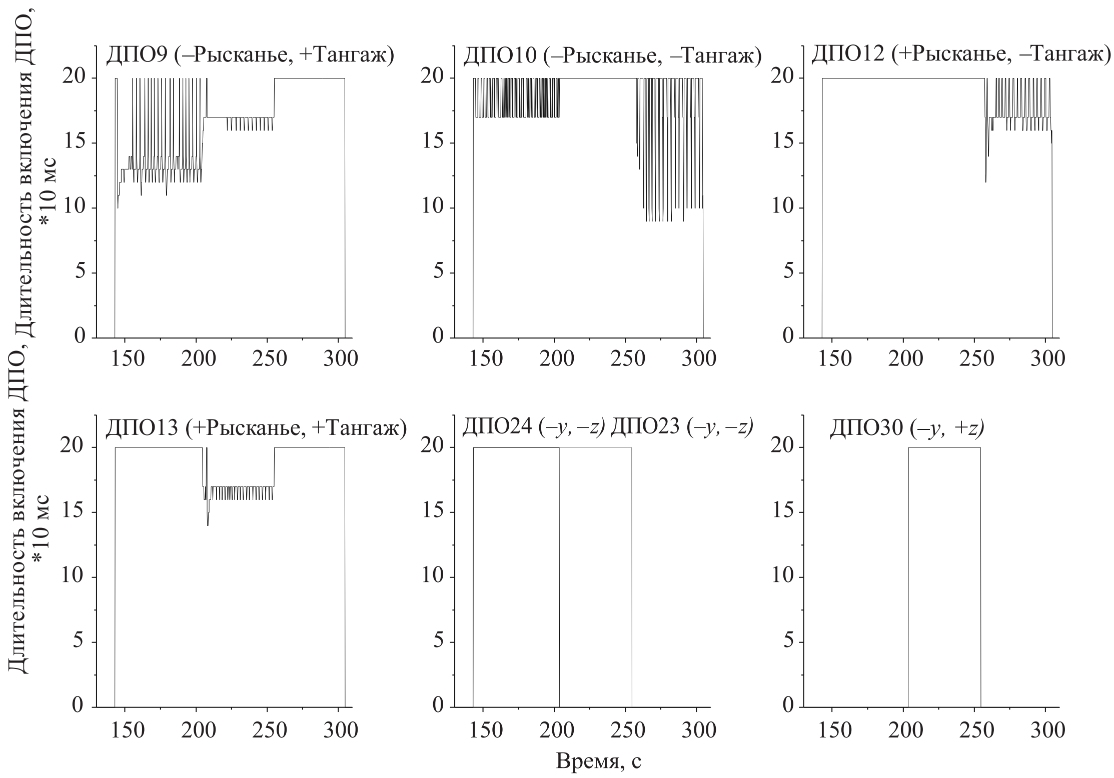


Рис. 9. Циклограмма работы ДПО при коррекции орбиты по декартовой схеме в направлении $-X$

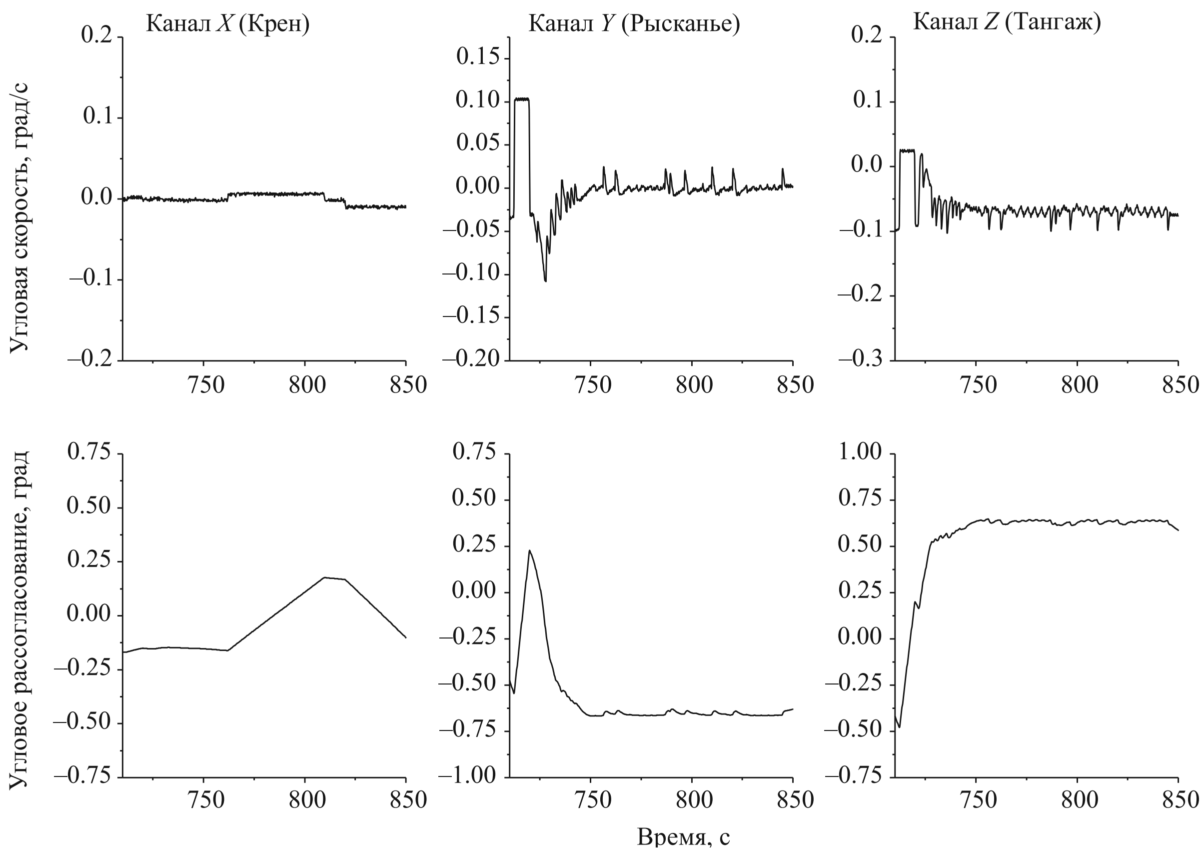


Рис. 10. Поведение угловой скорости и углового рассогласования в процессе коррекции орбиты по полярной схеме в направлении $+X$

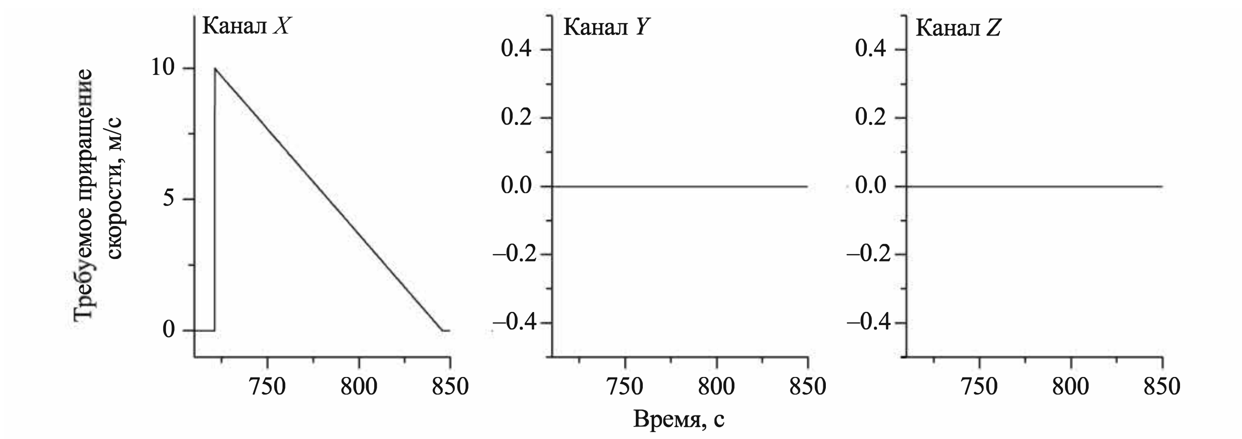


Рис. 11. Поведение линейной скорости в процессе коррекции орбиты по полярной схеме в направлении $+X$

для реализации импульса одновременно в двух боковых каналах $-Y$ и $-Z$ включились ДПО23 и ДПО24, создающие тягу в данном направлении, и по мере отработки импульса в канале $-Z$ ДПО24 был отключен и включен ДПО30 для обеспечения тяги только в канале $-Y$. Как только реализация требуемого приращения скорости в боковых каналах была завершена, оба ДПО были отключены. В свою очередь в продольном канале вначале были включены все четыре ДПО. Далее одна пара двигателей работала непрерывно, а вторая периодически отключалась для компенсации возмущающих моментов, возникающих как различия тяг противоположных ДПО, вызванных смещением центра масс, так и от работы ДПО, создающих тягу в боковых

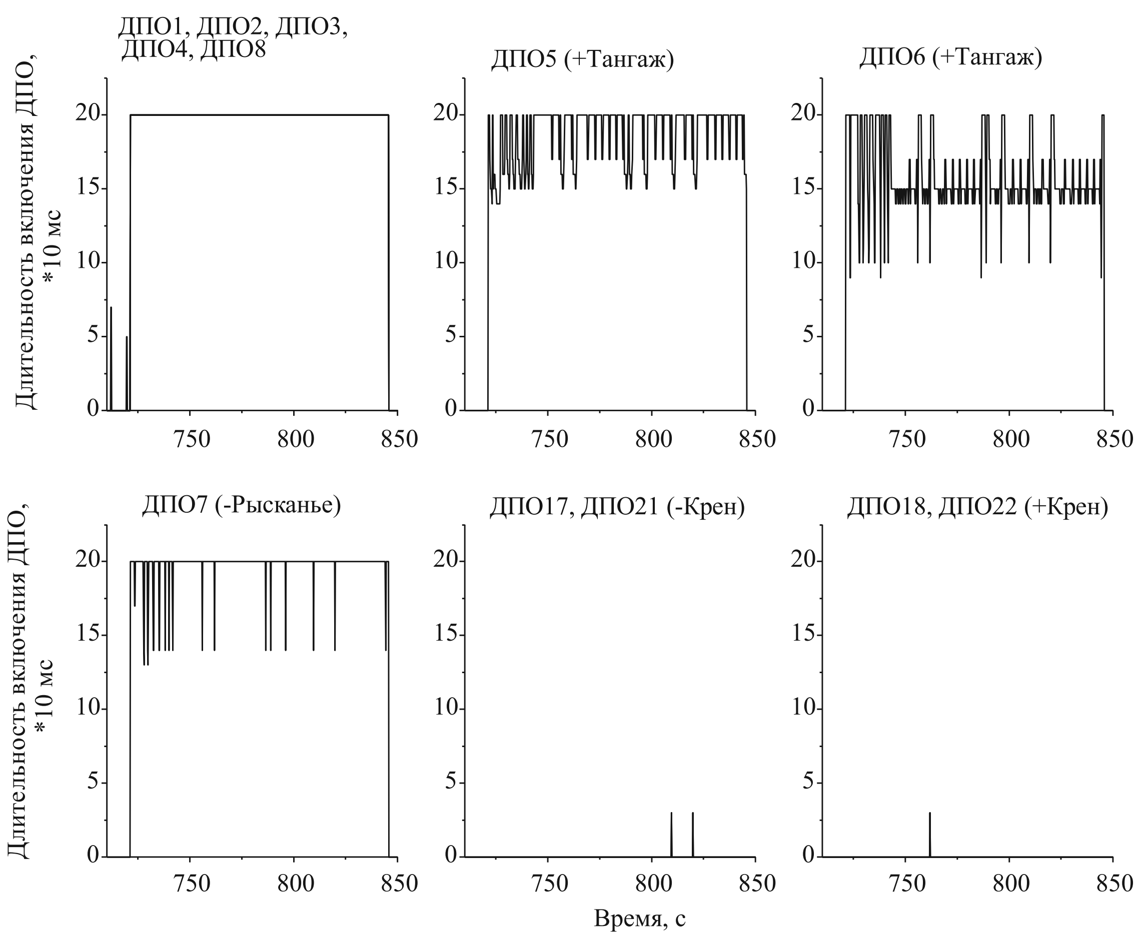


Рис. 12. Циклограмма работы ДПО при коррекции орбиты по полярной схеме в направлении $+X$

каналах и канале крена. Следует отметить, что состав каждой из пар периодически менялся по мере изменения состава ДПО, включённых для реализации импульса в боковых каналах.

Крайне интересным представляется также рассмотреть пример коррекции орбиты по полярной схеме с использованием всех восьми ДПО донного экрана. Данный режим предполагается достаточно часто применять в полете, ввиду того что в этом режиме на осаждение топлива в баках низкого давления перед включением МД требуется минимальное время, что делает необходимым включение восьми ДПО донного экрана перед каждым включением МД. Дополнительно данный режим является резервным вариантом выдачи спускового импульса для обеспечения посадки возвращаемого аппарата и основным вариантом коррекции орбиты при автономном полете двигательного отсека после отделения от него возвращаемого аппарата. На рис. 10 изображено поведение угловых скоростей и угловых рассогласований в каналах крена, рысканья и тангажа при реализации коррекции орбиты по полярной схеме с импульсом величиной $\Delta\mathbf{V} = \begin{bmatrix}10 & 0 & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$. Причем компонента импульса вдоль продольной оси и стабилизация в каналах тангажа и рысканья осуществляется восемью ДПО донного экрана, входящими в состав сразу обоих гидравлических коллекторов (ДПО1-ДПО8), управление в боковых каналах при реализации импульса по полярной схеме не осуществляется. Для управления в канале крена, как и ранее, используются ДПО переднего пояса ДПО17, ДПО18, ДПО21, ДПО22. На рис. 11 рассмотрено поведение требуемых приращений скорости в линейных каналах в проекциях на оси связанного базиса. Из приведенных графиков видно, что в процессе управления угловое рассогласование не превышает 0.8°, а угловая скорость незначительно превосходит границы зоны нечувствительности, составляющие 0.12 град/с только в момент включения всех ДПО донного экрана, что находится в допустимых пределах.

На рис. 12 изображены циклограммы включения ДПО, отвечающих за непосредственную реализацию импульса в продольном канале (графики в верхней части рис. 12 и левый график нижней части) и в канале крена (центральный и правый графики в нижней части рис. 12). На циклограммах приведены рассчитанные алгоритмом длительности включения ДПО, представленные в квантах по 10 мс. Графики рис. 12 демонстрируют, что в продольном канале вначале были включены все восемь ДПО, а далее пять ДПО работали непрерывно, а ДПО5, ДПО6 и ДПО7 периодически отключались для компенсации возмущающих моментов, возникающих от смещения центра масс. Ввиду того что ДПО5 и ДПО6 создают управляющий момент одного знака в канале тангажа, но при этом дополнительно создают небольшие моменты противоположных знаков в канале рысканья, алгоритмом выбиралось, какой из этих ДПО должен быть отключен в зависимости от угловых скоростей и угловых рассогласований в канале рысканья. Значительные моменты в данном канале создавались ДПО7. ДПО, создающие тягу в канале крена, практически не включались.

Заключение. Рассмотрен алгоритм управления движением ПТК «Орел» с помощью двигателей на его участке автономного полета. Алгоритм обеспечивает одновременное управление как движением центра масс ПТК, так и движением вокруг центра масс. Подробно рассмотрены схемы одновременной реализации импульсов, корректирующих движение центра масс с одновременной стабилизацией углового движения как при формировании импульсов по декартовой схеме, так и по полярной схеме. Представленные результаты моделирования движения КА на наземном комплексе обработки бортового программного обеспечения доказывают его эффективность и работоспособность.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Соловьев В.А., Коваленко А.А.* Высокоширотная пилотируемая орбитальная станция. Задачи управления полетом // Матер. общих заседаний 15-й мультиконф. по проблемам управления. СПб.: ГНЦ РФ ОАО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2022. С. 7–9.
2. *Сумароков А.В.* О бортовом алгоритме усреднения параметров орбитального движения Международной космической станции в эксперименте ICARUS // Изв. РАН. ТиСУ. 2018. № 2. С. 102–111.
3. *Беляев М.Ю., Десинов Л.В., Караваев Д.Ю. и др.* Особенности проведения и ис- пользования результатов съемок земной поверхности, выполняемой экипажами Россий- ского сегмента МКС // Космическая техника и технологии. 2015. № 1. С. 17–30.
4. *Сумароков А.В.* Наведение камеры высокого разрешения при видеосъёмке поверхности Земли с МКС // Навигация и управление движением. Матер. XVII конф. молодых ученых «Навигация и управление движением» // Под. общ. ред. В.Г. Пешехонова. СПб.: ГНЦ РФ ОАО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2015. С. 561–568.
5. *Борисенко Н.Ю., Борисенко Ю.Н., Платонов В.Н. и др.* Анализ статистики ускоренного построения орбитальной системы координат транспортных пилотируемых и грузовых кораблей и методы повышения точности // Космическая техника и технологии. 2018. № 2. С. 58–65.

6. *Сумароков А.В.* Об управлении движением Многоцелевого лабораторного модуля с помощью реактивных двигателей на автономном участке полета // Навигация и управление движением. Матер. XIV конф. молодых ученых «Навигация и управление движением» // Под. общ. ред. В.Г. Пешехонова. СПб.: ГНЦ РФ ОАО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2012. С. 157–164.
7. *Сумароков А.В.* Управление движением Многоцелевого лабораторного модуля с помощью двигательной установки // Изв. РАН. ТиСУ. 2023. № 3. С. 141–155.
8. *Прутько А.А., Сумароков А.В.* О нагрузках на элементы конструкции Многоцелевого лабораторного модуля на автономном участке полета // Вестн. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение. 2017. № 2. С. 123–138.
9. *Богданов К.А., Зыков А.В., Субботин А.В. и др.* Применение обобщенных полиномов Баттерворта для стабилизации положения равновесия космической станции // Изв. РАН. ТиСУ. 2020. № 3. С. 148–163.
10. *Платонов В.Н., Сумароков А.В.* Управление космическим аппаратом с помощью двухстепенных гироскопов при их раскрутке и торможении // Изв. РАН. ТиСУ. 2020. № 2. С. 156–167.
11. *Платонов В.Н., Сумароков А.В.* Обеспечение точностных характеристик стабилизации перспективного космического аппарата дистанционного зондирования Земли // Изв. РАН. ТиСУ. 2018. № 4. С. 193–205.
12. *Бранец В.Н., Шмыглевский И.П.* Введение в теорию бесплатформенных инерциальных навигационных систем. М.: Наука, 1992. 280 с.
13. *Микрин Е.А., Тимаков С.Н., Зыков А.В. и. др.* Опыт и перспективы создания бортовых алгоритмов управления движением космических аппаратов // Вестн. РФФИ. 2017. № 3 (95). С. 23–45.
14. *Квакернаак Х., Сиван Р.* Линейные оптимальные системы управления. М.: Мир, 1977. 650 с.
15. *Бранец В.Н., Севастьянов Н.Н., Федулов Р.В.* Лекции по теории систем ориентации, Управления движением и навигации. Учебное пособие / Под общ. ред. Н.Н. Севастьянова. Томск: Томский государственный ун-т, 2013. 313 с.
16. *Банди Б.* Основы линейного программирования. М.: Радио и связь, 1989. 176 с.

ИЗВЕСТИЯ РАН. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2024, № 2, С. 169–182

РОБОТОТЕХНИКА

УДК 621.865.8

МОДИФИКАЦИЯ АППАРАТА НЕЙРОННОЙ СЕТИ ХОПФИЛДА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЗАДАНИЙ В ГРУППЕ МОБИЛЬНЫХ РОБОТОВ[1]

© 2024 г. О. В. Даринцев[a, b, *], А. Б. Мигранов[a, **]

[a]Институт механики им. Р.Р. Мавлютова — обособленное структурное подразделение УФИЦ РАН, Уфа, Россия

[b]Уфимский ун-т науки и технологий, Уфа, Россия

*e-mail: ovd@uimech.org

**e-mail: abm.imech.anrb@mail.ru

Поступила в редакцию 27.04.2023 г.
После доработки 24.10.2023 г.
Принята к публикации 29.01.2024 г.

При групповом взаимодействии мобильных роботов возникает проблема распределения поставленных перед группой задач с учетом характеристик роботов и рабочей среды. Целью работы является модификация нейронной сети Хопфилда и разработка методик ее использования для поиска решений задачи распределения произвольного числа заданий в группе мобильных роботов. Для этого произведено представление нейронной сети Хопфилда в виде графа. На модели группы роботов показан алгоритм перехода от исходной задачи к TSP-задаче (travelling salesman problem, задача коммивояжера). Описано применение модели Хопфилда к задаче распределения заданий в группе роботов и разработан алгоритм расчета функции оптимизации. Проведена оценка влияния параметров нейросети на качество и скорость решения оптимизационной задачи. По результатам сравнения с другими эвристическими методами (генетическим и муравьиным алгоритмами) определены области применения модифицированного алгоритма.

Ключевые слова: группа роботов, распределение задач, нейросеть Хопфилда.

DOI: 10.31857/S0002338824020145, **EDN:** VOAXOI

MODIFICATION OF THE HOPFIELD NEURAL NETWORK MODEL FOR SOLVING THE TASK OF OPTIMAL TASK ALLOCATION IN A GROUP OF MOBILE ROBOTS

O. V. Darintsev[a, b, *], A. B. Migranov[a, **]

[a]Mavlyutov Institute of Mechanics URFS RAS, Ufa, Russia

[b]Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia

*e-mail: ovd@uimech.org

**e-mail: abm.imech.anrb@mail.ru

In the context of group interaction among mobile robots, there arises the challenge of task distribution within the group, considering the robots' characteristics and the working environment. This study aims to modify the Hopfield neural network and develop methodologies for its application in solving the task allocation problem for an arbitrary number of tasks within a group of mobile robots. To achieve this, the Hopfield neural network is represented as a graph. An algorithm is presented, demonstrating the transition from the initial problem to the Traveling Salesman Problem (TSP). The application of the Hopfield model to the task distribution problem in a group of robots is described, along with the development of an optimization function calculation algorithm. An assessment is conducted to evaluate the impact of neural network parameters on the quality

[1] Работа выполнена в рамках госзадания FMRS-2023-0016 (075-01134-23-00).

and speed of solving the optimization problem. By comparing it with other heuristic methods (genetic and ant colony algorithms), the domains of application for the modified algorithm are determined.

Keywords: group of robots, distribution of tasks, Hopfield neural network.

Введение. Мобильные автономные системы для решения различного типа задач стали одним из признаков современности. Разработкой данных систем занимаются коллективы различных стран. Использование мобильных роботов является обоснованным в различных ситуациях, связанных с автоматизацией производственных процессов, автоматической доставкой товаров, управлением складами, применением в экстремальных средах (космической и подводной, атомная энергетика, спасательные операции, охрана и безопасность и т.д.). В результате мобильные роботы выполняют широкий спектр задач как в качестве автономного объекта [1], так и в составе связанных групп роботов [2–4].

В последнее время одним из активно развивающихся направлений групповой робототехники является синтез алгоритмов управления группой роботов, которые выполняют общую поставленную задачу. При этом рассматривается два типа групп роботов – управляемые командами из центра связи [5] и работающие как замкнутая система [6]. Эффективность применения групп напрямую зависит от времени автономной работы мобильных роботов, что накладывает ограничения на их массогабаритные, энергетические, статические и динамические функциональные характеристики. Кроме технических проблем реализации необходимы методики управления и планирования, реализующие концепцию единой энергетики группы и поддерживающие механизмы перераспределения энергии и контроля решаемых задач. Данные методики вносят коррективы в работу всех уровней управления, в том числе и стратегического, где решаются задачи планирования деятельности группы. При этом задача генерации алгоритма управления группой роботов является сложной и актуальной проблемой, решение которой проводят с помощью различных методов теории управления [7–13]. В общем случае распределение задач проводится в рабочем пространстве с произвольным числом заданий и роботов, в качестве объекта применения алгоритмов распределения выступают гетерогенные группы роботов, а сама проблема рассматривается как сложная комбинаторная задача.

Среди подходов решения исследуемой проблемы следует отметить алгоритмы централизованного распределения задач [7], мультиагентные алгоритмы управления, использующие нечеткую логику [8], алгоритмы динамического программирования [9], потенциальные поля [10] и когнитивно-адаптивные методы [11]. Также показывают свою эффективность эволюционные подходы на основе генетических и муравьиных алгоритмов [12].

В работе [13] показано, что проблема распределения в группе с произвольным числом роботов и заданий на поле в общем случае является NP-полной задачей, при решении которой применяется аппарат нейронных сетей. Так, в [14–18] рассмотрены различные оптимизационные задачи данного типа и поиск методов их приближенного решения с помощью нейросетей. В отличие от генетических или муравьиных алгоритмов нейросетевой подход считается более предпочтительным в тех случаях, когда важна скорость алгоритма поиска, а само решение может быть не обязательно самым оптимальным.

Ранее в работе [19] авторами была показана применимость нейросетевого подхода при решении задач распределения, имеющих низкую размерность и ограниченное число заданий и роботов в группе. Однако решения задачи с учетом допустимости произвольного числа роботов и заданий, а также метаоптимизации параметров нейросети, влияющих на качество и скорость решения оптимизационной задачи, ранее не проводились. Целью данной работы является развитие использования аппарата нейронной сети Хопфилда для решения оптимизационной задачи распределения заданий в группе мобильных роботов. Также будет показано, что при решении задачи большой размерности существенное влияние как на результат решения, так и на время расчета оказывает выбор свободных параметров настройки нейронной сети.

1. Постановка задачи. Приведем состав исходных данных и модель рабочего пространства с произвольным числом заданий и числом мобильных роботов в группе. На дискретном рабочем пространстве $N \times N$ в узловых точках размещаются n роботов и m заданий. Точками расположения роботов и заданий являются соответственно координаты (x_i, y_i, $i \in \overline{1,n}$) и (x_j^*, y_j^*, $j \in \overline{1,m}$). Необходимо распределить задачи между роботами таким образом, чтобы были выполнены все задания. В результате распределения каждый робот должен решить k заданий, $k \in \overline{0,m}$. В каждой точке в один и тот же момент времени может находиться только одно задание и/или один робот.

Таблица 1. Начальное расположение роботов и координаты заданий

Робот				$Р_1$	$Р_2$
Координаты				{4, 10}	{1, 7}
Задание	$З_1$	$З_2$	$З_3$	$З_4$	
Координаты	{5, 8}	{1, 6}	{5, 4}	{2, 7}	

Критерием оптимальности служит общая длина маршрута, которая складывается из пройденных расстояний каждого робота из группы:

$$S_\Sigma = \sum_{i=1}^{n} S_i, \tag{1.1}$$

где S_i – длина маршрута, по которому прошел i-й робот в результате распределения задач в группе. Длина маршрута рассчитывается как сумма евклидовых расстояний, пройденных роботом:

$$S_i = \sum_{j=1}^{k} \sqrt{\left(x_j^* - x_{j-1}\right)^2 + \left(y_j^* - y_{j-1}\right)^2}. \tag{1.2}$$

2. Постановка задачи в виде TSP (travelling salesman problem, задача коммивояжера). Для эффективного синтеза алгоритмов управления группой роботов целесообразно представить всю группу роботов и задания на поле в виде вершин графа, что является необходимым и достаточным условием [13]. В качестве демонстрации процесса перехода от исходной задачи к TSP-задаче на графе рассмотрим частный случай, когда мобильная группа состоит из двух роботов ($Р_1$, $Р_2$) и необходимо выполнить четыре задания ($З_1$, $З_2$, $З_3$, $З_4$). Объекты размещаются на дискретном рабочем поле 10×10. Начальные координаты роботов и координаты заданий показаны в табл. 1, на рис. 1 – их графическое расположение на дискретном рабочем поле.

Представим в виде графа дискретное рабочее поле с расположенными на нем объектами. Пусть A – множество неориентированных ребер, R и W – вершины, соответствующие координатам расположения роботов и заданий на рабочем поле. Введем обозначения: $G = \{V, A\}$ – смешанный граф, где $V = R \cup W$ – объединение непересекающихся множеств. При этом никакие две вершины подмножества R не смежны друг с другом, в графе G подграф W имеет пару различных смежных вершин, а каждое ребро является взвешенным направленным ребром.

Соответствующий начальному расположению роботов и координатам заданий граф приведен на рис. 2.

Решение NP-полных задач с помощью нейросетевых методов широко практикуется для задач TSP-класса [19]. Для преобразования исходной задачи к задаче TSP-класса введем фиктивные переходы между заданиями и работами на поле, а также между точками расположения

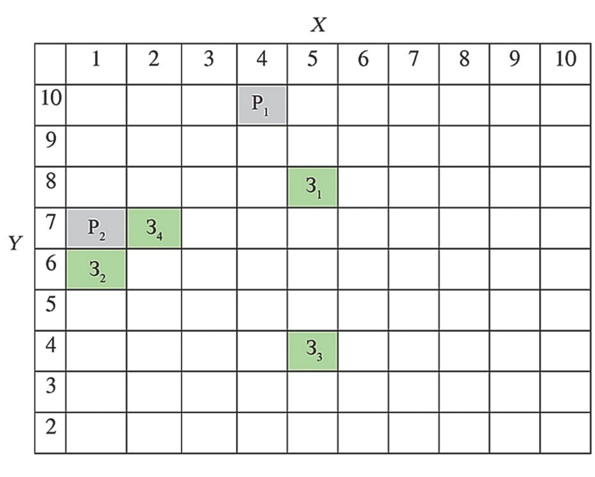


Рис. 1. Графическое представление расположения роботов и задач на рабочем поле

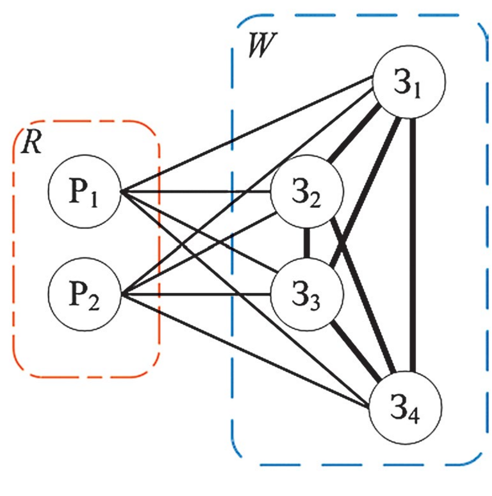


Рис. 2. Граф G_{VRP} для рассматриваемого примера

роботов с нулевым весом. В конечной точке траектории i-го робота необходимо замкнуть его маршрут через фиктивный путь $i+1$ робота. При этом вершину маршрута последнего робота N необходимо замкнуть на вершину первого робота ($N=1$). Это позволяет построить граф, содержащий гамильтонов цикл, являющийся одним из вероятных решений.

3. Использование сети Хопфилда для решения задачи. Нейронная сеть Хопфилда может быть применена в целочисленном программировании и комбинаторной оптимизации [19]. Основная проблема в этом случае состоит в подборе весов в функциях активации, обеспечивающих достижение состояния сходимости и исключение неверных решений. Функцией оптимизации модели Хопфилда является функционал энергии сети [20]:

$$E(g) = E_1 + E_2 + E_3 + E_4,$$

$$\begin{cases} E_1 = A\sum\limits_X \sum\limits_i \sum\limits_{j \neq i} g_{Xi} g_{Yi}, \\ E_2 = B\sum\limits_i \sum\limits_X \sum\limits_{X \neq Y} g_{Xi} g_{Yi}, \\ E_3 = C\left(\sum\limits_X \sum\limits_i g_{Xi} - N\right)^2, \\ E_4 = D\sum\limits_X \sum\limits_{Y \neq X} \sum\limits_i d_{XY} g_{Xi} \left(g_{Yi} + g_{Yi-1}\right), \end{cases} \tag{3.1}$$

где g_{Xi} – двоичный параметр вершины X_i графа; d_{XY} – вес между вершинами X и Y; A, B, C, D – весовые коэффициенты.

Входной потенциал определяется через выражение

$$u_{Xi} = -\frac{\partial E}{\partial u_{Xi}}.$$

Модель нейродинамики

$$\frac{du_{Xi}}{dt} = -\frac{u_{Xi}}{\tau} - \left[\begin{array}{c} A\sum\limits_{j \neq i} g_{Xi} + B\sum\limits_{X \neq Y} g_{Yi} + \\ + C\left(\sum\limits_X \sum\limits_i g_{Xi} - N\right) + \\ + D\sum\limits_Y d_{XY}\left(g_{Yi+1} + g_{Yi-1}\right) \end{array}\right],$$

где τ – числовой коэффициент. Процесс расчета итерационно повторяется. В матрице решений номер столбца является точкой маршрута, а номер строки – вершиной графа.

Общий алгоритм функции оптимизации при распределении задач в рабочем пространстве с произвольным числом заданий и числом мобильных роботов в группе показан на рис. 3.

4. Пример работы алгоритма. Рассмотрим результаты вычислительных экспериментов для частного случая расположения роботов и координат заданий (табл. 1), графическое расположение которых на рабочем поле представлено на рис. 1.

По формуле (1.1) инициализируются значения весов ребер графа, и в соответствии с алгоритмом оптимизации (рис. 3) строится граф, содержащий гамильтонов цикл (рис. 4). Для построения стратегии поведения производится обратное преобразование TSP-решения в маршруты движения роботов и их распределение по заданиям.

5. Анализ влияния свободных параметров на качество решения. Рассмотренный частный случай имеет низкую размерность и как результат приемлемое (близкое к оптимальному) решение получается без настройки свободных параметров сети. Используем предложенный подход

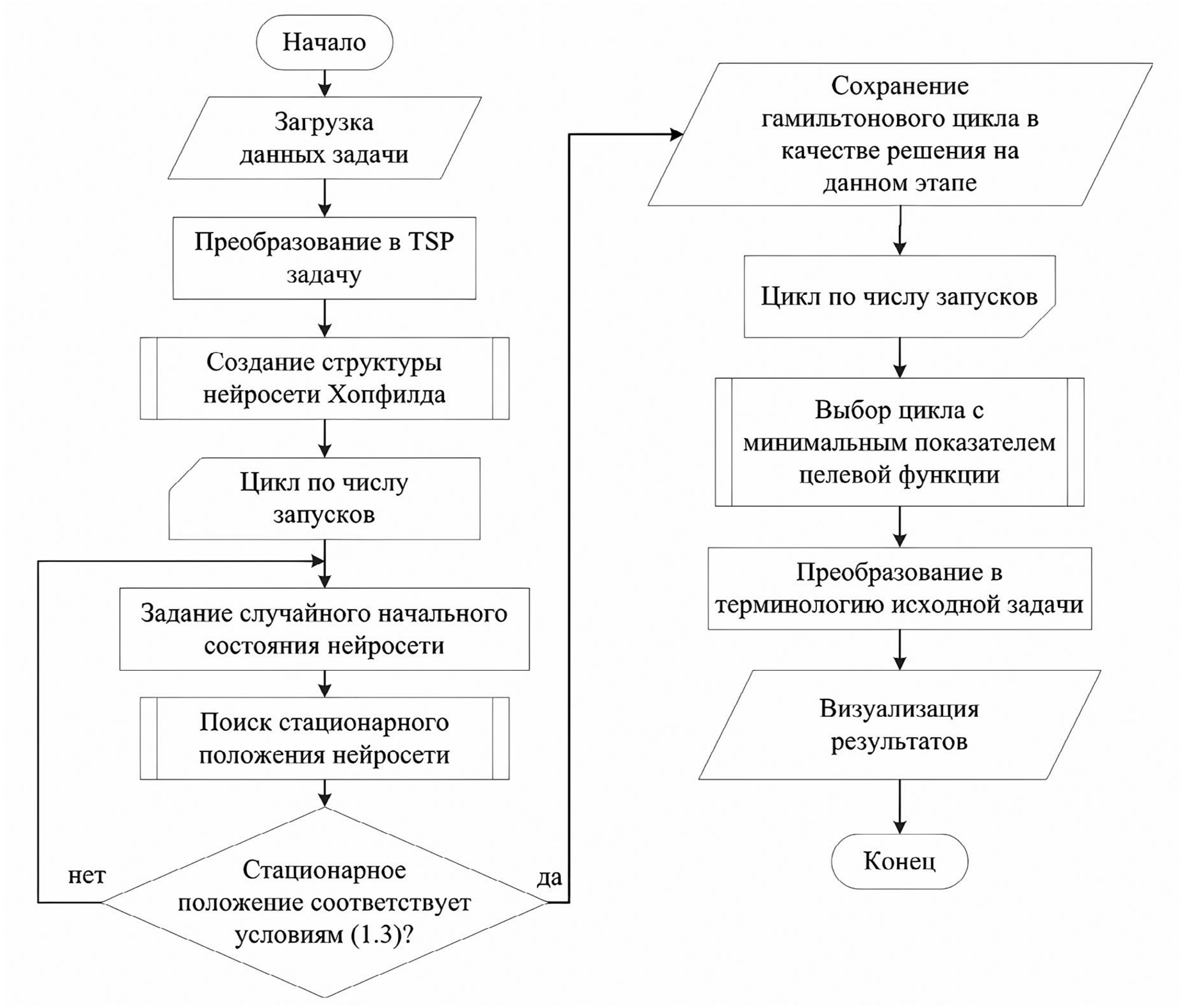


Рис. 3. Блок-схема алгоритма оптимизации

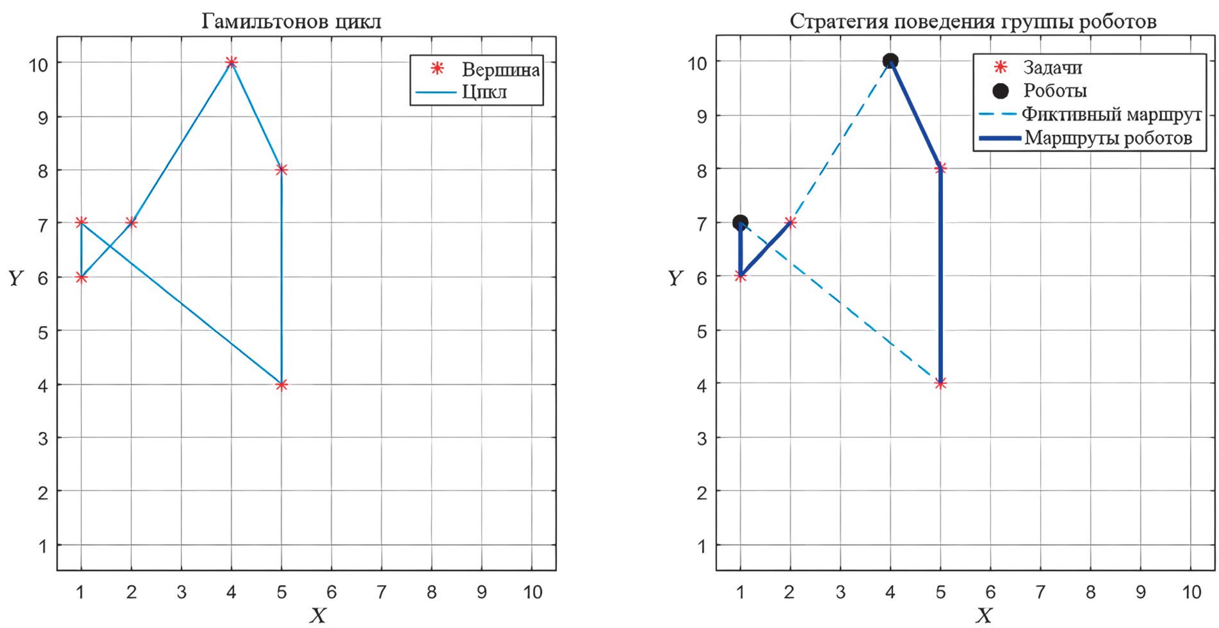


Рис. 4. Результат расчета стратегии поведения группы роботов

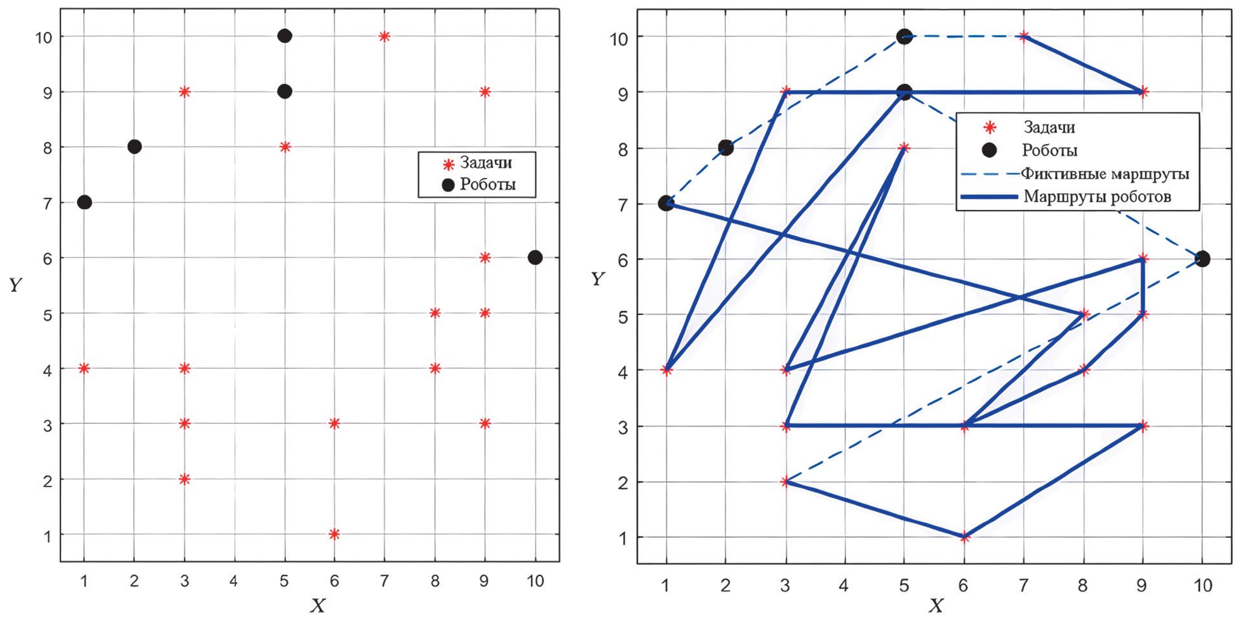


Рис. 5. Тестовая задача для размерности N=20 (5 роботов, 15 заданий) и ее решение при начальных параметрах (u_0=0.2; A=B=D=500; C=200)

для задач большей размерности (5 роботов, 15 заданий) и проведем оценку влияния основных параметров на качество и скорость решения оптимизационной задачи.

К основным параметрам сети отнесем: пороговый уровень потенциала (u_0); относительные веса слагаемых (A, B, C, D).

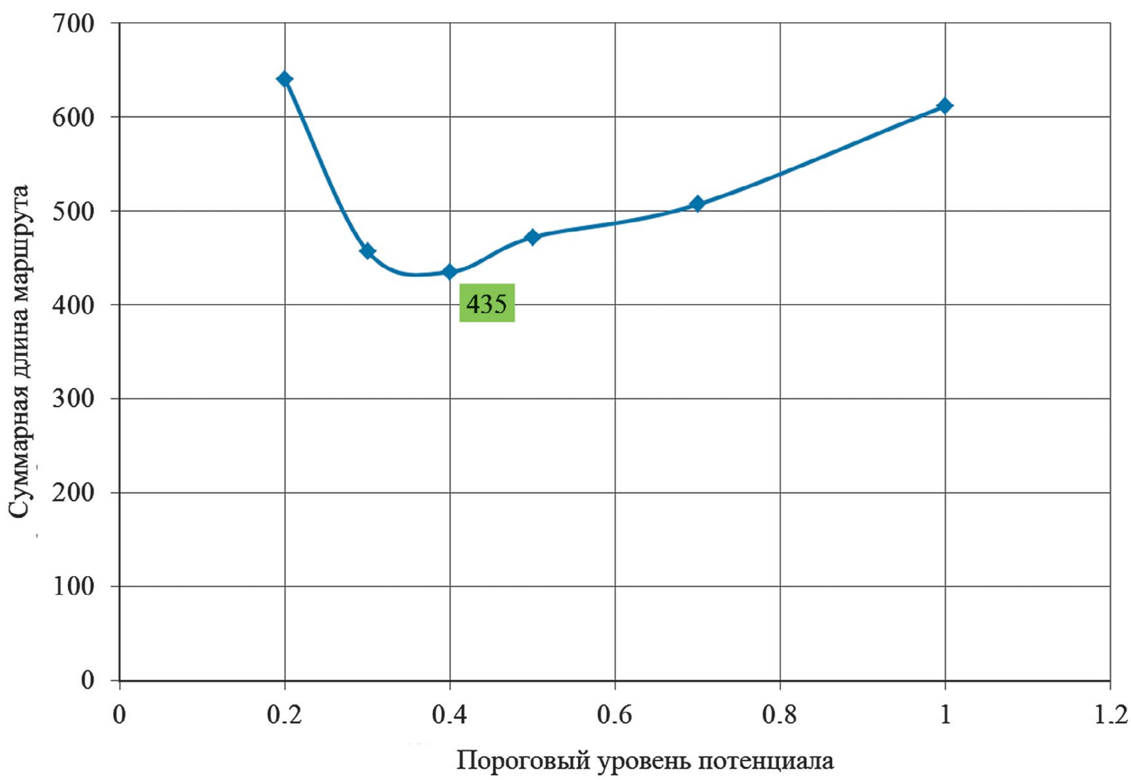


Рис. 6. Зависимость минимальной длины маршрута от порогового уровня потенциала (250 запусков нейросети для каждой точки)

Метаоптимизацию параметров нейросети выполним по методике, содержащей следующие этапы:

1) выбор оптимального порогового уровня,
2) выбор набора относительных весов слагаемых *A, B, C, D*,
3) уточнение порогового уровня при выбранных весах слагаемых.

В качестве тестовой задачи используем задачу с размерностью поля 10х10 и числом объектов $N = 20$ (5 роботов, 15 заданий). Отображение исходных данных (гамильтонов цикл и стратегия поведения группы роботов) показано на рис. 5.

Этап 1. Пороговый уровень потенциала определяет, насколько плавный переход будет при расчете узлов сети Хопфилда.

Для анализа влияния параметра u_0 на качество решения проведен расчет тестовой задачи при разных его значениях. Всего выполнялось 250 запусков нейросети. На рис. 6 представлена зависимость минимума длительности маршрута для всех запусков по каждой точке.

Получено, что минимум длины маршрутов наблюдается для $u_0 \approx 0.4$.

Этап 2. Для быстрой сходимости веса *A, B, C, D* задаются в диапазоне 100–1000 единиц. Практические исследования показали, что при таких параметрах оптимизация наиболее эффективна. Проверим, какие параметры будут наиболее применимы для текущей размерности сетевой модели. Для этого проведем последовательную метаоптимизацию по весовым критериям. Ход оптимизации приведен в табл. 2 и на рис. 7.

Результатом оптимизации являются следующие значения параметров: A=500, B=1000, C=100, D=200, которые позволяют получить длину маршрута в 303 единицы расстояния, что в 1.43 раза меньше исходной длины. Результат расчета задачи после второго этапа метаоптимизации показан на рис. 8.

Таблица 2. Последовательная метаоптимизация по весовым критериям

Итерация	Весовые коэффициенты				Длина маршрута, единицы расстояния (по 250 итерациям)
	A	B	C	D	
1	100	500	200	500	585
2	500	500	200	500	435
3	1000	500	200	500	450
4	2000	500	200	500	484
5	5000	500	200	500	594
6	500	250	200	500	491
7	500	500	200	500	435
8	500	750	200	500	392
9	500	1000	200	500	340
10	500	2000	200	500	393
11	500	5000	200	500	621
12	500	1000	10	500	391
13	500	1000	100	500	334
14	500	1000	200	500	340
15	500	1000	500	500	398
16	500	1000	1000	500	450
17	500	1000	100	100	347
18	500	1000	100	200	303
19	500	1000	100	300	318
20	500	1000	100	500	334
21	500	1000	100	1000	671
22	500	1000	100	2000	804

Этап 3. Заключительным этапом является повторный подбор параметра порогового уровня потенциала. Результаты подбора представлены на рис. 9.

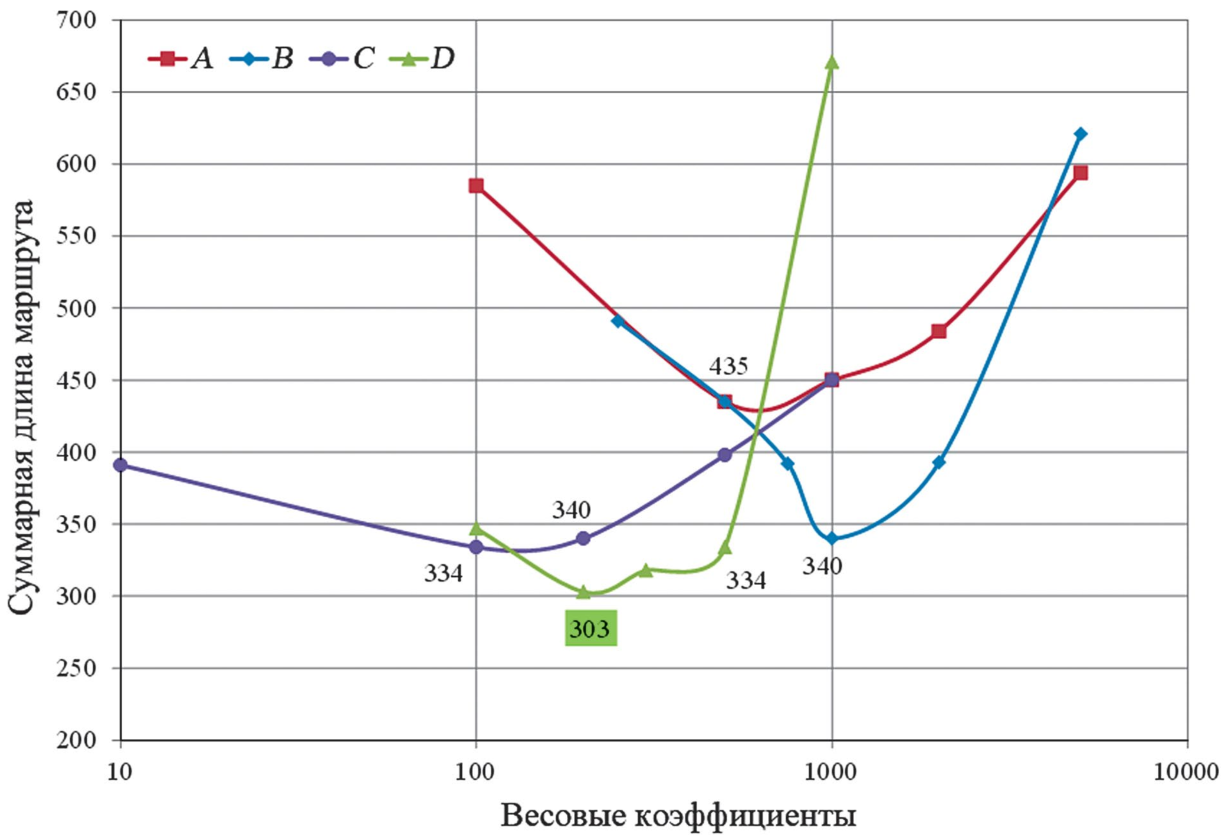


Рис. 7. Метаоптимизация суммарной длины маршрута по весовым коэффициентам (250 запусков нейросети для каждой точки)

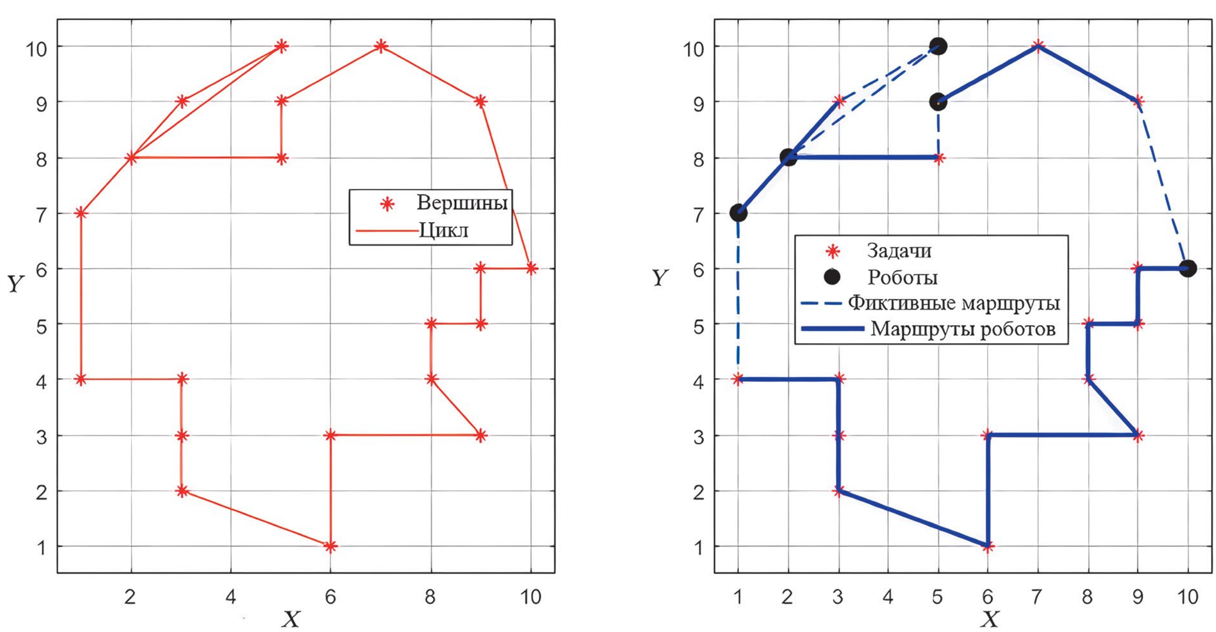


Рис. 8. Тестовая задача и ее решение после этапа 2 метаоптимизации

Подбор уровня потенциала позволил снизить длину маршрута до 250 единиц расстояния. Результат решения тестовой задачи для этапа 3 рассмотрен на рис. 10. Как видно из рисунка, получено решение, которое наиболее оптимально.

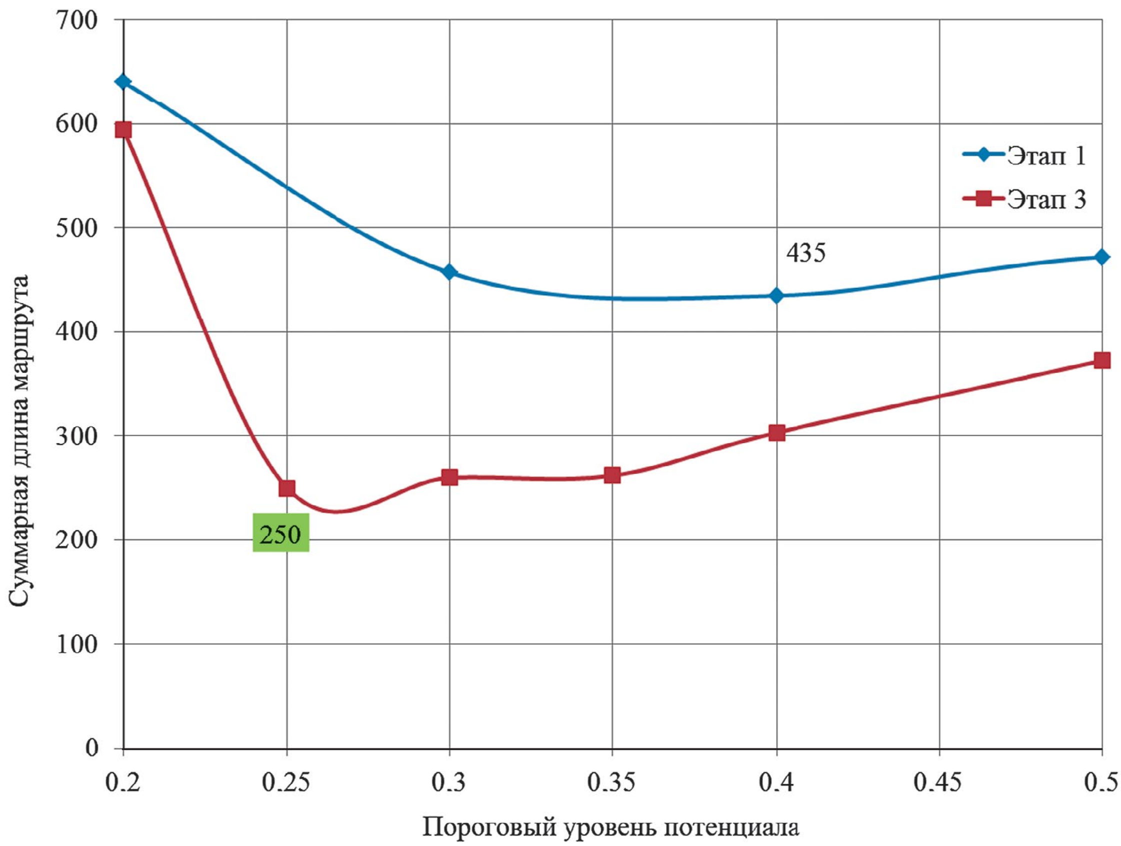


Рис. 9. Зависимость минимальной длины маршрута от порогового уровня потенциала на этапе 3 метаоптимизации (250 запусков нейросети для каждой точки)

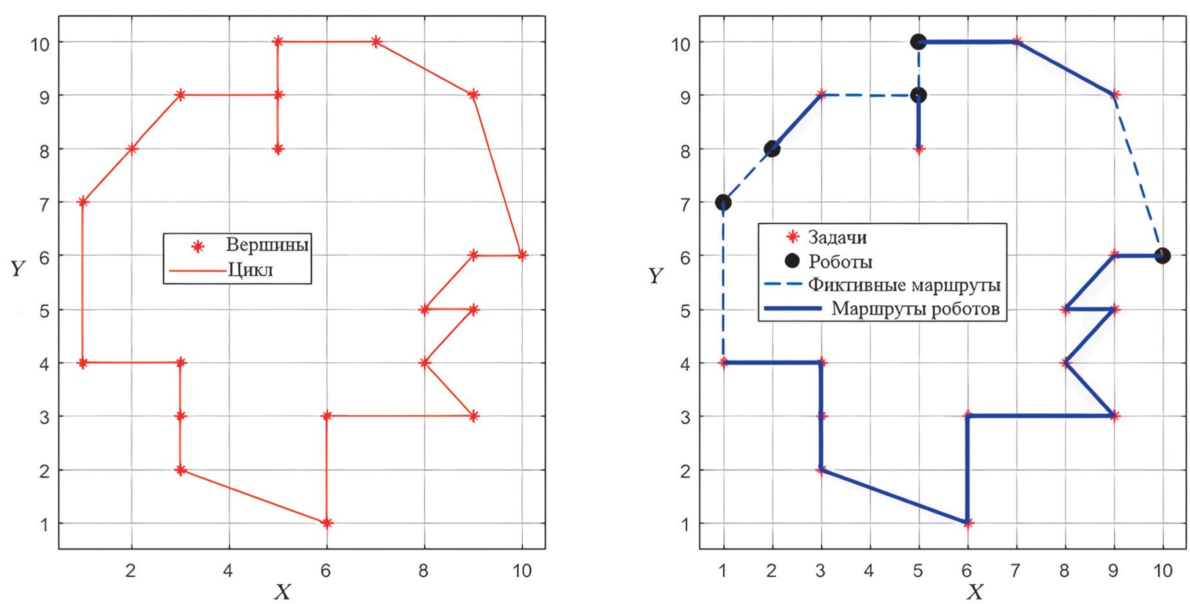


Рис. 10. Тестовая задача и ее решение после этапа 3 метаоптимизации

Дополнительно приведем решение нескольких случайных задач такой же размерности (рис. 11).

Как видно из представленных результатов, после настройки параметров алгоритма сетевая модель позволяет находить близкое к оптимальному решение для случайного набора исходных условий задачи распределения между мобильными роботами. Во всех рассмотренных примерах задания на рабочем поле достаточно равномерно распределены между мобильными роботами, а используемый критерий оптимальности позволяет найти минимальный по длине маршрут движения каждым из роботов.

Таким образом, на широком наборе тестовых конфигураций моделей рабочего пространства проведена апробация предложенного аппарата нейронных сетей, подтверждающая его адекватность, применительно к решению оптимизационной задачи распределения заданий в группе роботов.

6. Результаты сравнения нейросетевого алгоритма с другими эвристическими алгоритмами оптимизации. Проведем сравнительный анализ эффективности разработанного нейросетевого алгоритма (НА) в сравнении с другими эвристическими методами оптимизации: генети-

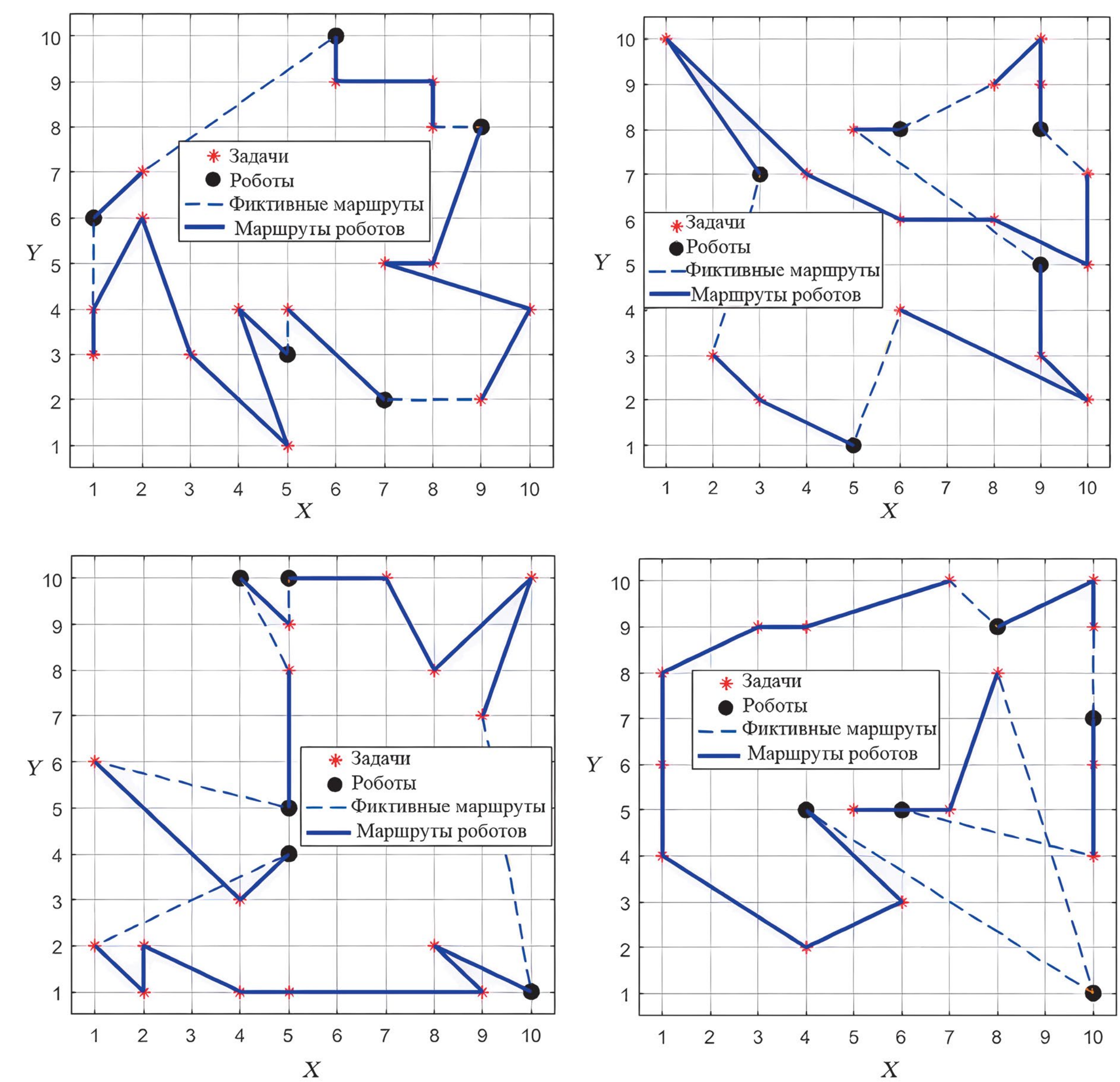


Рис. 11. Примеры решения тестовых задач модифицированной нейросетью при различных начальных условиях (N=20)

Таблица 3. Типы полигона для решения задачи оптимизации

Тип полигона	Число роботов	Число заданий	Размер поля	Число полигонов
1	2	8	5x5	20
2	5	20	10x10	20
3	5	50	10x10	20
4	10	50	20x20	20
5	10	90	20x20	20

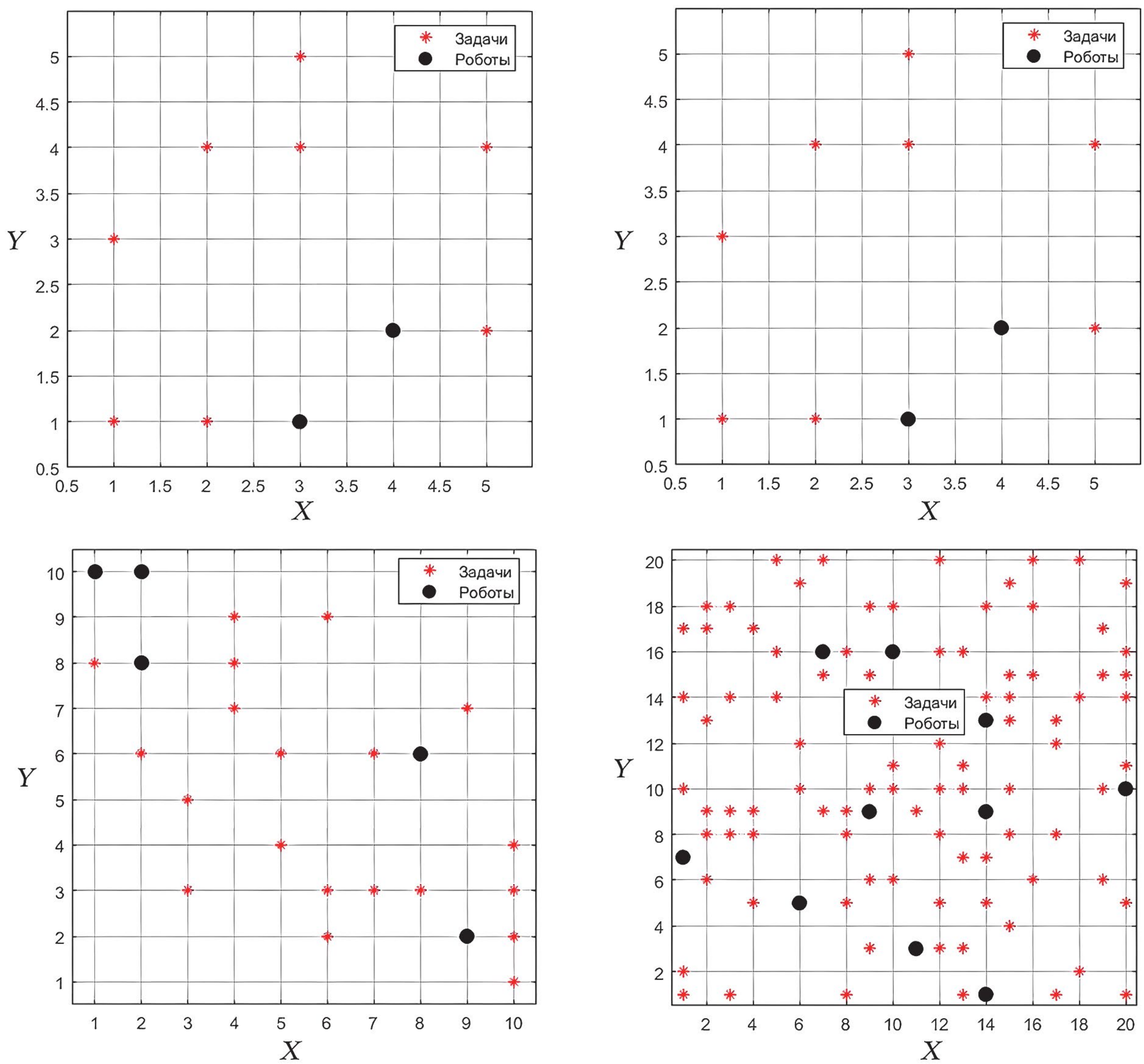


Рис. 12. Примеры полигонов типов 1, 2, 3, 4, 5

ческим алгоритмом (ГА) [21] и муравьиным алгоритмом (МА) [13]. Для каждого алгоритма выполнены адаптация под решаемую задачу и реализация в виде вычислительных моделей. Из-за разной сложности трех алгоритмов принято решение сравнить три модели в процессе однопараметрической оптимизации с поиском минимума функции евклидового расстояния по формуле (1.2) при фиксированном числе итераций (эпох) запуска алгоритма.

Предлагается провести серию вычислительных экспериментов на случайно сгенерированных полигонах. Под полигоном понимается рабочее поле заданных размеров с размещенным

Таблица 4. Результаты экспериментов для тестовых полигонов (500 эпох каждого алгоритма)

Тип полигона	Алгоритм	Среднее время расчета, с	Средняя погрешность, %	Доля лучших решений, %
1	ГА	12.1	1.8	45
	МА	24.7	0.6	80
	НА	71.1	3.5	50
2	ГА	14.5	92.0	0
	МА	26.4	0.0	100
	НА	1076	27.7	0
3	ГА	17.2	230	0
	МА	28.9	0	100
	НА	9961	45	0
4	ГА	21.8	305	0
	МА	30.6	0	100
	НА	Время расчета неприемлемо		
5	ГА	26.1	436	0
	МА	37.6	0	100
	НА	Время расчета неприемлемо		

на нем определенным числом роботов и заданий. Всего предлагается использовать 100 различных полигонов (5 типов по 20 версий в каждом). Между собой типы полигонов отличаются размером рабочего поля, числом роботов и числом заданий (табл. 3).

Примеры сгенерированных полигонов типов 1, 2, 4 и 5 представлены на рис. 12.

Для каждого полигона решается задача поиска квазиоптимального маршрута с точки зрения минимизации функции (1.2) тремя исследуемыми на эффективность алгоритмами. Максимальное число итераций (эпох, генераций, запусков) зафиксировано на уровне 500 для каждого алгоритма.

Результаты сравнительного эксперимента для всех типов полигонов сведены в табл. 4. Следует отметить, что НА использовался только на трех первых типах полигонов. На типе 4 и 5 полигонов ввиду большой размерности задачи время расчета с помощью нейросети превысило 1 ч, что неприемлемо при стандартном требовании к оперативности получения решения исходной задачи.

Представленные результаты эксперимента, оценка по уровню оптимизации (поиск пути с минимальной суммарной длиной маршрута группы роботов) позволили выделить наиболее эффективный алгоритм. Применение МА позволяет за приемлемое время получить решение, которое эффективнее (от 3 до 85%) решений, найденных с помощью НА и ГА. Показано, что НА и ГА при действующем ограничении на число эпох и низкой размерности задачи (порядка 10 объектов) позволяют найти лучшие решения, чем МА в 15–30% экспериментах. При высокой размерности задачи (25 объектов и более) МА в свою очередь обеспечивает поиск более эффективных решений, которые на 20–85% лучше (минимальная длина маршрута) решений, предлагаемых НА и ГА. Следует также отметить, что время расчета с помощью МА остается низким и стабильным для всех групп полигонов.

Таким образом, по результатам сравнения рассмотренных эвристических методов можно сделать вывод, что применение НА эффективно для задач распределения, поставленных для малых размерностей, с числом роботов в группе и заданий на рабочем поле не более 10. Для более сложных ситуаций должна быть проведена дальнейшая оптимизация процесса обучения нейронной сети, в первую очередь уменьшение размерности входных данных, количества нейронов в сети, одновременно с использованием аппроксимации матрицы весов A, B, C, D и более эффективных методов оптимизации, например стохастического градиентного спуска.

Заключение. Показано решение задачи построения стратегии управления группой мобильных роботов при выполнении произвольного числа заданий с помощью нейросети Хопфилда. Решение получено путем преобразования поставленной задачи к TSP-задаче, для чего введены фиктивные переходы между вершинами графа (заданиями и роботами на рабочем поле), а также между точками расположения роботов с нулевым весом.

Представлены результаты моделирования. В рассмотренном частном случае задачи с низкой размерностью (N=6) близкое к оптимальному решение было получено без настройки свободных параметров сети. Для задач большей размерности (N=20) показано, что существенное влияние как на результат решения, так и на время расчета оказывает выбор свободных параметров. Проведена оценка влияния основных параметров нейросети на качество и скорость решения оптимизационной задачи.

По результатам сравнения различных эвристических алгоритмов (НА, ГА и МА) показано, что НА может быть эффективно применен в задачах распределения с ограничениями по числу роботов в группе и заданий на рабочем поле ($N \leqslant 10$).

В планах дальнейших исследований значится проведение модификации нейросети Хопфилда, которая будет включать синтез алгоритма оптимизации процесса обучения нейросети при расширении количества критериев, используемых для поиска оптимального распределения задач для гетерогенной группы мобильных роботов: скорости движения, энергопотребление каждого робота, энергоемкость отдельных заданий и другие значимые характеристики роботов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Барсуков Д.А., Волосатова Т.М.* Создание робота-ищейки // Мехатроника, автоматика и робототехника. 2019. № 3. С. 6–9.
2. *Батанов А.Ф., Мингалеев С.Г., Очкин И.В.* Робототехнические комплексы в аэромобильных группировках МЧС России // Технологии гражданской безопасности. 2019. Т. 16. № 2 (60). С. 60–69.
3. *Иванов Д.Я.* Распределение ролей в коалициях роботов при ограниченных коммуникациях на основе роевого взаимодействия // Управление большими системами. 2019. № 78. С. 23–45.
4. *Kalyaev I., Kapustyan S., Ivanov D. et al.* A Novel Method for Distribution of Goals Among UAVs for Oil Field Monitoring // IEEE 6th ICIEVISCMHT. Himeji, Japan, 2017. P. 1–4. Doi: 10.1109/ICIEV.2017.8338554.
5. *Гречушкин И.В., Савин В.И.* Применение наземных робототехнических комплексов для проведения погрузочно-разгрузочных и транспортно-складских работ // Научные проблемы материально-технического обеспечения Вооруженных Сил Российской Федерации. 2019. № 3(13). С. 103–116.
6. *Casbeer D.W., Beard R.W., McLain T.W. et al.* Forest Fire Monitoring with Multiple Small UAVs // Proc. American Control Conference. Portland, USA, 2005. P. 3530–3535.
7. *Khamis A., Hussein A., Elmogy A.* Multi-robot Task Allocation: A Review of the State-of-the-Art // Cooperative Robots and Sensor Networks. 2015. V. 604. Doi: 10.1007/978-3-319-18299-5_2.
8. *Ziemke T.* Adaptive Behavior in Autonomous Agents // Presence. 2003. № 7(6). P. 564–587.
9. *Kruglikov S.V., Kruglikov A.S.* An A Priori Planning of Joint Motions for USV as a Problem of Guaranteed Control/estimation // Applied Mechanics and Materials. TransTech Publications. Switzerland, 2014. P. 1110–1113.
10. *Ivic S., Crnkovic B., Mezic I.* Ergodicity - based Cooperative Multiagent Area Coverage Via a Potential Field // IEEE Transactions on Cybernetics. 2016. P. 1–11.
11. *Renzaglia A., Doitsidis L., Martinelli A.* Cognitive-based Adaptive Control for Cooperative Multi-robot Coverage // IEEE Intern. Conf. on Robotics and Intelligent System (IROS). Taipei, Taiwan, 2010. P. 3314-3320. Doi: 10.1109/IROS.2010.5649249.
12. *Даринцев О.В., Мигранов А.Б.* Аналитический обзор подходов к распределению задач в группах мобильных роботов на основе технологий мягких вычислений // Информатика и автоматизация. 2022. Вып. 21. Т. 4. С. 729–757. Doi: 10.15622/ia.21.4.4.
13. *Migranov A.B., Darintsev O.V.* Choosing a Swarm Algorithm to Synthesis an Optimal Mobile Robot Team Control Strategy // 2020 Intern. Multi-Conf. on Industrial Engineering and Modern Technologies. Vladivostok, Russia, 2020. P. 1–5. Doi: 10.1109/FarEastCon50210.2020.9271639.
14. *Лоскутов А.И., Горбулин В.И., Карпушев С.И., Ряхова Е.А.* Решение задачи о ранце на основе динамической нейронной сети Хопфилда // Нелинейный мир. 2019. Т. 17. № 3. С. 25–35.
15. *Хайкин С.* Нейронные сети. Полный курс. М.: Вильямс, 2016. 1104 с.
16. *Музычин В.В., Мациевский С.В.* Исследование возможности использования рекуррентной нейронной сети Хопфилда для решения задачи коммивояжера // Современная наука: актуальные проблемы теории и практики. Сер.: Естественные и технические науки. 2020. № 5. С. 93–99.
17. *Hopfield J.J., Tank D.W.* Neural Computation of Decisions in Optimization Problems // Biological Cybernetics. 1985. V. 52. P. 141–152. Doi: 10.1007/BF00339943.

18. *Кононов А.А.* Использование метода нейронных сетей Хопфилда для решения задачи маршрутизации в сети // Московский экономический журнал. 2019. № 9. С. 74.
19. *Darintsev O.V., Migranov A.B.* Using the Hopfield Neural Network to Select a Behaviour Strategy for the Group of Mobile Robots // IOP Publishing. J. Phys.: Conf. 2021. Ser. 2096 012086. Doi: 10.1088/1742-6596/2096/1/012086.
20. *Тархов Д.А.* Нейронные сети. Модели и алгоритмы. М.: Радиотехника, 2005. 256 с.
21. *Migranov A.B., Darintsev O.V.* The Use of Genetic Algorithms for Distribution of Tasks in Groups of Mobile Robots with Minimization of Energy Consumption // Intern. Multi-Conf. on Industrial Engineering and Modern Technologies. Vladivostok, Russia, 2019. P. 1–6.