ИЗВЕСТИЯ РАН. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2025, № 2, с. 3–18

УПРАВЛЕНИЕ В ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИСТЕМАХ

УДК 517.938

УНИВЕРСАЛЬНЫЙ МЕТОД МОДАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПО ВЫХОДУ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С ДВУМЯ ВХОДАМИ И ДВУМЯ ВЫХОДАМИ

Н. Е. Зубов[a, *], А. В. Лапин[a]
[a]*МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия*
**e-mail: nik.zubov@gmail.com*
Поступила в редакцию 20.09.2024 г.
После доработки 06.11.2024 г.
Принята к публикации 24.02.2025 г.

Предложен универсальный аналитический метод построения регуляторов по выходу для линейных стационарных систем четвертого порядка с двумя управляющими входами и двумя наблюдаемыми выходами, не зависящий от соотношений между индексами управляемости и наблюдаемости. Метод не требует выполнять декомпозицию или редукцию системы и может применяться для любых модально управляемых по выходу систем четвертого порядка, в том числе для неприводимых к управлению (наблюдению) с одним входом (выходом). Метод основан на линейной матричной зависимости характеристического полинома замкнутой системы управления от коэффициентов и определителя матрицы регулятора по выходу. Предлагаемый подход представляет собой необходимое и достаточное условие для регулятора по выходу – позволяет определить все возможные матрицы регуляторов и условия их существования. Сформулирован и доказан новый алгебраический критерий полной модальной управляемости по выходу. Приведены примеры применения подхода к управлению авиационными и космическими системами по линеаризованным моделям, представленным в числовом и символьном виде.

Ключевые слова: модальное управление по выходу, система управления четвертого порядка, индекс управляемости, индекс наблюдаемости, след матрицы, одностороннее матричное уравнение, полная модальная управляемость по выходу

DOI: 10.31857/S0002338825020012, **EDN:** ARGMFQ

UNIVERSAL METHOD OF STATIC OUTPUT FEEDBACK POLE PLACEMENT FOR FOURTH-ORDER LINEAR TIME-INVARIANT SYSTEMS WITH TWO INPUTS AND TWO OUTPUTS

N. E. Zubov[a, *], A. V. Lapin[a]
[a]*Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia*
**e-mail: nik.zubov@gmail.com*

A universal analytical method of static output feedback pole placement for fourth-order linear time-invariant systems with two control inputs and two observe outputs is suggested, regardless the relations between controllability and observability indices. The method does not require decomposing or reducing a system and may be implied to any fourth-order systems modally controllable by static output feedback, including the systems irreducible to control (observation) with a single input (output). The method is based on linear matrix dependence of a closed-loop control system characteristic polynomial on coefficients and determinant of a matrix of controller by output. The suggesting approach gives the necessary and sufficient condition for static output feedback pole placement – it allows defining all possible matrices of controllers by output and the conditions of their existence. A new algebraic criterion of complete modal controllability by output is formulated and proved. Examples of the approach application to controlling the aviation and space systems based on linearized models both in numerical and symbolic form are given.

Keywords: static output feedback pole placement, fourth-order control system, controllability index, observability index, trace of matrix, one-sided matrix equation, complete modal controllability by output

Введение. Линейные стационарные модели четвертого порядка с двумя входами и двумя выходами находят широкое применение при описании процессов управления движущимися объектами при неполной информации о векторе состояния [1, 2]. В особенности это касается авиационных систем в различных режимах полета [3]. Модальное управление по выходу линейной стационарной системой (ЛСС), синтезированное аналитически, направлено на обеспечение устойчивого движения с заданными характеристиками [4].

Поскольку сумма двух входов и двух выходов у ЛСС четвертого порядка равна числу состояний, а не больше этого числа, классический метод модального управления по выходу [5], основанный на подходах Ван дер Воуда [6], изначально неприменим. В связи с этим ряд исследований авторов был направлен на получение аналитического решения актуальной задачи модального управления по выходу для ЛСС четвертого порядка. Однако предложенные ранее решения содержат определенные допущения и справедливы лишь для ограниченных классов ЛСС четвертого порядка с двумя входами и двумя выходами, т.е. охватывают далеко не полностью все такие ЛСС, управляемые по выходу.

Так, впервые аналитическое решение было получено для управления орбитальной ориентацией космического аппарата во взаимосвязанных каналах крена и рысканья при отсутствии измерений в канале рысканья [7]. Эта прикладная задача сведена к формуле Аккермана [8] после простого транспонирования определенных матричных блоков. Далее приведение управления по выходу к управлению (наблюдению) по состоянию с одним входом (выходом) было обобщено на определенный класс рассматриваемых ЛСС, для которых выполняются условия приведения [9]. Но класс таких ЛСС оказался довольно узким. Наконец, в [10] на практической задаче и в [11] с теоретическими доказательствами класс был расширен до любых ЛСС четвертого порядка с неравными индексами управляемости и наблюдаемости. Во всех представленных решениях так или иначе задействована многоуровневая декомпозиция ЛСС по состоянию [12] или по наблюдению [13], а также условия разрешимости уравнений связи [14] на нулевом уровне декомпозиции относительно матрицы регулятора по выходу.

Исследования показали, что обеспечить разрешимость уравнения связи для любых ЛСС четвертого порядка, управляемых по выходу, только за счет матриц с желаемыми спектрами в рамках декомпозиции не представляется возможным. Вместе с тем у большинства ЛСС четвертого порядка с двумя входами и двумя выходами индексы управляемости и наблюдаемости равны между собой (чаще всего они оба равны двум, реже – трем). Поэтому в настоящей статье предлагается принципиально новый подход к модальному управлению, без использования декомпозиции и условий разрешимости, применимый к любым ЛСС четвертого порядка с двумя входами и двумя выходами, независимо от соотношений между индексами их управляемости и наблюдаемости. Также в статье доказывается новый и весьма актуальный критерий полной модальной управляемости по выходу, которого до настоящего времени не существовало.

Постановка задачи. Рассматривается полностью управляемая и полностью наблюдаемая четырехмерная (вектор состояния $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{4\times 1}$) ЛСС с двумя входами (вектор управления $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{2\times 1}$) и двумя выходами (вектор наблюдения $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{2\times 1}$):

$$\begin{cases} \sigma\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t), \end{cases} \tag{1.1}$$

где σ – оператор дифференцирования по времени t (непрерывный случай $t \in \mathbb{R}$) или сдвига на шаг вперед (дискретный случай $t \in \mathbb{Z}$); $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ – соответственно матрицы состояния, управления и наблюдения, причем матрицы $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ имеют полный ранг.

Управление по выходу строится в соответствии с законом

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{F}\mathbf{y}(t), \tag{1.2}$$

где $\mathbf{F}$ – матрица регулятора по выходу.

Требуется определить все возможные матрицы $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{m\times l}$, обеспечивающие матрице замкнутой ЛСС (1.1), (1.2) $\mathbf{A}^* = \mathbf{A} - \mathbf{BFC}$ заданный характеристический полином:

$$p^*(\lambda) = \lambda^4 + p_1^*\lambda^3 + p_2^*\lambda^2 + p_3^*\lambda + p_4^* \tag{1.3}$$

с вещественными коэффициентами p_i^*, $i = \overline{1,\ 4}$.

Универсальный подход к модальному управлению. Пусть p_i, $i=\overline{1,\ 4}$, — вещественные коэффициенты характеристического полинома

$$p(\lambda)=\lambda^4+p_1\lambda^3+p_2\lambda^2+p_3\lambda+p_4$$

разомкнутой ЛСС (1.1) (матрицы состояния $\mathbf{A}$).

Введем в рассмотрение матричные блоки

$$\mathbf{M}_i=\mathbf{C}\mathbf{A}^i\mathbf{B},$$

где $i=\overline{0,\ 3}$. Отметим, что эти блоки связаны с матрицами управляемости $\mathbf{U}$ и наблюдаемости $\mathbf{N}$ Калмана следующим образом:

$$\left[\mathbf{M}_0 \mid \mathbf{M}_1 \mid \mathbf{M}_2 \mid \mathbf{M}_3\right]=\mathbf{C}\underbrace{\left[\mathbf{B} \mid \mathbf{AB} \mid \mathbf{A}^2\mathbf{B} \mid \mathbf{A}^3\mathbf{B}\right]}_{\mathbf{U}},\quad \begin{bmatrix}\mathbf{M}_0\\ \mathbf{M}_1\\ \mathbf{M}_2\\ \mathbf{M}_3\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}\mathbf{C}\\ \mathbf{CA}\\ \mathbf{CA}^2\\ \mathbf{CA}^3\end{bmatrix}}_{\mathbf{N}}\mathbf{B},\quad \mathbf{CU}=(\mathbf{NB})^{\mathbf{T}_{2\times 2}}.$$

Здесь верхний индекс $\mathbf{T}_{2\times 2}$ обозначает операцию транспонирования по блокам (блочного транспонирования [15]) размерности 2×2.

Тогда коэффициенты характеристического полинома замкнутой ЛСС (матрицы $\mathbf{A}^*$), соответственно равные коэффициентам полинома (1.3), рассчитываются из соотношения:

$$\begin{bmatrix}p_1^*\\ p_2^*\\ p_3^*\\ p_4^*\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}p_1\\ p_2\\ p_3\\ p_4\end{bmatrix}+\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ p_1 & 1 & 0 & 0\\ p_2 & p_1 & 1 & 0\\ p_3 & p_2 & p_1 & 1\end{bmatrix}}_{\mathbf{P}}\left(\begin{bmatrix}\mathrm{tr}(\mathbf{M}_0\mathbf{F})\\ \mathrm{tr}(\mathbf{M}_1\mathbf{F})\\ \mathrm{tr}(\mathbf{M}_2\mathbf{F})\\ \mathrm{tr}(\mathbf{M}_3\mathbf{F})\end{bmatrix}+\underbrace{\begin{bmatrix}0\\ q_\alpha\\ q_{\alpha\beta}\\ q_{\alpha\beta\gamma}\end{bmatrix}}_{\mathbf{q}}\det\mathbf{F}\right), \tag{2.1}$$

где tr — функция, определяющая след квадратной матрицы, а

$$\begin{bmatrix}q_\alpha\\ q_{\alpha\beta}\\ q_{\alpha\beta\gamma}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_{1,1} & 0 & 0\\ \beta_{1,1} & \alpha_{1,1} & 0\\ \gamma_{1,1} & \beta_{1,1} & \alpha_{1,1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_{2,2}\\ \beta_{2,2}\\ \gamma_{2,2}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\alpha_{1,2} & 0 & 0\\ \beta_{1,2} & \alpha_{1,2} & 0\\ \gamma_{1,2} & \beta_{1,2} & \alpha_{1,2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_{2,1}\\ \beta_{2,1}\\ \gamma_{2,1}\end{bmatrix}$$

при обозначениях

$$\begin{bmatrix}\alpha_{1,1} & \alpha_{1,2}\\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2}\end{bmatrix}=\mathbf{M}_0,\quad \begin{bmatrix}\beta_{1,1} & \beta_{1,2}\\ \beta_{2,1} & \beta_{2,2}\end{bmatrix}=\mathbf{M}_1,\quad \begin{bmatrix}\gamma_{1,1} & \gamma_{1,2}\\ \gamma_{2,1} & \gamma_{2,2}\end{bmatrix}=\mathbf{M}_2,\quad \begin{bmatrix}\delta_{1,1} & \delta_{1,2}\\ \delta_{2,1} & \delta_{2,2}\end{bmatrix}=\mathbf{M}_3.$$

Введем также следующие обозначения (матрица $\mathbf{P}$ обратима, так как $\det\mathbf{P}=1$):

$$\Delta\mathbf{p}=\mathbf{P}^{-1}\begin{bmatrix}p_1^*-p_1\\ p_2^*-p_2\\ p_3^*-p_3\\ p_4^*-p_4\end{bmatrix},\quad \mathbf{Q}=\begin{bmatrix}\alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2}\\ \beta_{1,1} & \beta_{1,2} & \beta_{2,1} & \beta_{2,2}\\ \gamma_{1,1} & \gamma_{1,2} & \gamma_{2,1} & \gamma_{2,2}\\ \delta_{1,1} & \delta_{1,2} & \delta_{2,1} & \delta_{2,2}\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}f_{1,1} & f_{1,2}\\ f_{2,1} & f_{2,2}\end{bmatrix}=\mathbf{F},\quad \mathbf{f}=\begin{bmatrix}f_{1,1}\\ f_{2,1}\\ f_{1,2}\\ f_{2,2}\end{bmatrix}. \tag{2.2}$$

Тогда уравнение (2.1) перепишется в виде

$$\Delta\mathbf{p}=\underbrace{\left[\mathbf{Q} \mid \mathbf{q}\right]}_{\mathbf{G}\in\mathbb{R}^{4\times 5}}\underbrace{\begin{bmatrix}\mathbf{f}\\ \det\mathbf{F}\end{bmatrix}}_{\mathbf{r}\in\mathbb{R}^{5\times 1}}. \tag{2.3}$$

При полном ранге $\operatorname{rank}\mathbf{G}=4$ одностороннее матричное уравнение (2.3) разрешимо относительно вектора $\mathbf{r}$ и имеет следующее общее решение [16]:

$$\mathbf{r}(\omega)=\underbrace{\mathbf{G}^{+}\Delta\mathbf{p}}_{\mathbf{h}}+\underbrace{\overline{\mathbf{G}}^{R}}_{\mathbf{g}}\omega\,, \tag{2.4}$$

где $\omega\in\mathbb{R}$ – произвольный параметр. Верхний индекс “+” обозначает псевдообратную матрицу [17], а записи вида $\overline{\mathbf{G}}^{R}$ и $\overline{\mathbf{G}}^{L}$ здесь и далее описывают правый (*Right*) и левый (*Left*) матричные аннуляторы максимального ранга [17] соответствующей матрицы $\mathbf{G}$. Псевдообращение матрицы, имеющей полный ранг, выполняется по формуле [17]

$$\mathbf{G}^{+}=\mathbf{G}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{G}\mathbf{G}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}. \tag{2.5}$$

Пусть $r_i(\omega)$, h_i и g_i, $i=\overline{1,\ 5}$, – соответствующие коэффициенты векторов $\mathbf{r}(\omega)$, $\mathbf{g}$ и $\mathbf{h}$ в уравнении (2.4). Поскольку

$$r_5(\omega)=\det\begin{bmatrix} r_1(\omega) & r_3(\omega)\\ r_2(\omega) & r_4(\omega)\end{bmatrix}, \tag{2.6}$$

параметр ω должен удовлетворять уравнению

$$r_1(\omega)r_4(\omega)-r_2(\omega)r_3(\omega)-r_5(\omega)=0, \tag{2.7}$$

т.е. в соответствии с формулой (2.4), уравнению

$$a_\omega\omega^2+b_\omega\omega+c_\omega=0, \tag{2.8}$$

где

$$a_\omega=g_1g_4-g_2g_3,\quad b_\omega=g_1h_4+g_4h_1-g_2h_3-g_3h_2-g_5,\quad c_\omega=h_1h_4-h_2h_3-h_5.$$

Если квадратное алгебраическое уравнение (2.8) имеет действительные решения относительно параметра ω (одно или два решения, а при $a=b=c=0$ решением является любое действительное число), они подставляются в выражение (2.4) для определения матриц регулятора по выходу:

$$\mathbf{F}=\begin{bmatrix} r_1(\omega) & r_3(\omega)\\ r_2(\omega) & r_4(\omega)\end{bmatrix}. \tag{2.9}$$

При неполном ранге $\operatorname{rank}\mathbf{G}\le 3$ уравнение (2.3) разрешимо относительно вектора $\mathbf{r}$, только если коэффициенты желаемого полинома (1.3) таковы, что

$$\overline{\mathbf{G}}^{L}\Delta\mathbf{p}=\mathbf{0}. \tag{2.10}$$

Однако в этом случае правый аннулятор $\overline{\mathbf{G}}^{R}$ имеет более одного столбца. Поэтому формула (2.4) будет содержать два или более произвольных параметров, аналогичных параметру ω. Таким образом, и решений относительно матрицы регулятора по выходу, обеспечивающих заданное, хоть и избирательное из условия (2.10), расположение коэффициентов полинома (1.3), может быть бесконечно много.

Полная модальная управляемость по выходу. Сформулируем *понятие полной модальной управляемости по выходу* для ЛСС (1.1).

Определение. ЛСС (1.1) называется *полностью* модально управляемой по выходу, если при *любом* желаемом характеристическом полиноме (1.3) имеется хотя бы одно решение $\mathbf{F}$ соответствующей задачи модального управления по выходу (1.2).

Справедлив следующий *критерий полной модальной управляемости по выходу* для ЛСС (1.1).

Теорема. ЛСС (1.1) полностью модально управляема по выходу тогда и только тогда, когда

$$\det\begin{bmatrix}\alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2}\\ \beta_{1,1} & \beta_{1,2} & \beta_{2,1} & \beta_{2,2}\\ \gamma_{1,1} & \gamma_{1,2} & \gamma_{2,1} & \gamma_{2,2}\\ \delta_{1,1} & \delta_{1,2} & \delta_{2,1} & \delta_{2,2}\end{bmatrix}\neq 0,$$

$$\begin{bmatrix}\alpha_{1,1} & 0 & 0\\ \beta_{1,1} & \alpha_{1,1} & 0\\ \gamma_{1,1} & \beta_{1,1} & \alpha_{1,1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_{2,2}\\ \beta_{2,2}\\ \gamma_{2,2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_{1,2} & 0 & 0\\ \beta_{1,2} & \alpha_{1,2} & 0\\ \gamma_{1,2} & \beta_{1,2} & \alpha_{1,2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_{2,1}\\ \beta_{2,1}\\ \gamma_{2,1}\end{bmatrix}, \tag{3.1}$$

где

$$\begin{bmatrix}\alpha_{1,1} & \alpha_{1,2}\\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2}\end{bmatrix}=\mathbf{CB},\quad \begin{bmatrix}\beta_{1,1} & \beta_{1,2}\\ \beta_{2,1} & \beta_{2,2}\end{bmatrix}=\mathbf{CAB},\quad \begin{bmatrix}\gamma_{1,1} & \gamma_{1,2}\\ \gamma_{2,1} & \gamma_{2,2}\end{bmatrix}=\mathbf{CA}^2\mathbf{B},\quad \begin{bmatrix}\delta_{1,1} & \delta_{1,2}\\ \delta_{2,1} & \delta_{2,2}\end{bmatrix}=\mathbf{CA}^3\mathbf{B}.$$

Доказательство. Докажем *необходимость*. Пусть ЛСС (1.1) полностью модально управляема по выходу. Тогда задача модального управления (1.2) имеет хотя бы одно решение $\mathbf{F}$ при *любых* значениях вектора $\Delta\mathbf{p}$ из записи (2.2) в силу обратимости матрицы $\mathbf{P}$. Доказательство проведем методом “от противного”.

Предположим, что критерий (3.1) не выполняется. Тогда матрица $\mathbf{G}$ в уравнении (2.3) имеет неполный ранг $\operatorname{rank}\mathbf{G}\le 3$ или при полном ранге $\operatorname{rank}\mathbf{G}=4$ правый аннулятор $\mathbf{g}=\overline{\mathbf{G}}^R$ содержит ненулевое число хотя бы в одной из первых четырех позиций (при $g_1=g_2=g_3=g_4=0$ критерий бы выполнялся).

При неполном ранге $\operatorname{rank}\mathbf{G}\le 3$ модальная управляемость может иметь место, только если желаемый спектр удовлетворяет условию (2.10), что противоречит *полной* модальной управляемости по выходу.

Рассмотрим случай полного ранга $\operatorname{rank}\mathbf{G}=4$ при отличной от нуля сумме $g_1^2+g_2^2+g_3^2+g_4^2$. Назначим, например, желаемый полином (1.3) таким, что

$$\Delta\mathbf{p}=\mathbf{G}\begin{bmatrix}\kappa g_4 & -\kappa g_3 & -\kappa g_2 & \kappa g_1 & 0.5-\operatorname{sign}a\end{bmatrix}^{\mathrm{T}},\quad \kappa=\frac{g_5}{g_1^2+g_2^2+g_3^2+g_4^2}. \tag{3.2}$$

Тогда уравнение (2.3) относительно вектора $\mathbf{r}$ принимает вид

$$\mathbf{G}\left(\mathbf{r}-\begin{bmatrix}\kappa g_4 & -\kappa g_3 & -\kappa g_2 & \kappa g_1 & 0.5-\operatorname{sign}a\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\right)=\mathbf{0}_{4\times 1}$$

и при полном ранге $\operatorname{rank}\mathbf{G}=4$ имеет общее решение

$$\mathbf{r}(\nu)=\mathbf{g}\nu+\begin{bmatrix}\kappa g_4 & -\kappa g_3 & -\kappa g_2 & \kappa g_1 & 0.5-\operatorname{sign}a\end{bmatrix}^{\mathrm{T}},$$

где $\nu\in\mathbb{R}$ – произвольный параметр, который, согласно соотношению (2.6), должен удовлетворять равенству

$$g_5\nu+0.5-\operatorname{sign}a=(g_1\nu+g_4\kappa)(g_4\nu+g_1\kappa)-(g_2\nu-g_3\kappa)(g_3\nu-g_2\kappa),$$

которое эквивалентно тождеству

$$a\left(\nu^2+\kappa^2 g_5^2\right)+\operatorname{sign}a-0.5=0. \tag{3.3}$$

Желаемый полином из условия (3.2) подобран так, чтобы обнулить коэффициент при параметре ν в первой степени. Полученное равенство (3.3) невыполнимо. Действительно, если $a=0$, то оно превращается в неверное соотношение $-0.5=0$, а если $a\neq 0$, – в квадратное уравнение

$$\nu^2+m^2 g_5^2+\frac{\operatorname{sign}a-0.5}{a}=0,$$

не имеющее вещественных корней относительно параметра ν. Вновь возникает противоречие с полной модальной управляемостью по выходу. Необходимость доказана.

Докажем *достаточность*. Пусть критерий (3.1) выполняется. Докажем, что решение соответствующей задачи модального управления по выходу существует при любых значениях вектора $\Delta\mathbf{p}$.

Согласно критерию (3.1), в уравнении (2.3) имеем невырожденную матрицу $\mathbf{Q}$ и нулевой столбец $\mathbf{q}$. Полученное уравнение $\Delta\mathbf{p} = \mathbf{Qf}$ имеет единственное решение $\mathbf{f} = \mathbf{Q}^{-1}\Delta\mathbf{p}$ при любых значениях вектора $\Delta\mathbf{p}$. Данное решение по своей структуре совпадает с формулой Басса–Гура [18] для ЛСС с одним входом (матрица $\mathbf{Q}$ выступает в роли матрицы управляемости). Достаточность и теорема в целом доказаны.

Следствие. Если ЛСС (1.1) полностью модально управляема по выходу, то решение $\mathbf{F}$ соответствующей задачи модального управления всегда единственно.

Числовые примеры. Рассматривается управление боковым движением воздушного судна [10]. Линеаризованное уравнение состояния имеет вид

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot\beta(t) \\ \dot\omega_x(t) \\ \dot\omega_y(t) \\ \dot\gamma(t) \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} -0.152 & 0.4226 & 0.9063 & 0.0969 \\ -18.643 & -1.0600 & -1.6000 & 0 \\ -1.757 & -0.1530 & -0.1360 & 0 \\ 0 & 1 & -0.4663 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} \beta(t) \\ \omega_x(t) \\ \omega_y(t) \\ \gamma(t) \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1.874 & -8.966 \\ -1.460 & 0.304 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \underbrace{\begin{bmatrix} \delta_r(t) \\ \delta_a(t) \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}(t)}, \tag{4.1}$$

где β – угол скольжения; ω_x и ω_y– угловые скорости крена и рысканья; γ – угол крена; δ_r и δ_a – углы отклонения рулей направления и элеронов.

Индекс управляемости ЛСС (4.1) равен двум, поскольку

$$\det \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2.1152 & -3.5135 \\ -1.874 & -8.966 & 4.3224 & 9.0176 \\ -1.460 & 0.304 & 0.4853 & 1.3305 \\ 0 & 0 & -1.1932 & -9.1078 \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}_2 = [\mathbf{B} \mid \mathbf{AB}]} \neq 0.$$

Требуется при различных сочетаниях (матрица $\mathbf{C}$) двух измеряемых параметров из четырех определить матрицу $\mathbf{F}$ регулятора по выходу, обеспечивающую полином:

$$|\lambda\mathbf{I}_4 - \mathbf{A} + \mathbf{BFC}| = \lambda^4 + 7\lambda^3 + 17.75\lambda^2 + 19.25\lambda + 7.5. \tag{4.2}$$

Пример 1. Измеряются ω_x и ω_y. Уравнение наблюдения имеет вид:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \omega_x(t) \\ \omega_y(t) \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \underbrace{\begin{bmatrix} \beta(t) \\ \omega_x(t) \\ \omega_y(t) \\ \gamma(t) \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}(t)}. \tag{4.3}$$

Индекс наблюдаемости ЛСС (4.1), (4.3) равен трем, поскольку

$$\det \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline -18.643 & -1.060 & -1.600 & 0 \\ -1.757 & -0.153 & -0.136 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{N}_2 = \left[\begin{smallmatrix} \mathbf{C} \\ \hline \mathbf{CA} \end{smallmatrix}\right]} = 0, \quad \operatorname{rank} \underbrace{\begin{bmatrix} \multicolumn{4}{c}{\mathbf{N}_2} \\ \hline 25.4065 & -6.5101 & -14.9826 & -1.8065 \\ 3.3584 & -0.5595 & -1.3291 & -0.1703 \end{bmatrix}}_{\mathbf{N}_3 = \left[\begin{smallmatrix} \mathbf{N}_2 \\ \hline \mathbf{CA}^2 \end{smallmatrix}\right]} = 4.$$

В силу *неравных* индексов управляемости и наблюдаемости, этот пример был решен в частном случае [10]. Для сравнения решим его новым универсальным методом.

Составим уравнение (2.3) относительно параметров матрицы $\mathbf{F}$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 5.6520 \\ 0.5791 \\ -36.2169 \\ 46.8256 \end{bmatrix}}_{\Delta\mathbf{p}} = \underbrace{\left[\begin{array}{c:c:c:c:c} -1.8740 & -8.9660 & -1.4600 & 0.3040 & 0 \\ 4.3224 & 9.0176 & 0.4853 & 1.3305 & -13.6601 \\ 34.0745 & 53.8151 & 2.9890 & 4.6126 & 16.3374 \\ -86.9935 & -151.4521 & -9.9638 & -17.0629 & 108.4587 \end{array}\right]}_{\mathbf{G}} \underbrace{\begin{bmatrix} f_{1,1} \\ f_{2,1} \\ f_{1,2} \\ f_{2,2} \\ \det \mathbf{F} \end{bmatrix}}_{\mathbf{r}}. \quad (4.4)$$

Так как $\operatorname{rank}\left(\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{4\times 5}\right) = 4$, уравнение (4.4) всегда разрешимо относительно вектора $\mathbf{r}$. Запишем его общее параметризованное ($\omega \in \mathbb{R}$) решение (2.4):

$$\underbrace{\begin{bmatrix} f_{1,1}(\omega) \\ f_{2,1}(\omega) \\ f_{1,2}(\omega) \\ f_{2,2}(\omega) \\ \det \mathbf{F}(\omega) \end{bmatrix}}_{\mathbf{r}(\omega)} = \underbrace{\begin{bmatrix} -0.7180 \\ -0.1591 \\ -1.6740 \\ 1.4350 \\ -0.2943 \end{bmatrix}}_{\mathbf{G}^{+}\Delta\mathbf{p}} + \underbrace{\begin{bmatrix} -0.0626 \\ -0.0699 \\ 0.6638 \\ 0.7414 \\ 0.0299 \end{bmatrix}}_{\overline{\mathbf{G}}^{R}} \omega.$$

Таким образом, должны одновременно выполняться равенства:

$$\mathbf{F}(\omega) = \left[\begin{array}{c:c} -0.7180 - 0.0626\omega & -1.6740 + 0.6638\omega \\ -0.1591 - 0.0699\omega & 1.4350 + 0.7414\omega \end{array}\right], \quad (4.5)$$

$$\det \mathbf{F}(\omega) = -0.2943 + 0.0299\omega.$$

Поскольку и матрица $\mathbf{F}$, и определитель $\det \mathbf{F}$ зависят от параметра ω, необходимо составить уравнение связи (2.7):

$$-0.6633\omega - 1.0023 = 0.$$

Отсюда находим подходящее значение параметра:

$$\omega = -1.5110.$$

Подставив значение ω в формулу (4.5), получим матрицу регулятора по выходу:

$$\mathbf{F} = \left[\begin{array}{c:c} -0.6234 & -2.6770 \\ -0.0535 & 0.3148 \end{array}\right]. \quad (4.6)$$

Матрица (4.6) обеспечивает желаемый полином (4.2) и совпадает с результатом, найденным в частном случае [10].

Пример 2. Измеряются ω_x и γ. Уравнение наблюдения имеет вид:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \omega_x(t) \\ \gamma(t) \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}(t)} = \underbrace{\left[\begin{array}{c:c:c:c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{\mathbf{C}} \underbrace{\begin{bmatrix} \beta(t) \\ \omega_x(t) \\ \omega_y(t) \\ \gamma(t) \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}(t)}. \quad (4.7)$$

Индекс наблюдаемости ЛСС (4.1), (4.7) равен двум, поскольку

$$\det \underbrace{\left[\begin{array}{c:c:c:c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hdashline -18.643 & -1.06 & -1.6000 & 0 \\ 0 & 1 & -0.4663 & 0 \end{array}\right]}_{\mathbf{N}_2 = \left[\begin{smallmatrix} \mathbf{C} \\ \hdashline \mathbf{CA} \end{smallmatrix}\right]} \neq 0.$$

В силу *равных* индексов управляемости и наблюдаемости, ранее предложенные методы [7, 9, 10] неприменимы. Воспользуемся новым универсальным методом.

Составим уравнение (2.3) относительно параметров матрицы $\mathbf{F}$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 5.6520 \\ 0.5791 \\ -36.2169 \\ 46.8256 \end{bmatrix}}_{\Delta\mathbf{p}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1.8740 & -8.9660 & 0 & 0 & 0 \\ 4.3224 & 9.0176 & -1.1932 & -9.1078 & 0 \\ 34.0745 & 53.8151 & 4.0962 & 8.3972 & 6.3697 \\ -86.9935 & -151.4521 & 32.6807 & 51.6643 & -7.6181 \end{bmatrix}}_{\mathbf{G}} \underbrace{\begin{bmatrix} f_{1,1} \\ f_{2,1} \\ f_{1,2} \\ f_{2,2} \\ \det\mathbf{F} \end{bmatrix}}_{\mathbf{r}}. \tag{4.8}$$

Так как $\operatorname{rank}\left(\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{4\times5}\right) = 4$, уравнение (4.8) всегда разрешимо относительно вектора $\mathbf{r}$. Запишем его общее параметризованное ($\omega \in \mathbb{R}$) решение (2.4):

$$\underbrace{\begin{bmatrix} f_{1,1}(\omega) \\ f_{2,1}(\omega) \\ f_{1,2}(\omega) \\ f_{2,2}(\omega) \\ \det\mathbf{F}(\omega) \end{bmatrix}}_{\mathbf{r}(\omega)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0.1629 \\ -0.6644 \\ -0.2399 \\ -0.6127 \\ 0.0183 \end{bmatrix}}_{\mathbf{G}^{+}\Delta\mathbf{p}} + \underbrace{\begin{bmatrix} -0.2343 \\ 0.0490 \\ -0.0915 \\ -0.0507 \\ 0.9653 \end{bmatrix}}_{\overline{\mathbf{G}}^{R}} \omega.$$

Таким образом, должны одновременно выполняться равенства:

$$\mathbf{F}(\omega) = \begin{bmatrix} 0.1629 - 0.2343\omega & -0.2399 - 0.0915\omega \\ -0.6644 + 0.0490\omega & -0.6127 - 0.0507\omega \end{bmatrix}, \tag{4.9}$$

$$\det\mathbf{F}(\omega) = 0.0183 + 0.9653\omega.$$

Матрица $\mathbf{F}$ и определитель $\det\mathbf{F}$ зависят от параметра ω. Запишем уравнение связи (2.7):

$$0.0164\omega^2 - 0.8791\omega - 0.2775 = 0.$$

Отсюда находим два подходящих значения параметра:

$$\omega = -0.3138; \quad \omega = 54.0367.$$

Подставив значения ω в формулу (4.9), получим матрицы регуляторов по выходу:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0.2364 & -0.2112 \\ -0.6798 & -0.5968 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} -12.4969 & -5.1852 \\ 1.9816 & -3.3532 \end{bmatrix}. \tag{4.10}$$

Обе матрицы (4.10) обеспечивают желаемый полином (4.2), но на практике предпочтение отдается левой матрице, имеющей на порядок меньшую норму [19].

Символьные примеры. Рассматривается управление орбитальной ориентацией космического аппарата [7]. Линеаризованное уравнение состояния имеет вид

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot\gamma(t) \\ \ddot\gamma(t) \\ \dot\psi(t) \\ \ddot\psi(t) \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{2,1} & 0 & 0 & a_{2,4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_{4,2} & a_{4,3} & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} \gamma(t) \\ \dot\gamma(t) \\ \psi(t) \\ \dot\psi(t) \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1/J_x & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1/J_y \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \underbrace{\begin{bmatrix} u_x(t) \\ u_y(t) \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}(t)}, \tag{5.1}$$

где γ и $\dot\gamma$ – угол и угловая скорость крена; ψ и $\dot\psi$ – угол и угловая скорость рыскания; $a_{2,1}$, $a_{2,4}$, $a_{4,2}$ и $a_{4,3}$ – коэффициенты линеаризации; J_x и J_y – осевые моменты инерции; u_x и u_y – управляющие реактивные моменты.

Индекс управляемости ЛСС (5.1) равен двум, поскольку

$$\det \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/J_x & 0 \\ 1/J_x & 0 & 0 & a_{2,4}/J_y \\ 0 & 0 & 0 & 1/J_y \\ 0 & 1/J_y & a_{4,2}/J_x & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}_2=[\mathbf{B} \,\vdots\, \mathbf{AB}]} \neq 0.$$

Требуется при различных сочетаниях (матрица **C**) двух измеряемых параметров из набора $\gamma, \dot{\gamma}, \dot{\psi}$ (угол рысканья ψ не измеряется датчиком инфракрасной вертикали [20]) определить матрицу **F** регулятора по выходу, обеспечивающую полином (1.3).

П р и м е р 3. Измеряются γ и $\dot{\gamma}$. Уравнение наблюдения имеет вид:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \gamma(t) \\ \dot{\gamma}(t) \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \underbrace{\begin{bmatrix} \gamma(t) \\ \dot{\gamma}(t) \\ \psi(t) \\ \dot{\psi}(t) \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}(t)}. \quad (5.2)$$

Индекс наблюдаемости ЛСС (5.1), (5.2) равен трем, поскольку

$$\det \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{2,1} & 0 & 0 & a_{2,4} \end{bmatrix}}_{\mathbf{N}_2=\left[\frac{\mathbf{C}}{\mathbf{CA}}\right]} = 0, \quad \operatorname{rank} \underbrace{\begin{bmatrix} & \mathbf{N}_2 & & \\ \hline a_{2,1} & 0 & 0 & a_{2,4} \\ 0 & a_{2,1}+a_{2,4}a_{4,2} & a_{2,4}a_{4,3} & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{N}_3=\left[\frac{\mathbf{N}_2}{\mathbf{CA}^2}\right]} = 4$$

при

$$a_{2,4}a_{4,3} \neq 0. \quad (5.3)$$

В силу *неравных* индексов управляемости и наблюдаемости, этот пример был решен с помощью приведения к управлению с одним входом [7]. Для сравнения решим его новым универсальным методом.

Составим уравнение (2.3) относительно параметров матрицы **F**:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} p_1^* \\ \kappa + p_2^* \\ \kappa p_1^* + p_3^* \\ \kappa^2 + \kappa p_2^* + p_4^* - a_{2,1}a_{4,3} \end{bmatrix}}_{\Delta\mathbf{p}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{J_x} & 0 & 0 \\ \frac{1}{J_x} & 0 & 0 & \frac{a_{2,4}}{J_y} & 0 \\ 0 & \frac{a_{2,4}}{J_y} & \frac{\kappa - a_{4,3}}{J_x} & 0 & 0 \\ \frac{\kappa - a_{4,3}}{J_x} & 0 & 0 & \kappa\frac{a_{2,4}}{J_y} & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{G}} \underbrace{\begin{bmatrix} f_{1,1} \\ f_{2,1} \\ f_{1,2} \\ f_{2,2} \\ \det \mathbf{F} \end{bmatrix}}_{\mathbf{r}}, \quad (5.4)$$

где

$$\kappa = a_{2,1} + a_{2,4}a_{4,2} + a_{4,3}.$$

Так как $\operatorname{rank}\left(\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{4\times 5}\right) = 4$, уравнение (5.4) всегда разрешимо относительно вектора **r**. Запишем его общее параметризованное ($\omega \in \mathbb{R}$) решение (2.4):

$$\underbrace{\begin{bmatrix} f_{1,1} \\ f_{2,1} \\ f_{1,2} \\ f_{2,2} \\ \det \mathbf{F}(\omega) \end{bmatrix}}_{\mathbf{r}(\omega)} = \underbrace{\begin{bmatrix} J_x\left(a_{2,1} - \dfrac{p_4^*}{a_{4,3}}\right) \\ J_y \dfrac{p_3^* + a_{4,3}p_1^*}{a_{2,4}} \\ J_x p_1^* \\ J_y\left(a_{4,2} + \dfrac{1}{a_{2,4}}\left(a_{4,3} + p_2^* + \dfrac{p_4^*}{a_{4,3}}\right)\right) \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{G}^+\Delta\mathbf{p}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\overline{\mathbf{G}}^R} \omega.$$

Таким образом, должны одновременно выполняться равенства:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} J_x & 0 \\ 0 & J_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{2,1} - \dfrac{p_4^*}{a_{4,3}} & p_1^* \\ \dfrac{p_3^* + a_{4,3}p_1^*}{a_{2,4}} & a_{4,2} + \dfrac{1}{a_{2,4}}\left(a_{4,3} + p_2^* + \dfrac{p_4^*}{a_{4,3}}\right) \end{bmatrix}, \tag{5.5}$$

$$\det \mathbf{F}(\omega) = \omega.$$

Матрица $\mathbf{F}$ не зависит от параметра ω, а определитель $\det \mathbf{F}$ зависит от этого параметра. Поэтому нет необходимости записывать уравнение связи (2.7), и матрица (5.5) уже является результатом решения задачи.

Регулятор (5.5) существует при выполнении условия (5.3) и любом желаемом полиноме (1.3). Формула (5.5) совпадает с результатом, полученным в частном случае [7].

П р и м е р 4. Измеряются γ и $\dot{\psi}$. Уравнение наблюдения имеет вид:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \gamma(t) \\ \dot{\gamma}(t) \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \underbrace{\begin{bmatrix} \gamma(t) \\ \dot{\gamma}(t) \\ \psi(t) \\ \dot{\psi}(t) \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}(t)}. \tag{5.6}$$

Индекс наблюдаемости ЛСС (5.1), (5.6) равен двум, поскольку

$$\det \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{4,2} & a_{4,3} & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{N}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{bmatrix}} \neq 0$$

при

$$a_{4,3} \neq 0. \tag{5.7}$$

В силу *равных* индексов управляемости и наблюдаемости, ранее предложенные методы [7, 9, 10] неприменимы. Воспользуемся новым универсальным методом.

Составим уравнение (2.3) относительно параметров матрицы $\mathbf{F}$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} p_1^* \\ \kappa + p_2^* \\ \kappa p_1^* + p_3^* \\ \kappa^2 + \kappa p_2^* + p_4^* - a_{2,1}a_{4,3} \end{bmatrix}}_{\Delta\mathbf{p}} = \underbrace{\left[\begin{array}{c:c:c:c:c} 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{J_y} & 0 \\ \dfrac{1}{J_x} & 0 & \dfrac{a_{4,2}}{J_x} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{a_{2,4}}{J_y} & 0 & \dfrac{\kappa - a_{2,1}}{J_y} & \dfrac{1}{J_x J_y} \\ \dfrac{\kappa - a_{4,3}}{J_x} & 0 & \kappa\dfrac{a_{4,2}}{J_x} & 0 & 0 \end{array}\right]}_{\mathbf{G}} \underbrace{\begin{bmatrix} f_{1,1} \\ f_{2,1} \\ f_{1,2} \\ f_{2,2} \\ \det\mathbf{F} \end{bmatrix}}_{\mathbf{r}}. \tag{5.8}$$

Так как $\operatorname{rank}\left(\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{4\times5}\right) = 4$, уравнение (5.8) всегда разрешимо относительно вектора $\mathbf{r}$. Запишем его общее параметризованное ($\omega \in \mathbb{R}$) решение (2.4):

$$\underbrace{\begin{bmatrix} f_{1,1} \\ f_{2,1}(\omega) \\ f_{1,2} \\ f_{2,2} \\ \det\mathbf{F}(\omega) \end{bmatrix}}_{\mathbf{r}(\omega)} = \underbrace{\begin{bmatrix} J_x\left(a_{2,1} - \dfrac{p_4^*}{a_{4,3}}\right) \\ J_y J_x^2 a_{2,4}\kappa_2 \\ J_x\left(a_{2,4} + \dfrac{1}{a_{4,2}}\left(a_{4,3} + p_2^* + \dfrac{p_4^*}{a_{4,3}}\right)\right) \\ J_y p_1^* \\ J_x J_y \kappa_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{G}^+\Delta\mathbf{p}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ J_y \\ 0 \\ 0 \\ -J_x J_y a_{2,4} \end{bmatrix}}_{\overline{\mathbf{G}}^R} \left(\omega - J_x^2 a_{2,4}\kappa_2\right),$$

где

$$\kappa_2 = \frac{p_3^* + a_{2,1}p_1^*}{1 + \left(J_x a_{2,4}\right)^2}.$$

Таким образом, должны одновременно выполняться равенства:

$$\mathbf{F}(\omega) = \left[\begin{array}{c:c} J_x & 0 \\ 0 & J_y \end{array}\right] \left[\begin{array}{c:c} a_{2,1} - \dfrac{p_4^*}{a_{4,3}} & a_{2,4} + \dfrac{1}{a_{4,2}}\left(a_{4,3} + p_2^* + \dfrac{p_4^*}{a_{4,3}}\right) \\ \omega & p_1^* \end{array}\right], \tag{5.9}$$

$$\det\mathbf{F}(\omega) = J_x J_y\left(p_3^* + a_{2,1}p_1^* - a_{2,4}\omega\right).$$

Матрица $\mathbf{F}$ и определитель $\det\mathbf{F}$ зависят от параметра ω. Запишем уравнение связи (2.7):

$$-\omega\left(a_{4,3}^2 + p_2^* a_{4,3} + p_4^*\right) = a_{4,2}\left(p_3^* a_{4,3} + p_1^* p_4^*\right).$$

Отсюда находим подходящее значение параметра:

$$\omega = -a_{4,2}\frac{p_3^* a_{4,3} + p_1^* p_4^*}{a_{4,3}^2 + p_2^* a_{4,3} + p_4^*}.$$

Подставив значение ω в формулу (5.9), получим матрицу регулятора по выходу:

$$\mathbf{F} = \left[\begin{array}{c:c} J_x & 0 \\ 0 & J_y \end{array}\right] \left[\begin{array}{c:c} a_{2,1} - \dfrac{p_4^*}{a_{4,3}} & a_{2,4} + \dfrac{1}{a_{4,2}}\left(a_{4,3} + p_2^* + \dfrac{p_4^*}{a_{4,3}}\right) \\ -a_{4,2}\dfrac{p_3^* a_{4,3} + p_1^* p_4^*}{a_{4,3}^2 + p_2^* a_{4,3} + p_4^*} & p_1^* \end{array}\right]. \tag{5.10}$$

Как и в примере 3, матрица регулятора по выходу (5.10) единственна. Но для ее нахождения потребовалось решить уравнение (2.7), связывающее коэффициенты $r_1 = f_{1,\,1}$, $r_2(\omega) = f_{2,\,1}(\omega)$, $r_3 = f_{1,\,2}$ и $r_4 = f_{2,\,2}$ с определителем $r_5(\omega) = \det \mathbf{F}(\omega)$.

Регулятор (5.10) существует *не при любом* желаемом полиноме (1.3), а только с учетом неравенства (5.7) при условии

$$a_{4,\,2}a_{4,\,3}\left(a_{4,\,3}^2 + p_2^* a_{4,\,3} + p_4^*\right) \neq 0.$$

Выполним проверку решения (5.10) на совпадение характеристического полинома матрицы $\mathbf{A}^* = \mathbf{A} - \mathbf{BFC}$ с желаемым полиномом (1.3):

$$\det \mathbf{A}^* = \det\begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{p_4^*}{a_{4,\,3}} & \lambda & 0 & \dfrac{1}{a_{4,\,2}}\left(a_{4,\,3} + p_2^* + \dfrac{p_4^*}{a_{4,\,3}}\right) \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ -a_{4,\,2}\dfrac{p_3^* a_{4,\,3} + p_1^* p_4^*}{a_{4,\,3}^2 + p_2^* a_{4,\,3} + p_4^*} & -a_{4,\,2} & -a_{4,\,3} & \lambda + p_1^* \end{bmatrix} =$$

$$= \lambda\left(\lambda\left(\lambda\left(\lambda + p_1^*\right) - a_{4,\,3}\right) + \lambda\left(a_{4,\,3} + p_2^* + \frac{p_4^*}{a_{4,\,3}}\right)\right) -$$

$$-\frac{p_4^*}{a_{4,\,3}}\left(\lambda\left(\lambda + p_1^*\right) - a_{4,\,3}\right) + \frac{p_3^* a_{4,\,3} + p_1^* p_4^*}{a_{4,\,3}^2 + p_2^* a_{4,\,3} + p_4^*}\lambda\left(a_{4,\,3} + p_2^* + \frac{p_4^*}{a_{4,\,3}}\right) =$$

$$= \lambda^4 + p_1^*\lambda^3 + p_2^*\lambda^2 + p_4^* + \lambda\left(\frac{p_3^* a_{4,\,3} + p_1^* p_4^*}{a_{4,\,3}^2 + p_2^* a_{4,\,3} + p_4^*}\left(a_{4,\,3} + p_2^* + \frac{p_4^*}{a_{4,\,3}}\right) - \frac{p_1^* p_4^*}{a_{4,\,3}}\right) =$$

$$= \lambda^4 + p_1^*\lambda^3 + p_2^*\lambda^2 + p_3^*\lambda + p_4^*.$$

П р и м е р 5. Измеряются $\dot{\gamma}$ и $\dot{\psi}$. Уравнение наблюдения имеет вид

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \gamma(t) \\ \dot{\gamma}(t) \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \underbrace{\begin{bmatrix} \gamma(t) \\ \dot{\gamma}(t) \\ \psi(t) \\ \dot{\psi}(t) \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}(t)}. \tag{5.11}$$

Индекс наблюдаемости ЛСС (5.1), (5.11) равен двум, поскольку

$$\det \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline a_{2,\,1} & 0 & 0 & a_{2,\,4} \\ 0 & a_{4,\,2} & a_{4,\,3} & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{N}_2 = \left[\begin{smallmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{smallmatrix}\right]} \neq 0$$

при

$$a_{2,\,1}a_{4,\,3} \neq 0. \tag{5.12}$$

В силу *равных* индексов управляемости и наблюдаемости, ранее предложенные методы [7, 9, 10] неприменимы. Воспользуемся новым универсальным методом.

Составим уравнение (2.3) относительно параметров матрицы $\mathbf{F}$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} p_1^* \\ \kappa + p_2^* \\ \kappa p_1^* + p_3^* \\ \kappa^2 + \kappa p_2^* + p_4^* - a_{2,1}a_{4,3} \end{bmatrix}}_{\Delta\mathbf{p}} = \underbrace{\left[\begin{array}{c:c:c:c:c} \dfrac{1}{J_x} & 0 & 0 & \dfrac{1}{J_y} & 0 \\ 0 & \dfrac{a_{2,4}}{J_y} & \dfrac{a_{4,2}}{J_x} & 0 & \dfrac{1}{J_xJ_y} \\ \dfrac{\kappa - a_{4,3}}{J_x} & 0 & 0 & \dfrac{\kappa - a_{2,1}}{J_y} & 0 \\ 0 & \kappa\dfrac{a_{2,4}}{J_y} & \kappa\dfrac{a_{4,2}}{J_x} & 0 & \dfrac{\kappa}{J_xJ_y} \end{array}\right]}_{\mathbf{G}} \underbrace{\begin{bmatrix} f_{1,1} \\ f_{2,1} \\ f_{1,2} \\ f_{2,2} \\ \det\mathbf{F} \end{bmatrix}}_{\mathbf{r}}. \tag{5.13}$$

Вторая и четвертая строки матрицы $\mathbf{G}$ в уравнении (5.13) всегда линейно зависимы, а первая и третья строки линейно зависимы, если $a_{2,1} = a_{4,3}$. Поэтому

$$\operatorname{rank}\left(\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{4\times 5}\right) = \begin{cases} 3, & a_{2,1} \neq a_{4,3}, \\ 2, & a_{2,1} = a_{4,3}. \end{cases}$$

Таким образом, матрица $\mathbf{G}$ имеет *неполный* ранг $\operatorname{rank}\mathbf{G} < 4$, и уравнение (5.13) разрешимо относительно вектора $\mathbf{r}$ лишь при условии (2.10):

случай $a_{2,1} \neq a_{4,3}$:

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c:c:c:c} 0 & -\kappa & 0 & 1 \end{array}\right]}_{\bar{\mathbf{G}}^L} \underbrace{\begin{bmatrix} p_1^* \\ \kappa + p_2^* \\ \kappa p_1^* + p_3^* \\ \kappa^2 + \kappa p_2^* + p_4^* - a_{2,1}a_{4,3} \end{bmatrix}}_{\Delta\mathbf{p}} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_4^* = a_{2,1}a_{4,3}, \tag{5.14}$$

случай $a_{2,1} = a_{4,3}$:

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c:c:c:c} 0 & -\kappa & 0 & 1 \\ a_{2,1} - \kappa & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]}_{\bar{\mathbf{G}}^L} \underbrace{\begin{bmatrix} p_1^* \\ \kappa + p_2^* \\ \kappa p_1^* + p_3^* \\ \kappa^2 + \kappa p_2^* + p_4^* - a_{2,1}^2 \end{bmatrix}}_{\Delta\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} p_3^* \\ p_4^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_{2,1}p_1^* \\ a_{2,1}^2 \end{bmatrix}. \tag{5.15}$$

Рассмотрим случай (5.14). Запишем общее параметризованное (ω_2, $\omega_3 \in \mathbb{R}$) решение уравнения (5.13), аналогичное решению (2.4):

$$\underbrace{\begin{bmatrix} f_{1,1} \\ f_{2,1}(\omega_2) \\ f_{1,2}(\omega_3) \\ f_{2,2} \\ \det\mathbf{F}(\omega_2, \omega_3) \end{bmatrix}}_{\mathbf{r}(\omega_1, \omega_2)} = \underbrace{\begin{bmatrix} J_x\kappa_1 \\ J_yJ_x^2a_{2,4}\tilde{\kappa}_2 \\ J_xJ_y^2a_{4,2}\tilde{\kappa}_2 \\ J_y\left(p_1^* - \kappa_1\right) \\ J_xJ_y\tilde{\kappa}_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{G}^+\Delta\mathbf{p}} + \underbrace{\left[\begin{array}{c:c} 0 & 0 \\ J_y & 0 \\ 0 & J_x \\ 0 & 0 \\ -J_xJ_ya_{2,4} & -J_xJ_ya_{4,2} \end{array}\right]}_{\bar{\mathbf{G}}^R} \begin{bmatrix} \omega_2 + a_{4,2} - J_x^2a_{2,4}\tilde{\kappa}_2 \\ \omega_3 + a_{2,4} - J_y^2a_{4,2}\tilde{\kappa}_2 \end{bmatrix},$$

где

$$\kappa_1 = \frac{p_3^* + a_{2,1}p_1^*}{a_{2,1} - a_{4,3}}, \quad \tilde{\kappa}_2 = \frac{\kappa + p_2^*}{1 + \left(J_xa_{2,4}\right)^2 + \left(J_ya_{4,2}\right)^2}.$$

Таким образом, должны одновременно выполняться равенства:

$$\mathbf{F}(\omega_2,\omega_3)=\begin{bmatrix} J_x & 0 \\ 0 & J_y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \kappa_1 & a_{2,4}+\omega_3 \\ a_{4,2}+\omega_2 & p_1^*-\kappa_1 \end{bmatrix}, \tag{5.16}$$

$$\det \mathbf{F}(\omega_2,\omega_3)=J_xJ_y\left(a_{2,1}+a_{4,3}+p_2^*-a_{2,4}\omega_2-a_{4,2}\omega_3-a_{2,4}a_{4,2}\right).$$

Матрица $\mathbf{F}$ и определитель $\det\mathbf{F}$ зависят от параметров ω_2 и ω_3. Запишем уравнение связи (2.7):

$$\kappa_1\left(p_1^*-\kappa_1\right)-\omega_2\omega_3-a_{2,1}-a_{4,3}=p_2^*. \tag{5.17}$$

Объединив формулу (5.16) с условиями (5.14) и (5.17), получим параметризованное множество матриц регуляторов по выходу:

$$\begin{gathered}\mathbf{F}(\omega_2,\omega_3)=\begin{bmatrix} J_x & 0 \\ 0 & J_y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \kappa_1 & a_{2,4}+\omega_3 \\ a_{4,2}+\omega_2 & p_1^*-\kappa_1 \end{bmatrix},\quad \kappa_1=\frac{p_3^*+a_{2,1}p_1^*}{a_{2,1}-a_{4,3}},\\ a_{2,1}\neq a_{4,3},\quad p_4^*=a_{2,1}a_{4,3},\\ \omega_2\omega_3=\kappa_1\left(p_1^*-\kappa_1\right)-p_2^*-a_{2,1}-a_{4,3}.\end{gathered} \tag{5.18}$$

Выполним проверку решения (5.18) на совпадение характеристического полинома матрицы $\mathbf{A}^*=\mathbf{A}-\mathbf{BFC}$ с желаемым полиномом (1.3):

$$\det\mathbf{A}^*=\det\begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ -a_{2,1} & \lambda+\kappa_1 & 0 & \omega_3 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 0 & \omega_2 & -a_{4,3} & \lambda+p_1^*-\kappa_1 \end{bmatrix}=$$

$$=\lambda^4+p_1^*\lambda^3+\underbrace{\left(\kappa_1\left(p_1^*-\kappa_1\right)-a_{2,1}-a_{4,3}-\omega_2\omega_3\right)}_{p_2^*}\lambda^2+p_3^*\lambda+\underbrace{a_{2,1}a_{4,3}}_{p_4^*}.$$

Рассмотрим случай (5.15). Запишем общее параметризованное (ω_1, ω_2, $\omega_3\in\mathbb{R}$) решение уравнения (5.13), аналогичное решению (2.4):

$$\underbrace{\begin{bmatrix} f_{1,1}(\omega_3) \\ f_{2,1}(\omega_1) \\ f_{1,2}(\omega_2) \\ f_{2,2}(\omega_3) \\ \det\mathbf{F}(\omega_1,\omega_2) \end{bmatrix}}_{\mathbf{r}(\omega_1,\omega_2,\omega_3)}=\underbrace{\begin{bmatrix} J_x\tilde{\kappa}_1 \\ J_yJ_x^2a_{2,4}\tilde{\kappa}_2 \\ J_xJ_y^2a_{4,2}\tilde{\kappa}_2 \\ J_y\left(p_1^*-\tilde{\kappa}_1\right) \\ J_xJ_y\tilde{\kappa}_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{G}^+\Delta\mathbf{p}}+\underbrace{\begin{bmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_x \\ -J_y & 0 & 0 \\ 0 & -J_xJ_ya_{2,4} & -J_xJ_ya_{4,2} \end{bmatrix}}_{\overline{\mathbf{G}}^R}\begin{bmatrix} \omega_1-\tilde{\kappa}_1 \\ \omega_2+a_{4,2}-J_x^2a_{2,4}\tilde{\kappa}_2 \\ \omega_3+a_{2,4}-J_y^2a_{4,2}\tilde{\kappa}_2 \end{bmatrix},$$

где

$$\tilde{\kappa}_1=\frac{J_y^2p_1^*}{J_x^2+J_y^2}.$$

Таким образом, должны одновременно выполняться равенства:

$$\mathbf{F}(\omega_1,\omega_2,\omega_3)=\begin{bmatrix} J_x & 0 \\ 0 & J_y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \omega_1 & a_{2,4}+\omega_3 \\ a_{4,2}+\omega_2 & p_1^*-\omega_1 \end{bmatrix}, \tag{5.19}$$

$$\det\mathbf{F}(\omega_2,\omega_3)=J_xJ_y\left(2a_{2,1}+p_2^*-a_{2,4}\omega_2-a_{4,2}\omega_3-a_{2,4}a_{4,2}\right).$$

Матрица $\mathbf{F}$ и определитель $\det\mathbf{F}$ зависят от параметров ω_1, ω_2 и ω_3. Запишем уравнение связи (2.7):

$$\omega_1\left(p_1^*-\omega_1\right)-\omega_2\omega_3-2a_{2,1}=p_2^*. \tag{5.20}$$

Объединив формулу (5.19) с условиями (5.15) и (5.20), получим параметризованное множество матриц регуляторов по выходу:

$$\begin{gathered}\mathbf{F}(\omega_1,\omega_2,\omega_3)=\begin{bmatrix}J_x & 0\\ 0 & J_y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega_1 & a_{2,4}+\omega_3\\ a_{4,2}+\omega_2 & p_1^*-\omega_1\end{bmatrix},\\ a_{4,3}=a_{2,1},\quad p_3^*=-a_{2,1}p_1^*,\quad p_4^*=a_{2,1}^2,\\ \omega_1\left(p_1^*-\omega_1\right)-\omega_2\omega_3-2a_{2,1}=p_2^*.\end{gathered} \tag{5.21}$$

Выполним проверку решения (5.21) на совпадение характеристического полинома матрицы $\mathbf{A}^*=\mathbf{A}-\mathbf{BFC}$ с желаемым полиномом (1.3):

$$\det\mathbf{A}^*=\det\begin{bmatrix}\lambda & -1 & 0 & 0\\ -a_{2,1} & \lambda+\omega_1 & 0 & \omega_3\\ 0 & 0 & \lambda & -1\\ 0 & \omega_2 & -a_{2,1} & \lambda+p_1^*-\omega_1\end{bmatrix}=$$

$$=\lambda^4+p_1^*\lambda^3+\underbrace{\left(\omega_1\left(p_1^*-\omega_1\right)-\omega_2\omega_3-2a_{2,1}\right)}_{p_2^*}\lambda^2+\underbrace{\left(-a_{2,1}p_1^*\right)}_{p_3^*}\lambda+\underbrace{a_{2,1}^2}_{p_4^*}.$$

Заключение. Предложен универсальный метод модального управления по выходу для линейных стационарных систем четвертого порядка с двумя входами и двумя выходами. Метод не ограничен в применимости – если соответствующая задача модального управления по выходу разрешима, то все ее решения определяются с помощью предложенного метода. Метод построен на зависимости коэффициентов характеристического полинома замкнутой системы управления от коэффициентов матрицы регулятора по выходу. Эта зависимость в удобном виде записывается через следы определенных матричных конструкций. Регулятор по выходу определяется аналитически с точностью до одного скалярного параметра путем решения линейного одностороннего матричного уравнения. Далее параметр находится из линейного или квадратного алгебраического уравнения связи между определителем матрицы регулятора по выходу и ее коэффициентами.

Получен критерий полной модальной управляемости по выходу для линейных стационарных систем четвертого порядка. Критерий представляет собой условие, при котором указанная задача модального управления по выходу разрешима для любого желаемого полинома. Кроме того, показано, что даже если критерий не выполняется, при подавляющем большинстве желаемых полиномов (хоть и не при абсолютно любых полиномах) задача имеет одно или два решения. В аналитическом выражении для матрицы регулятора коэффициенты желаемого характеристического полинома могут попадать в знаменатель или под квадратный корень. Названы варианты желаемых полиномов, при которых множество решений рассматриваемой задачи, оставаясь счетным, расширяется до бесконечности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Zubov N.E., Mikrin E.A., Ryabchenko V.N., Proletarskii A.V.* Analytical Synthesis of Control Laws for Lateral Motion of Aircraft // Russian Aeronautics. 2015. V. 58. Iss. 3. P. 263–270. https://doi.org/10.3103/S1068799815030034
2. *Zubov N.E., Ryabchenko V.N., Sorokin I.V.* Output Control of the Longitudinal Motion Spectrum of a Single-Rotor Helicopter // Russian Aeronautics. 2020. V. 63. Iss. 2. P. 249–259. https://doi.org/10.3103/S1068799820030319
3. *Zubov N.E., Mikrin E.A., Ryabchenko V.N., Fomichev A.V.* Synthesis of Control Laws for Aircraft Lateral Motion at the Lack of Data on the Slip Angle: Analytical Solution // Russian Aeronautics. 2017. V. 60. Iss. 1. P. 64–73. https://doi.org/10.3103/S106879981701010X

4. *Lapin A.V., Zubov N.E.* Minimization of Control Signals at Stabilizing Spatial Motion of a Maneuverable Aircraft // Intern. Russian Automation Conf. Sochi, 2020. P. 202–208.
https://doi.org/10.1109/RusAutoCon49822.2020.9208159
5. *Zubov N.E., Lapin A.V., Mikrin E.A., Ryabchenko V.N.* Output Control of the Spectrum of a Linear Dynamic System in Terms of the Van der Woude Method // Doklady Mathematics. 2017. V. 96. Iss. 2. P. 457–460.
https://doi.org/10.1134/S1064562417050179
6. *Van der Woude J.W.* A Note on Pole Placement by Static Output Feedback for Single-Input Systems // Systems & Control Letters. 1988. V. 11. Iss. 4. P. 285–287.
https://doi.org/10.1016/0167-6911(88)90072-2
7. *Лапин А.В., Зубов Н.Е.* Стабилизация орбитальной ориентации космического аппарата во взаимосвязанных каналах крена и рысканья при отсутствии измерений угла и угловой скорости рысканья // XLVII Академические чтения по космонавтике. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2023. Т. 3. С. 146–149.
8. *Лапин А.В., Зубов Н.Е., Пролетарский А.В.* Обобщение формулы Аккермана для некоторого класса многомерных динамических систем с векторным входом // Вестн. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2023. № 4 (109). С. 18–38.
https://doi.org/10.18698/1812-3368-2023-4-18-38
9. *Zubov N.E., Lapin A.V.* Reducing the Problem of the Modal Control by Output for Stationary Forth-Order Systems with Two Inputs and Two Outputs to the Control by State for a System with a Single Input // J. Comput. Syst. Sci. Int. 2023. V. 62. Iss. 1. P. 43–60.
https://doi.org/10.1134/S1064230723010124
10. *Zubov N.E., Zybin E.Yu., Lapin A.V.* Analytical Synthesis of an Aircraft's Lateral Motion Control by Output at the Lack of Measurements of Slip and Roll Angles // J. Comput. Syst. Sci. Int. 2023. V. 62. Iss. 2. P. 354–361.
https://doi.org/10.1134/S1064230723020193
11. *Zubov N.E., Lapin A.V.* On One Approach to the Analytic Synthesis of Modal Control by Output for Fourth-Order Dynamic Systems with Two Inputs and Two Outputs // J. Comput. Syst. Sci. Int. 2024. V. 63. Iss. 4. P. 561–577.
https://doi.org/10.1134/S1064230724700424
12. *Zubov N.E., Lapin A.V., Mikrin E.A.* Synthesis of Decoupling Laws for Controlling the Angular Motion of Landing Module with Solid-Fuel Landing Engine Minimizing the Transient Time // J. Comput. Syst. Sci. Int. 2013. V. 52. Iss. 3. P. 480–490.
https://doi.org/10.1134/S1064230713030179
13. *Zubov N.E., Lapin A.V., Ryabchenko V.N.* Analytical Synthesis of a Modal Controller by Output Vector for Attitude Control of a Descent Module during its Descent in the Earth's Atmosphere // Russian Aeronautics. 2019. V. 62. Iss. 3. P. 401–416.
https://doi.org/10.3103/S1068799819030073
14. *Glasov V.V., Kosyanchuk V.V., Lapin A.V., Zybin E.Yu., Karpenko S.S., Lelikov A.M.* Reconfiguration of High-Speed Rotorcraft Flight Control System by Data-Based Methods Under Disturbances // XX Technical Scientific Conf. on Aviation Dedicated to the Memory of N. E. Zhukovsky. Moscow, 2023. P. 13–17.
https://doi.org/10.1109/TSCZh58792.2023.10233429
15. *Lapin A.V., Zubov N.E.* Generalization of Bass – Gura Formula for Linear Dynamic Systems with Vector Control // Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences. 2020. V. 89. Iss. 2. P. 41–64.
https://doi.org/10.18698/1812-3368-2020-2-41-64
16. *Желтов С.Ю., Каляев И.А., Косьянчук В.В., Мельник Э.В., Зыбин Е.Ю.* Реконфигурация систем управления воздушных судов. М.: РАН, 2021. 204 с.
17. *Зубов Н.Е., Микрин Е.А., Рябченко В.Н.* Матричные методы в теории и практике систем автоматического управления летательных аппаратов. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2016. 666 с.
18. *Bass R.W., Gura I.* High Order System Design via State-Space Considerations // IEEE Transactions on Autom. Control. 1965. V. 3. Iss. 3. P. 311–318.
https://doi.org/10.1109/JACC.1965.4168784
19. *Lapin A.V., Zubov N.E., Proletarskii A.V.* Parametric Minimization of Controller Matrix Norm at Stabilizing Spatial Motion of a Maneuverable Aircraft // 7th Intern. Conf. on Control, Decision and Information Technologies. Prague, Czech Republic, 2020. P. 415–420.
https://doi.org/10.1109/CoDIT49905.2020.9263844
20. *Borisenko N.Yu., Sumarokov A.V.* On the Rapid Orbital Attitude Control of Manned and Cargo Spacecraft Soyuz MS and Progress MS // J. Comput. Syst. Sci. Int. 2017. V. 56. Iss. 5. P. 886–895.
https://doi.org/10.1134/S1064230717050033