

===== УПРАВЛЕНИЕ В ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИСТЕМАХ =====

УДК 681.513.54:623.451

**СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ
ОСЕСИММЕТРИЧНЫМ ВРАЩАЮЩИМСЯ
ЛЕТАТЕЛЬНЫМ АППАРАТОМ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ
МОДЕЛИ СПИРАЛЬНОГО ПРОГНОЗА**

© 2025 г. Е. А. Знаменский^a, *, Д. С. Кабанов^a, **, С. А. Кабанов^a, ***,
Е. Н. Никулин^a, ****

^aБГТУ “ВОЕНМЕХ” им. Д.Ф. Устинова, Санкт-Петербург, Россия

*e-mail: eugenznam@mail.ru

**e-mail: kabanovds@mail.ru

***e-mail: kaba-sa@mail.ru

****e-mail: yevgeniy.nikulin.47@mail.ru

Поступила в редакцию 25.12.2023 г.

После доработки 15.09.2024 г.

Принята к публикации 16.10.2024 г.

Представлены математические модели динамики стабилизируемого вращением летательного аппарата. Разработан алгоритм оптимального управления по критерию А.А. Красовского таким аппаратом в реальном времени движения с моделью спирального прогноза в сочетании с пропорционально-интегрально-дифференциальным регулятором. Приведены результаты численного моделирования, показывающие применимость данного подхода к рассмотренному классу летательных аппаратов.

Ключевые слова: математическая модель, осесимметричный вращающийся летательный аппарат, оптимальное управление, спиральный прогноз

DOI: 10.31857/S0002338825010027 EDN: AGSIDW

**SYNTHESIS OF OPTIMAL CONTROL OF AN
AXISYMMETRICAL ROTATING AIR-CRAFT
WITH USING A SPIRAL FORECAST MODEL**

E. A. Znamenskiy^a, *, D. S. Kabanov^a, **, S. A. Kabanov^a, ***,
E. N. Nikulin^a, ****

^aBGTU “VOENMEH” named after. D.F. Ustinova, St. Petersburg, Russia

*e-mail: eugenznam@mail.ru

**e-mail: kabanovds@mail.ru

***e-mail: kaba-sa@mail.ru

****e-mail: yevgeniy.nikulin.47@mail.ru

The article presents mathematical models of the dynamics of an aircraft stabilized by rotation. An optimal control algorithm has been developed according to the A. A. criterion. Krasovsky with such a realtime motion apparatus using a spiral forecast model in combination with a PID controller. The results of numerical simulation are presented, showing the applicability of the approach used to the considered class of aircraft.

Keywords: mathematical model, axisymmetric rotating aircraft, optimal control, spiral forecast

Введение. Атмосфера оказывает существенное влияние на сельскохозяйственную деятельность человека. Одно из наиболее опасных явлений погоды – град, который уничтожает овощные и садовые культуры, виноград, побеги хлопчатника и др. Нередко от него погибают

домашние птицы и мелкий рогатый скот. Для борьбы с градообразующими кучево-дождовыми облаками применяются специальные летательные аппараты (ЛА), распыляющие реагент (PbJ_2 , ArJ), который вызывает кристаллизацию переохлажденных водяных капель. Занос реагента осуществляется в крупнокапельную зону, где происходит интенсивный рост градин [1]. Исходные данные для пусков ЛА готовятся по показаниям метеорологического локатора, например МРЛ-5 [2], и используются для выбора точек выброса реагента.

Со второй половины 50-х гг. XX в. для борьбы с градом в нашей стране, наряду с другими комплексами, применяются противоградовые ЛА серии "Эльбрус" [3], представляющие собой осесимметричные неуправляемые быстровращающиеся ЛА с активным стартом.

Существенное влияние на эффективность борьбы с градообразованием оказывает точное внесение реагента в крупнокапельную область облака, что в случае ее значительной величины требует рационального расположения точек выброса реагента внутри нее. Выведение неуправляемого ЛА в заданную точку выброса реагента происходит с ошибкой, что увеличивает время воздействия и расход ЛА.

Для управления быстровращающимся ЛА можно использовать управляющую насадку на головную часть, оснащенную вращающимся блоком рулей с постоянным углом установки [4]. Общая схема применения ЛА с управляющей насадкой подразумевает перед пуском ввод данных о точке выброса реагента при помощи специального установщика. На траектории ЛА получает информацию о своем местоположении от космической радионавигационной системы (КРНС) и производит прогноз траектории. В зависимости от величины промаха спрогнозированной траектории относительно точки выброса реагента вырабатывается управляющая команда. Управление заключается в установке необходимого для устранения промаха углового положения блока рулей и сообщения последнему угловой скорости, равной по модулю и противоположной по направлению угловой скорости вращения ЛА. Таким образом, положение рулевых лопастей в полусвязанной с ЛА системе координат будет оставаться неизменным и последний будет совершать маневр. Вопросам движения ЛА с подобными насадками посвящен ряд публикаций в зарубежной печати [5–9], однако в них не затрагивается вопрос оптимального управления. В работе [10] рассмотрено приложение аналитического решения задачи о вращательном движении оси ЛА к проектированию систем коррекции, а в [11] исследован вопрос о движении ЛА с системой коррекции с одной степенью свободы и получены оценки областей достижимости.

В этой связи синтез оптимального управления вращающимися ЛА является актуальной и востребованной практикой научной задачей. Теория оптимального управления редко применяется на практике. И это связано не только с объемом вычислений, сколько с необходимости выбора начального приближения, обеспечивающего сходимость итерационных процедур нахождения управления. Отказ от оптимизации приводит к понижению роли выбора управления и использованию субъективных решений. Как правило, требуется найти управление сложной системой, да еще в реальном времени. Непосредственное применение теории и ее алгоритмов в реальном времени затруднительно. Однако к настоящему времени имеются обнадеживающие решения, позволяющие приблизить к повседневной практике идеи оптимизации. Это введение в рассмотрение академиком А. А. Красовским полуопределенного функционала обобщенной работы и использование для вычисления управления прогнозирующих моделей [12]. В результате двухточечная краевая задача сводится к двум задачам Коши (в прямом и обратном времени соответственно). Алгоритм реализуем в реальном времени. Простота реализации сопровождается, правда, потерей в терминальной точности, поскольку она определяется значениями весовых коэффициентов в целевом функционале. В ряде случаев удается повысить точность путем рассмотрения иерархии критерии А. А. Красовского и на основе упрощения полученного решения применить алгоритм последовательной оптимизации [13, 14]. Другим подходом является рассмотрение вспомогательной задачи оптимизации, облегчающей решение основной исходной задачи. В этом случае из решения основной задачи по принципу максимума формируется структура управления, коррекция параметров которой может производиться, в частности, из условия минимума как функционала с дополнительной интегральной частью, включающей затраты на управление, с применением принципа максимума, так и критерия А. А. Красовского с использованием алгоритма с прогнозирующей моделью. "Коль скоро структура оптимального управления тем или иным способом угадана, не так трудно установить, как правило, что она действительно такова", – писал Р. Беллман [15]. Причем структура может быть выбрана с избытком, тогда в процессе вычислений происходит ее упрощение [16]. Этот алгоритм с успехом применялся для сложных задач управления: мостовым краном, автомобилем [17], автоматическим подводным аппаратом при наличии участка особого управления [18], для раскрытия трансформируемой антенны космического

базирования, включающего разведение спиц, их выдвижение и натяжение фронтальной поверхности радиоотражающего сетеполотна с учетом колебательных процессов [19] и др. Была доказана теорема об эквивалентности основной и вспомогательной задач оптимизации [20].

Теперь о сложности реальных процессов по сравнению с их математическим описанием. Для управления сложными процессами целесообразно использовать самоорганизующиеся оптимальные регуляторы с экстраполяцией (СОРЭ) А.А. Красовского [21, 22]. СОРЭ не требуют знания математической модели объекта, по результатам наблюдений сами формируют информационную модель. Такие алгоритмы апробированы для ряда технических объектов, в том числе для ЛА [13, 23], ускорителя электронов на основе высоковольтного тлеющего разряда [24], автомобиля [17] и др., а также для социально-экономических систем, гипотетически описываемых производственной функцией, моделью развития экономики В. В. Леонтьева [25], расчета стоимости опциона на покупку (продажу) акций [17], поддержки управленческих решений вузовской администрации [25]. Исследования показали, что СОРЭ можно использовать как непосредственно для управления процессом, так и для стабилизации его динамики на оптимальной траектории его математической модели, а также как компьютерные тренажеры при подготовке администраторов и в качестве компьютерного помощника в процессе принятия решения по управлению.

В статье будет изучена возможность применения модели спирального прогноза [26] для формирования оптимальной траектории ЛА, стабилизируемого вращением. С использованием такой модели в работе [13] решена задача управления спускаемым аппаратом по алгоритму последовательной оптимизации по иерархии из двух целевых функционалов.

1. Постановка задачи. Стабилизированный вращением ЛА является сильным волчком, который реагирует на прикладываемые к нему управляющие силы и моменты нутационно-прецессионным движением, вследствие чего формируется дополнительный импульс аэродинамических сил и моментов, а итоговое движение ЛА – результат совместного действия управляющих и дополнительных аэродинамических сил и моментов. Указанная особенность требует разработки особого подхода к синтезу оптимального управления с минимизацией затрат.

Далее исследуется управляемое пространственное движение осесимметричного вращающегося ЛА постоянной массы. Рассматривается терминалная задача перевода ЛА из произвольно заданного начального состояния в фиксированное конечное состояние.

Уравнения поступательного движения запишем в проекциях на оси траекторной системы координат (СК), а уравнения вращательного движения, чтобы избежать переменности моментов инерции, на оси полусвязанной СК [27–29]:

$$\begin{aligned}
 \dot{V} &= g(n_x - \sin \theta), \\
 \dot{\theta} &= \frac{g}{V}(n_y - \cos \theta), \\
 \dot{\Psi} &= -\frac{g}{V \cos \theta} n_z, \\
 \dot{\omega}_x &= \frac{1}{I_x} \left[M_{x_{pc}} - \omega_{y_{pc}} \omega_{z_{pc}} (I_z - I_y) \right], \\
 \dot{\omega}_{y_{pc}} &= \frac{1}{I_y} \left[M_{y_{pc}} - \omega_{z_{pc}} \omega_x (I_x - I_z) - I_z \omega_{z_{pc}} (\omega_x - \omega_{y_{pc}} \operatorname{tg} \vartheta) \right], \\
 \dot{\omega}_{z_{pc}} &= \frac{1}{I_z} \left[M_{z_{pc}} - \omega_{y_{pc}} \omega_x (I_y - I_x) + I_y \omega_{y_{pc}} (\omega_x - \omega_{y_{pc}} \operatorname{tg} \vartheta) \right], \\
 \dot{\gamma} &= \omega_x - \omega_{y_{pc}} \operatorname{tg} \vartheta, \\
 \dot{\psi} &= \omega_{y_{pc}} / \cos \vartheta, \\
 \dot{\vartheta} &= \omega_{z_{pc}}, \\
 \dot{x} &= V \cos \theta \cos \Psi,
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

$$\dot{y} = V \sin \theta,$$

$$\dot{z} = -V \cos \theta \sin \Psi,$$

$$\begin{aligned} n_x &= A_{x\text{T}} / (mg), & n_y &= A_{y\text{T}} / (mg), & n_z &= A_{z\text{T}} / (mg), & A_{x\text{T}} &= (-c_x(M, \delta) - c_{xp}(M)S_p / S)qS, \\ A_{y\text{T}} &= (c_y^\delta(M, \delta)\alpha + c_n^\delta(M)\delta_p \sin \gamma_p S_p / S)qS, & A_{z\text{T}} &= (-c_y^\delta(M, \delta)\beta - c_n^\delta(M)\delta_p \cos \gamma_p S_p / S)qS, \\ M_{x\text{pc}} &= \left(m_x^\omega(M) \frac{(\omega_x - \omega_{y\text{pc}} \tan \vartheta)L}{V} + m_x(M)S_p / S \right)qSL, \\ M_{y\text{pc}} &= \left(m_z^\delta(M, \delta)\beta + m_z^{\omega_z}(M, \delta) \frac{\omega_{y\text{pc}}L}{V} + c_n^\delta(M)\delta_p \frac{l_p}{L} \frac{S_p}{S} \cos \gamma_p \right)qSL, \\ M_{z\text{pc}} &= \left(-m_z^\delta(M, \delta)\alpha + m_z^{\omega_z}(M, \delta) \frac{\omega_{z\text{pc}}L}{V} + c_n^\delta(M)\delta_p \frac{l_p}{L} \frac{S_p}{S} \sin \gamma_p \right)qSL. \end{aligned}$$

Здесь $n = (n_x \ n_y \ n_z)^T$ – вектор перегрузок с проекциями на оси траекторной СК, m – масса ЛА, I_x , I_y , I_z – осевой и экваториальные моменты инерции ЛА; $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$ – модуль вектора скорости с проекциями на оси связанной СК, θ – угол наклона траектории; γ – угол пути, $A_{\text{T}} = (A_{x\text{T}} \ A_{y\text{T}} \ A_{z\text{T}})^T$ – вектор аэродинамических сил в траекторной системе координат; $M_{\text{pc}} = (M_{x\text{pc}} \ M_{y\text{pc}} \ M_{z\text{pc}})^T$ – вектор аэродинамических моментов в полусвязанной системе координат; g – ускорение силы тяжести; $\omega_{\text{pc}} = (\omega_{y\text{pc}} \tan \vartheta \ \omega_{y\text{pc}} \ \omega_{z\text{pc}})^T$ – вектор угловой скорости вращения в полусвязанной системе координат; ψ , ϑ , γ – углы рыскания, тангажа и крена ЛА соответственно; δ – угол нутации ЛА, x , y , z – координаты центра масс ЛА в стартовой системе координат, радиус Земли принимается равным радиусу сферы, аппроксимирующему геоид, $R_3 = 6356766$ м; $q = \rho V^2 / 2$ – скоростной напор, M – число Маха, ρ – плотность воздуха, S – площадь миделя, S_p – площадь рулевой поверхности, L – длина ЛА; аэродинамические коэффициенты: c_x – лобового сопротивления, c_y^δ и c_n^δ – производных коэффициентов подъемной силы и нормальной силы рулевой поверхности по углу атаки руля; m_z^δ и $m_z^{\omega_z}$ – производная коэффициента опрокидывающего момента по углу нутации и коэффициент демпфирующего момента. Из главных векторов аэродинамических сил и моментов исключены сила и момент Магнуса, поскольку их вклад в движение ЛА не превышает ошибок, вызванных приближенным определением основных аэродинамических коэффициентов. Углы атаки α и скольжения β , в силу их малости для устойчивых быстровращающихся ЛА, а также малости углов пути и рыскания, определяются выражениями: $\alpha = \vartheta - \theta$, $\beta = (\psi - \Psi) / \cos \theta$.

Блок рулей характеризуется площадью рулевой поверхности S_p , продольной координатой, отсчитываемой от центра масс ЛА l_p , и углом установки рулей δ_p . За управление принимается угол наклона блока рулей γ_p от вертикальной плоскости (рис. 1), принимающий значения от 0 до 2π .

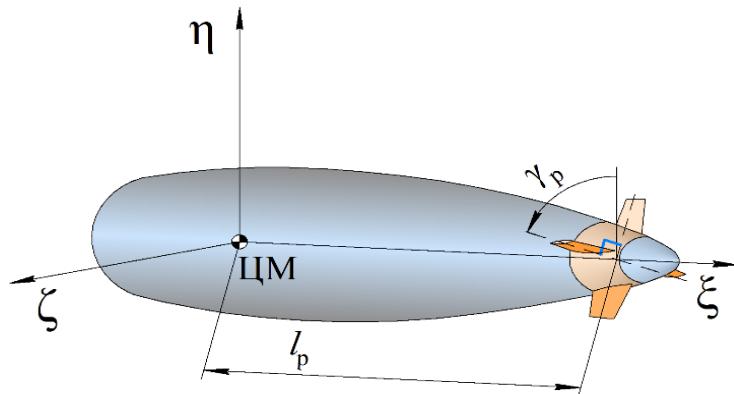


Рис. 1. Схема ЛА с системой коррекции вращающимся блоком рулей. ЦМ – центр масс.

Система уравнений (1.1) может быть получена из уравнений (4.56)–(4.64) из работы [28], если положить в них массу ЛА постоянной, Землю в пределах траектории плоской и не вращающейся, а угол крена принять равным нулю.

Блок рулей кинематически связан по вращению с корпусом ЛА по осевому вращению и является ротором бесколлекторного электродвигателя постоянного тока. На участке коррекции, имея заданный системой управления угол γ_p , по данным датчиков угловой скорости и положения блока рулей, управляющий контроллер электродвигателя изменяет напряжение питания таким образом, чтобы угловая скорость вращения блока рулей равнялась угловой скорости вращения ЛА, а угол наклона блока рулей соответствовал бы заданному. Равенство угловых скоростей вращения ЛА и блока рулей приводит к практически неизменному положению последнего в пространстве.

Таким образом, состояние ЛА описывается 12 переменными, из которых система управления может оказывать целенаправленное влияние на линейные и угловые ускорения, причем ускорения вдоль оси X появляются на участке управления, зависят только от факта управления и не зависят от других параметров, а линейные и угловые ускорения относительно полусвязанных осей Y и Z оказываются функционально связанными величинами, т.е. некоторому линейному ускорению однозначно соответствует угловое.

При полете малого осесимметричного вращающегося ЛА, стремящегося достичь зоны градообразования внутри облака, надо использовать алгоритмы, формирующие управление в реальном времени. Поскольку условия применения таких ЛА изменчивы в зависимости от явлений погоды, то реализация программных траекторий не продуктивна. Задачу управления можно решать по-разному. В работе [30] с помощью концепции обратных задач динамики по заданной достигающей цели траектории полета ЛА (как в вертикальной плоскости, так и в пространстве) в виде степенного полинома от продольной дальности, коэффициенты которого определяются из решения краевой задачи, вычисляется значение перегрузки в текущий момент времени. Это решение затруднительно использовать при необходимости ситуационного облета запретной области. Уравнения (1.1) примем в качестве имитационной модели.

В данной статье предложено формировать оптимальное управление с использованием алгоритма спирального прогноза [26], который допускает реализацию в реальном времени.

2. Основной результат. Для целей управления земную нормальную систему координат будем считать инерциальной и рассмотрим уравнения динамики ЛА в связанных осях [26]:

$$\dot{v} = \Omega v + g(n - \varepsilon_2), \quad (2.1)$$

$$\dot{\varepsilon}^T = \Omega \varepsilon^T, \quad (2.2)$$

$$(\dot{\phi} \ \dot{h} \ \dot{\lambda})^T = d^* \varepsilon v,$$

где

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y \\ \omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 0 \end{bmatrix}, \quad \varepsilon^T = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{21} & \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{32} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix},$$

$$d^* = \text{diag}\left(\frac{1}{R_3 + h}, 1, \frac{1}{(R_3 + h)\cos\phi}\right), \quad \varepsilon_2 = (\varepsilon_{21} \ \varepsilon_{22} \ \varepsilon_{23})^T,$$

$$\varepsilon_{11} = \cos\psi \cos\vartheta, \quad \varepsilon_{21} = \sin\psi, \quad \varepsilon_{31} = -\sin\psi \cos\vartheta,$$

$$\varepsilon_{12} = \sin\psi \sin\gamma - \cos\psi \sin\vartheta \cos\gamma, \quad \varepsilon_{22} = \cos\vartheta \cos\gamma,$$

$$\varepsilon_{32} = \cos\psi \sin\gamma + \sin\psi \sin\vartheta \cos\gamma, \quad \varepsilon_{13} = \sin\psi \cos\gamma + \cos\psi \sin\vartheta \sin\gamma,$$

$$\varepsilon_{23} = -\cos\vartheta \sin\gamma, \quad \varepsilon_{33} = \cos\psi \cos\gamma - \sin\psi \sin\vartheta \sin\gamma,$$

$\varepsilon v = v_g$, $v = (v_x \ v_y \ v_z)^T$ – скорость ЛА с проекциями на оси связанный СК, v_g – скорость ЛА в земной СК, ϕ , λ – широта и долгота ЛА, h – высота полета, R_3 – радиус Земли.

Среди достоинств такой формы описания кинематики углового движения можно отметить отсутствие особых точек, т.е. моделируемые угловые движения не имеют ограничений. Избыточность вычисляемых параметров (девять вместо трех) частично компенсируется, если одну из строк матрицы $\boldsymbol{\varepsilon} = D_{\text{H}}^{\text{CB}}$ определять через алгебраические дополнения.

Управление зададим в виде $\dot{y}_i = u_i$, $i = \overline{1,5}$, $y = (n_x \ n_y \ n_z \ \omega_y \ \omega_z \ t_f)^T$, $\dot{n}_y = u_1$, $\dot{n}_z = u_2$, $\dot{\omega}_y = u_3$, $\dot{\omega}_z = u_4$, $\dot{t}_f = u_5$. Здесь n_x , n_y , n_z – компоненты вектора перегрузки n в связанных осях. Уравнения (2.1), (2.2) имеют аналитическое решение [26, 31].

Задача оптимизации системы (2.1), (2.2) по классическому критерию по принципу максимума с решением двухточечной краевой задачи методом Ньютона продемонстрировала вычислительные затруднения [32], связанные с заданием начальных условий для сопряженных переменных. И хотя удалось выявить локальные зоны сходимости, рекомендовать его для реализации в реальном времени преждевременно, даже с учетом концепции “гибких кинематических траекторий” [33]. Поэтому для разработки алгоритма, реализуемого в реальном времени, рассмотрим целевой функционал в виде критерия Красовского:

$$I = V_f(x, t_f) + \int_{t_0}^{t_f} f_0(x, u, u_o, t) dt, \quad (2.3)$$

где x – n -мерный вектор состояния, u – m -мерный вектор управления, u_o – оптимальное значение вектора u , f_0 , V_f – заданные положительно-определеные функции своих аргументов, имеющие непрерывные частные производные по x , t , а функция f_0 – еще и по u . Примем $V_f(x, t_f) = 0,5(\Delta l_f \ \Delta h_f \ \Delta z_f)^T \rho(\Delta l_f \ \Delta h_f \ \Delta z_f)$, $x_0 = x(t_0)$, $\Delta l_f = l(t_f) - l_f$, $\Delta h_f = h(t_f) - h_f$, $\Delta z_f = z(t_f) - z_f$, $f_0(x, u, t) = Q(x, t) + 0,5(u^T K^{-1} u + u_o^T K^{-1} u_o)$, $K = \text{diag}(k_1^2, k_2^2, \dots, k_5^2)$, $\rho = \text{diag}(\rho_1, \rho_2, \rho_3)$; l_f , h_f , z_f – заданные конечные значения координат точки доставки полезной нагрузки.

В соответствии с алгоритмом с прогнозирующей моделью (на прогнозе $u_i = 0$, $i = \overline{1,5}$) управления формируются в виде $u_i = -k_i^2(\partial V / \partial y_i)$. При $Q(x, t) = 0$ уравнение Ляпунова $\dot{V} = -Q(x, t)$ принимает вид $\dot{V} = 0$ и $\partial V / \partial y_i = \partial V_f / \partial y_i$, отсюда $u_i = -k_i^2(\partial V_f / \partial y_i)$. Учет условий полета на всем интервале оптимизации (ограничения по высоте, перегрузкам, аэродинамическим углам и др.) может осуществляться посредством соответствующего выбора подынтегральной функции $Q(x, t)$. При $Q(x, t) \neq 0$ путем введения дополнительной переменной $\dot{x}_{n+1} = Q(x, t)$ имеем $V_f Q = V_f + x_{n+1}(t_f)$, и задача сводится к предыдущему случаю. Если ограничения действуют на ограниченных временных интервалах (например, включением в $Q(x, t)$ функции штрафа за превышения некоторыми компонентами вектора состояния предельных значений), то приходим к алгоритму с прогнозирующей моделью при нулевом управлении. При этом в прямом времени прогноз производится по аналитическим формулам спирального прогноза, а при численном обратном прогнозировании вдоль модели (2.1), (2.2) добавляются уравнения для сопряженных переменных [34].

Алгоритмы отработки оптимальных траекторий задающих воздействий могут строиться на основе различных систем стабилизации [27]. Если маневрирование ЛА не является интенсивным, то могут применяться оптимальные регуляторы. Для случая быстрых интенсивных маневров можно использовать алгоритмы обратных задач динамики. Продуктивным, особенно при изменении аэродинамических характеристик ЛА в полете, является применение СОРЭ.

Если выбор порядка информационного полинома, формируемого по дискретно получаемым наблюдениям (самоорганизация информационной модели), происходит периодически на заданном интервале времени $[0, t_c]$ (цикле), то необходимая для вычисления управления оценка вектора x состояния внутри этого цикла (в данном случае это вектор выходных параметров и их производных) производится с привлечением текущих измерений с помощью фильтра Калмана. В работе [35]推薦ован выбор соответствующих начальных значений элементов матрицы ковариаций фильтра Калмана, где, в частности, приведены числовые значения этой матрицы при ее порядке от 3 по 7. На борту хранятся в памяти значения элементов ковариационных матриц для разных порядков полиномиальной модели. Это симметричная матрица квазидиагонального вида, диагональные и соседние с ними элементы которой компактно можно представить следующим образом [17]:

$$P_{l-1,l-1} = [(l-i-1)!]^2 C_{2(l-1)}^{2(l-1-i)}, \quad l \geq 1, i = \overline{0, l-1},$$

$$P_{l-1,l-i+1} = -\frac{1}{2}(l-i-1)!(l-i)!C_{2(l-1)}^{2(l-1-i)+1}, \quad l \geq 2, i = \overline{1, l-1},$$

а все остальные элементы равны нулю.

В данной работе для стабилизации в целях упрощения вместо СОРЭ будет применен пропорционально-интегрально-дифференциальный (ПИД) регулятор

$$u = r_1 e + r_2 \int_0^t e d\tau + r_3 \dot{e}.$$

Если решать обратную задачу оптимизации с целью получения целевого функционала для управления в виде ПИД-регулятора, то оказывается, что надо использовать СОРЭ. В работе [36] показано, что ПИД-регулятор является частным случаем СОРЭ. При этом измеряется интеграл

$$z(t) = \int_0^t e d\tau$$

от рассогласования e в трех точках, а информационный полином выбирается без самоорганизации аппроксимирующим в виде параболы. Оптимальное по критерию А.А. Красовского (2.3) ($V_f = 0.5\beta_1 x_1^2(t_c)$, $f_o = 0.5\beta_2 x_1^2$, $t_0 = 0$, $t_f = t_c$, $x_1 = z$) управление формируется регулятором в виде $u = -K p_{l+1}$, где β_1 , β_2 , t_c заданы, а сопряженные переменные определяются в виде

$$p_j = \frac{t_c^{j-1}}{(j-1)!} \sum_{i=0}^l a_i t_c^i \left(\beta_1 + \frac{\beta_2 t_c}{l+i} \right),$$

полученном методом математической индукции [13]. Здесь u – управление, где l – порядок полинома ($l = 2$, так как используется парабола); β_1, β_2, K – весовые коэффициенты в целевом функционале, t_c – интервал оптимизации, a_i , $i = \overline{0,2}$, – коэффициенты полинома $z(t) = a_2 t^2 + a_1 t + a_0$. В этом частном случае структура управления совпадает со структурой ПИД-регулятора, а коэффициенты ПИД-регулятора вычисляются однозначно через коэффициенты функционала и величину интервала оптимизации:

$$r_1 = \frac{1}{24} K \beta_2 t_c^4, \quad r_2 = -K \frac{t_c^2}{2} \left(\beta_1 + \frac{\beta_2 t_c}{3} \right), \quad r_3 = -\frac{1}{120} K \beta_2 t_c^5.$$

3. Моделирование. При моделировании необходимые для определения управления частные производные $\partial V_f / \partial y_i$ в алгоритме со спиральным прогнозом определяются численно, и управления вычисляются в виде $u_i = -k_i^2 (\Delta V_f / \Delta y_i)$, $i = \overline{1,5}$. Приращения Δy принимались такими: $\Delta y = (\Delta n_x \ \Delta n_y \ \Delta n_z \ \Delta \omega_y \ \Delta \omega_z \ \Delta t_f)^T = (0.2 \ 0.2 \ 0.01 \ 0.005 \ 0.1)^T$.

В расчетах для упрощения на вход имитационной модели через инерционное звено подается управление в виде ПД-регулятора (пропорционально-дифференциальный):

$$\gamma_p = k_{p1} \Delta n_y + k_{p2} \Delta n_z + k_{p3} \Delta \omega_y + k_{p4} \Delta \omega_z + k_{p5} \Delta \dot{n}_y + k_{p6} \Delta \dot{n}_z + k_{p7} \Delta \dot{\omega}_y + k_{p8} \Delta \dot{\omega}_z.$$

Здесь $\Delta n_y = n_y - n_{ys}$, $\Delta n_z = n_z - n_{zs}$, $\Delta \omega_y = \omega_y - \omega_{ys}$, $\Delta \omega_z = \omega_z - \omega_{zs}$, $\Delta \dot{n}_y = u_1 - \dot{n}_{ys}$, $\Delta \dot{n}_z = u_2 - \dot{n}_{zs}$, $\Delta \dot{\omega}_y = u_3 - \dot{\omega}_{ys}$, $\Delta \dot{\omega}_z = u_4 - \dot{\omega}_{zs}$, где $\dot{n}_{ys} = [n_{ys}(t + \Delta t) - n_{ys}(t)] / \Delta t$, $\dot{n}_{zs} = [n_{zs}(t + \Delta t) - n_{zs}(t)] / \Delta t$, $\dot{\omega}_{ys} = [\omega_{ys}(t + \Delta t) - \omega_{ys}(t)] / \Delta t$, $\dot{\omega}_{zs} = [\omega_{zs}(t + \Delta t) - \omega_{zs}(t)] / \Delta t$. Проекции перегрузки в алгоритме со спиральным прогнозом рассматриваются в связанных осях, а в имитационной модели – в траекторной СК. Поэтому n (т.е. n_t) надо перевести в n_{cb} с помощью матрицы перехода $n_{cb} = D_{cb}^T n_t$, $D_{cb}^T = D_{cb}^H D_H^T$, $D_{cb}^H = (D_H^C)^T$,

$$n_{cbx} = d_{11} n_x + d_{12} n_y + d_{13} n_z, \quad n_{cby} = d_{21} n_x + d_{22} n_y + d_{23} n_z, \quad ncbz = d_{31} n_x + d_{32} n_y + d_{33} n_z;$$

$$d_{11} = \sin \vartheta \sin \theta + \cos(\psi - \Psi) \cos \vartheta \cos \theta, \quad d_{12} = \sin \vartheta \cos \theta - \cos(\psi - \Psi) \cos \vartheta \sin \theta,$$

$$d_{13} = -\cos \vartheta \sin(\psi - \Psi),$$

$$d_{21} = \cos \gamma \cos \vartheta \sin \theta - \cos(\psi - \Psi) \cos \gamma \sin \vartheta \cos \theta + \sin(\psi - \Psi) \sin \gamma \cos \theta,$$

$$d_{22} = \cos \gamma \cos \vartheta \cos \theta + \cos(\psi - \Psi) \cos \gamma \sin \vartheta \sin \theta - \sin(\psi - \Psi) \sin \gamma \sin \theta,$$

$$d_{23} = \cos(\psi - \Psi) \sin \gamma - \sin(\psi - \Psi) \cos \gamma \sin \nu,$$

$$d_{31} = -\sin \gamma \cos \vartheta \sin \theta + \sin(\psi - \Psi) \cos \gamma \cos \theta + \cos(\psi - \Psi) \sin \gamma \sin \vartheta \cos \theta,$$

$$d_{32} = -\sin \gamma \cos \vartheta \cos \theta - \sin(\psi - \Psi) \cos \gamma \sin \theta - \cos(\psi - \Psi) \sin \gamma \sin \vartheta \sin \theta,$$

$$d_{33} = \cos(\psi - \Psi) \cos \gamma - \sin(\psi - \Psi) \sin \gamma \sin \vartheta$$

$(d_{ij}, i, j = \overline{1, 3}, \text{ -- элементы матрицы } D_{\text{cb}}^T)$. Эти проекции перегрузки отмечены в алгоритме управления подстрочным индексом s .

Проекции угловой скорости в алгоритме со спиральным прогнозом рассматриваются в связанных осях, а в имитационной модели – в полу связанный СК. Поэтому ω_{nc} надо перевести в ω_{cb} (т.е. ω) с помощью матрицы перехода $\omega = D_{\text{cb}}^{\text{nc}} \omega_{\text{nc}}$, $\omega_x = \omega_{\text{nc}x}$, $\omega_y = \cos \gamma \omega_{\text{nc}y} - \sin \gamma \omega_{\text{nc}z}$, $\omega_z = \sin \gamma \omega_{\text{nc}y} + \cos \gamma \omega_{\text{nc}z}$. Здесь $o_{11} = 1$, $o_{12} = 0$, $o_{13} = 0$, $o_{21} = 0$, $o_{22} = \cos \gamma$, $o_{23} = -\sin \gamma$, $o_{31} = 0$, $o_{23} = \sin \gamma$, $o_{33} = \cos \gamma$ ($o_{ij}, i, j = \overline{1, 3}$, – элементы матрицы $D_{\text{cb}}^{\text{nc}}$). Эти проекции угловой скорости отмечены в алгоритме управления подстрочным индексом s .

Успешность решения задачи сильно зависит от малых маневренных возможностей стабилизированного вращением ЛА. Поэтому на носителе перед пуском производится оценка области достижимости путем моделирования динамики имитационной модели при различных углах поворота блока управления ($\gamma_p \in [0, 2\pi]$). При нахождении ЛА в области управляемости можно осуществлять пуск, и алгоритм управления со спиральным прогнозом сформирует оптимальные значения перегрузки и угловой скорости, реализация которых посредством ПИД-регулятора (СОРЭ) обеспечит доставку реагента в досягаемую точку с допустимой точностью.

Решение задачи управления полетом ЛА выполнялось с использованием предложенного алгоритма при следующих начальных условиях: $x = (270 \ 0 \ 1250 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 4000 \ 0)^T$, конечных условиях $x_f = 1900$ м, $y_f = 3000$ м, $z_f = 50$ м, при $d = 0.1$ м, $S = 0.00785$ м², $S_p = 0.0016$ м², $m = 15.5$ кг, $I_x = 0.0208$ кг м², $I_y = I_z = 0.2219$ кг · м², $L = 0.49$ м, $c_x = 0.1486$, $c_{xp} = 0.0219$, $c_n^\delta = 1.8683$, $c_y^\delta = 1.8146$, $m_z^\delta = 0.2647$, $m_z^{\omega z} = 0.0386$, $m_x = 0.0001$, $m_x^{\omega x} = -0.0007$, $l_p = 0.25$ м, $\delta_p = 0.087$. Численное интегрирование уравнений имитационной модели выполнялось методом Эйлера с шагом 0.0001 с при обращении к алгоритму спирального прогноза для получения оптимальных значений перегрузок и угловых скоростей через каждые 100 шагов. Время счета составило 3 с.

Вначале алгоритм спирального прогноза формировал свою траекторию независимо от динамики модели с выдачей значений проекций перегрузки и угловой скорости для ПД-регулятора, с выхода которого поступали значения, усредненные на интервалах в 20 шагов $\gamma_p(t)$, в имитационную модель. Принимались следующие значения параметров критерия оптимальности: $t_f - t_0 = 7$ с, $\rho_1 = 0.02$, $\rho_2 = 0.04$, $\rho_3 = 0.04$, $k_1^2 = 10^{-3}$, $k_2^2 = 10^{-2}$, $k_3^2 = 10^{-4}$, $k_4^2 = 10^{-8}$, $k_5^2 = 10^{-3}$, $k_{p1} = 0.02$, $k_{p2} = 0.2$, $k_{p3} = 0.2$, $k_{p4} = 0.02$, $k_{p5} = 0.02$, $k_{p6} = 0.2$, $k_{p7} = 0.2$, $k_{p8} = 0.02$. На рис. 2 представлен график $t_f(t)$, характеризующий изменение величины интервала оптимизации для траектории, формируемой с помощью алгоритма со спиральным прогнозом. При

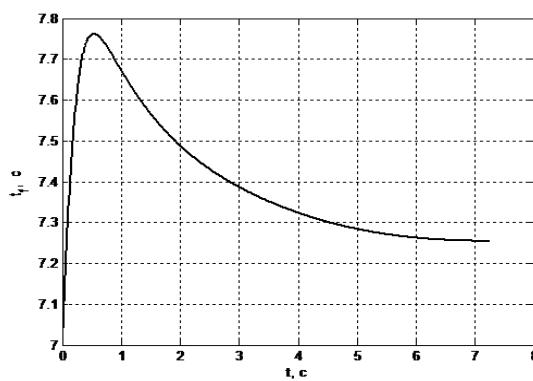
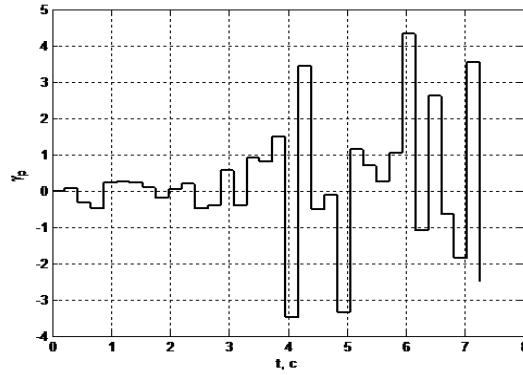


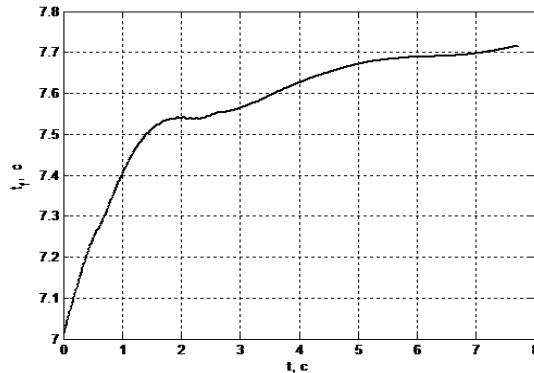
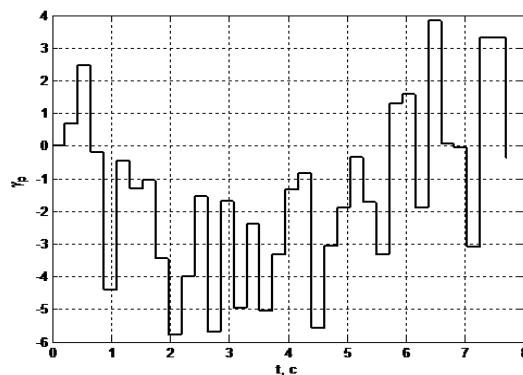
Рис. 2. Зависимость $t_f(t)$.

Рис. 3. Зависимость $\gamma_p(t)$.

этом терминальные значения требуемых координат получились следующими: $x(t_f) = 1959.4$ м, $y(t_f) = 3052.7$ м, $z(t_f) = 49.1$ м. На рис. 3 помещена зависимость $\gamma_p(t)$.

Этот результат уже можно использовать для доставки распылителя в окрестность заданной точки. Однако с увеличением длины интервала оптимизации траектория модели все больше отличается от траектории оптимального эталона.

Далее, алгоритм со спиральным прогнозом применялся из текущего положения ЛА, выдавая проекции перегрузки и угловой скорости в ПД-регулятор для введения $\gamma_p(t)$ в имитационную модель. Параметры равнялись: $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 1$, $\rho_3 = 40$, $k_1^2 = 5 \cdot 10^{-4}$, $k_2^2 = 5 \cdot 10^{-3}$, $k_3^2 = 10^{-4}$, $k_4^2 = 10^{-8}$, $k_5^2 = 10^{-5}$, $k_{p1} = 0.02$, $k_{p2} = 0.1$, $k_{p3} = 0.2$, $k_{p4} = 0.02$, $k_{p5} = 0.02$, $k_{p6} = 0.1$, $k_{p7} = 0.2$, $k_{p8} = 0.02$. Имитационная модель посредством ПД-регулятора приводит ЛА в точку с коорди-

Рис. 4. Зависимость $t_f(t)$.Рис. 5. Зависимость $\gamma_p(t)$.

натами $x(t_f) = 1919.7$ м, $y(t_f) = 3035.8$ м, $z(t_f) = 48.8$ м. На рис. 4, 5 помещены графики $t_f(t)$ и $\gamma_p(t)$ соответственно.

Итак, предложенное решение позволяет оптимально управлять осесимметричным вращающимся ЛА. Использование аналитических выражений для прогнозируемых конечных значений вектора состояния в модели спирального прогноза дает возможность вычислять управление на борту в процессе полета. Оптимизация интервала прогнозирования в рассматриваемой задаче особенно важна ввиду существенного изменения скорости при отсутствии двигателя.

Заключение. Предложено решение задачи оптимального управления по критерию А. А. Красовского осесимметричным вращающимся ЛА с использованием модели спирального прогноза для доставки реагента в заданную область пространства. Управление определяется на борту ЛА в процессе полета, стабилизация аппарата на формируемой траектории производится посредством ПД-регулятора. Показано, что для класса осесимметричных вращающихся ЛА с вращающейся управляющей насадкой в виде блока жестко закрепленных рулей реализуемо оптимальное управление в темпе полета по предложенной схеме.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Пермяков Г.Н.* Атмосферные явления природы и их регулирование. СПб.: Нестор-История, 2012. 100 с.
2. *Горбатенко В.П., Слуцкий В.И., Бычкова Л.Н.* Метеорологический радиолокатор МРЛ-5: производство наблюдений. Диагноз и прогноз опасных явлений погоды: учебное пособие. Томск: Изд-во "ТМЛ-Пресс", 2007. 120 с.
3. *Абшаев М.Т., Абшаев А.М., Барекова М.В., Малкарова А.М.* Руководство по организации и проведению противоградовых работ. Нальчик: Печатный двор, 2014. 508 с.
4. M1156 Precision Guidance Kit [Электронный ресурс] URL: https://en.wikipedia.org/wiki/M1156_Precision_Guidance_Kit (дата обращения: 09.06.2023).
5. *Guo Q., Song W., Gao M., Fang D.* Advanced Guidance Law Design for Trajectory-corrected Rockets with Canards under Single Channel Control// Engineering Letters. 2016. V. 24. № 4. P. 469–477.
6. *Gao M., Zhang Y., Yang S., Fang D.* Trajectory Correction Capability Modeling of the Guided Projectiles with Impulse Thrusters // Engineering Letters. 2016. V. 24. № 1. P. 11–18.
7. *Elsaadany A., Wan-jun Y.* Accuracy Improvement Capability of Advanced Projectile Based on Course Correction Fuze Concept // The Scientific World J. 2014. 10 p. [Электронный ресурс]. URL: <https://www.hindawi.com/journals/tswj/2014/273450/> (дата обращения: 09.06.2023).
8. *Wang Y., Song W.* Correction Mechanism Analysis for a Class of Spin-stabilized Projectile with Fixed Canards // Engineering Letters. 2015. V. 23. № 4. [Электронный ресурс]. URL: http://www.engineeringletters.com/issues_v23/issue_4/EL_23_4_05.pdf (дата обращения: 09.06.2023).
9. *Cheng J., Shen Q., Deng Z., Deng Z.* Novel Aiming Method for Spin-Stabilized Projectiles with a Course Correction Fuze Actuated by Fixed Canards // Electronics. 2019. V. 8. P. 1135–1155.
10. *Знаменский Е.А., Панченко А.В.* Приложение аналитического решения задачи о вращательном движении оси снаряда к проектированию систем коррекции // Тр. 19-й Всероссийск. науч.-техн. конф. "Проектирование систем вооружения и измерительных комплексов". Нижний Тагил: НТИ УрФУ (филиал), 2023. С. 92–99.
11. *Знаменский Е.А.* Исследование системы аэродинамической коррекции с одной степенью свободы для артиллерийских снарядов, стабилизованных вращением // Сб. тр. VII Всероссийск. науч.-техн. конф. "Фундаментальные основы баллистического проектирования". СПб.: Изд-во Балтийск. гос. техн. ун-та, 2022. С. 14–24.
12. *Красовский А.А.* Системы автоматического управления полетом и их аналитическое конструирование. М.: Наука, 1973. 560 с.
13. *Кабанов С.А.* Управление системами на прогнозирующих моделях. СПб.: Изд-во СПбГУ, 1997. 200 с.
14. *Кабанов Д.С., Никулин Е.Н.* Алгоритм последовательной оптимизации этапа выдвижения спиц крупногабаритного трансформируемого рефлектора // Изв. вузов. Приборостроение. 2021. Т. 64. № 3. С. 192–201.
15. *Беллман Р.* Процессы регулирования с адаптацией. М.: Наука, 1964. 360 с.
16. *Малышев В.В., Кабанов Д.С.* Алгоритм коррекции структуры управления автоматическим подводным аппаратом для построения области достижимости // Изв. вузов. Приборостроение. 2012. Т. 55. № 7. С. 21–27.
17. *Кабанов С.А.* Оптимизация динамики систем при действии возмущений. М.: Физматлит, 2008. 200 с.
18. *Кабанов Д.С.* Оптимизация пространственного маневра автоматического подводного аппарата с коррекцией параметров структуры управления // Мехатроника, автоматизация, управление. 2014. № 1. С. 60–66.
19. *Кабанов С.А., Митин Ф. В.* Оптимизация процессов раскрытия и создания формы трансформируемого рефлектора космического базирования // Изв. РАН. ТиСУ. 2021. № 2. С. 106–125.
20. *Кабанов С.А.* Оптимизация динамики систем с коррекцией параметров структуры управления // Вестн. С.-Петербургск. ун-та. Сер. I. Математика. Механика. Астрономия. 2014. Т. 1. Вып. 2. С. 254–260.
21. *Красовский А.А.* Адаптивный оптимальный регулятор с переменным порядком наблюдателя и временем экстраполяции // Аи Т. 1994. № 11. С. 97–112.
22. *Красовский А.А.* Алгоритмические основы оптимальных адаптивных регуляторов нового класса // Аи Т. 1995. № 9. С. 104–116.

23. Красовский А.А., Наумов А.И. Аналитическая теория самоорганизующихся систем управления с высоким уровнем искусственного интеллекта // Изв. РАН. ТиСУ. 2001. № 1. С. 69–75.
24. Квстратов И.Ю., Кабанов С.А., Сиротинкин В.В. Управление многомерным объектом с помощью самоорганизующегося адаптивного регулятора // Изв. РАН. ТиСУ. 1997. № 3. С. 107–112.
25. Кабанов С.А. Управление с самоорганизацией как инструмент для решения оптимизационных задач в социально-экономической сфере // Изв. РАН. ТиСУ. 1999. № 3. С. 172–176.
26. Красовский А.А. Метод быстрого численного интегрирования одного класса динамических систем // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1989. № 1. С. 3–14.
27. Красовский А.А. Основы алгоритмического обеспечения систем автоматического управления полетом с глубокой интеграцией // Вопр. кибернетики: Проблемы комплексирования кибернетических динамических систем. М.: АН РСФСР, 1992. С. 6–30.
28. Горбатенко С.А., Макашов Э.М., Полушкин Ю.Ф., Шефтель Л.В. Механика полета (Общие сведения. Уравнения движения): инж. справочник. М.: Машиностроение, 1969. 420 с.
29. Дмитриевский А.А. Внешняя баллистика. М.: Машиностроение, 1972. 584 с.
30. Управление и наведение беспилотных маневренных летательных аппаратов на основе современных информационных технологий / Под ред. М. Н. Красильщикова, Г. Г. Себрякова. М.: Физматлит, 2003. 280с.
31. Красовский А.А., Ермилов А.С. Боевое применение и эффективность пилотажно-навигационных комплексов летательных аппаратов. М.: ВВИА им. Н. Е. Жуковского, 1989. 288с.
32. Кабанов С.А., Александров А.А. Оптимизация траектории пространственного движения летательного аппарата как твердого тела // Аи Т. 2010. № 1. С 46–56.
33. Теряев Е.Д., Филимонов А.Б., Филимонов Н.Б., Петрин К.В. Концепция “гибких кинематических траекторий” в задачах терминального управления подвижными объектами // Мехатроника, автоматизация, управление. 2011. № 12. С. 7–15.
34. Wang H.M, Kabanov S.A. Optimal Control of the Return of a Flying Object on the Hierarchy of Criterion of Quality // FIRA Robot World Congress. Seoul, 2002. Р. 187–190.
35. Красовский А.А. Теория самоорганизующегося оптимального регулятора биномиального типа в детерминированно-стохастическом приближении // Аи Т. 1999. № 5. С. 97–113.
36. Кабанов С.А., Кабанов Д.С. Задачи управления с оптимизацией параметров прогнозирующих моделей. СПб.: Изд-во Балтийск. гос. техн. ун-та, 2017. 110с.