

УДК 517.977

УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ ТОЧЕЧНОГО ОБЪЕКТА В ВЯЗКОЙ СРЕДЕ ПОСРЕДСТВОМ ОГРАНИЧЕННОЙ СИЛЫ¹

© 2025 г. А. М. Шматков*

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

**e-mail: shmatkov@ipmnet.ru*

Поступила в редакцию 12.12.2024 г.

После доработки 19.12.2024 г.

Принята к публикации 24.02.2025 г.

В аналитическом виде построено решение трехмерной задачи оптимального быстродействия для точечного объекта, движущегося в вязкой среде под действием ограниченной по модулю управляющей силы при наличии однородной силы тяжести. Для общего случая найдены выражения в элементарных функциях, включающие в себя два неизвестных постоянных вектора, которые должны быть найдены из граничных условий. В случае, когда конечное положение объекта не задано, в аналитическом виде найдены все неизвестные векторы. Приведен пример использования полученных соотношений, для которого все необходимые физические величины заменены одним безразмерным параметром.

Ключевые слова: оптимальное быстродействие, вязкая среда, пространственное движение

DOI: 10.31857/S0002338825020026, EDN: ARMKBL

CONTROL OF THE MOTION OF A POINT OBJECT IN A VISCOUS MEDIUM USING LIMITED FORCE

A. M. Shmatkov*

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia

**e-mail: shmatkov@ipmnet.ru*

A solution to a three-dimensional case of a time-optimal control problem for a point object moving in a viscous medium under the action of a control force limited in magnitude in the presence of uniform gravity is constructed in analytical form. For the general case, expressions are found in elementary functions that include two unknown constant vectors that must be found from the boundary conditions. In the case where the final position of the object is not specified, all unknown vectors are found in analytical form. An example of using the obtained relations is given, for which all necessary physical quantities are replaced by one dimensionless parameter.

Keywords: optimal performance, viscous medium, spatial motion

Введение. Оптимальные решения задач управления [1, 2] позволяют повысить качество математических моделей устройств, применяемых в технике, для улучшения характеристик соответствующих систем, работающих в различных условиях. В математических моделях часто используют громоздкие соотношения и весьма сложные фазовые ограничения, что делает крайне затруднительным решение соответствующих уравнений принципа максимума Л.С. Понтрягина [1] и вынуждает применять весьма требовательный к ресурсам компьютера метод динамического программирования Р. Беллмана [3, 4]. Кроме того, при поиске оптимальных решений с помощью принципа максимума для данных соотношений приходится рассматривать, как правило, краевую нелинейную задачу в пространстве удвоенной размерности, возникающем при введении сопряженных переменных. В подавляющем большинстве случаев это можно сделать только численно. Однако для приложений необходимо построение опорных управлений и оценок свойств оптимальных движений, что требует аналитических решений. Отсюда возникает необходимость компромисса между точностью, с которой

¹ Работа выполнена по теме государственного задания (госрегистрация № 124012500443-0).

математическая модель описывает реальный объект, и возможностью получения результатов в аналитической форме. Такой компромисс обычно достигается за счет упрощающих предположений относительно структуры объекта, вида и формы наложенных на него ограничений. И даже для простой на вид математической модели решение задачи оптимального управления может иметь нетривиальный характер [5].

В работе рассмотрено пространственное движение точечного объекта в среде с вязким трением при наличии однородной силы гравитации. Будем считать, что модуль силы управления ограничен известной величиной и требуется найти зависимость векторов координат и скорости от времени для задачи оптимального быстрогодействия [1]. Классические результаты в случае одномерного движения можно найти в [1, 2]. В [6] одномерное движение рассмотрено при наличии малых возмущений произвольной природы. Исследование неоднородных случаев в отсутствие силы тяжести с самого начала потребовало численного исследования [7]. Несмотря на то, что в дальнейшем удалось получить некоторые аналитические результаты [8, 9], построение зависимости оптимальных движений от времени было выполнено только компьютерными методами. Ниже показано, что можно получить некоторые аналитические выражения для несколько более общей задачи.

1. Постановка задачи. Рассмотрим уравнение Ньютона для точечного объекта

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_u + \mathbf{F}_\gamma + \mathbf{F}_a, \quad (1.1)$$

где m – масса материальной точки; \mathbf{r} – ее радиус-вектор в инерциальной системе координат; \mathbf{F}_u – вектор управляющей силы; \mathbf{F}_γ и \mathbf{F}_a – векторы сил гравитации и сопротивления среды соответственно. Предположим, что сила сопротивления среды направлена против вектора скорости \mathbf{v} объекта и прямо пропорциональна его величине с постоянным коэффициентом k_a , а сила гравитации задана соотношением $\mathbf{F}_\gamma = m\boldsymbol{\gamma}$, причем $\boldsymbol{\gamma}$ – соответствующее ускорение с модулем γ , направленное вертикально вниз для выбранной системы координат. Кроме того, пусть модуль вектора \mathbf{F}_u ограничен заранее заданной величиной, независимой от времени и равной F . Тогда равенство (1.1) можно записать в форме системы уравнений:

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}, \quad \dot{\mathbf{v}} = \frac{1}{m}\mathbf{u} + \boldsymbol{\gamma} - \frac{k_a}{m}\mathbf{v}, \quad |\mathbf{u}| \leq F, \quad (1.2)$$

где вектор \mathbf{u} – искомое управление.

Пусть необходимо решить для системы (1.2) задачу оптимального быстрогодействия, отыскав минимум функционала:

$$J = T \rightarrow \min, \quad (1.3)$$

где T – неизвестный конечный момент времени. Различные варианты граничных условий будут рассмотрены ниже.

2. Поиск оптимального решения. Введем гамильтониан [1]

$$H = (\mathbf{p}_r, \mathbf{v}) + (\mathbf{p}_v, \mathbf{u}) \frac{1}{m} + (\mathbf{p}_v, \boldsymbol{\gamma}) - (\mathbf{p}_v, \mathbf{v}) \frac{k_a}{m}, \quad (2.1)$$

где векторы \mathbf{p}_r и \mathbf{p}_v являются сопряженными с векторами \mathbf{r} и \mathbf{v} соответственно, а с помощью (\cdot, \cdot) обозначено скалярное произведение векторов. Используя гамильтониан (2.1), получим уравнения для сопряженных переменных:

$$\dot{\mathbf{p}}_r = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}} = 0, \quad \dot{\mathbf{p}}_v = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{v}} = -\mathbf{p}_r + \frac{k_a}{m}\mathbf{p}_v. \quad (2.2)$$

Из первого дифференциального уравнения в формулах (2.2) следует, что вектор \mathbf{p}_r не зависит от времени, а решив второе, имеем

$$\mathbf{p}_v = \mathbf{c}_1 \exp\left(\frac{k_a}{m}t\right) + \mathbf{c}_2, \quad \mathbf{c}_2 = \frac{m}{k_a}\mathbf{p}_r, \quad (2.3)$$

где \mathbf{c}_1 и \mathbf{c}_2 – неизвестные постоянные векторы. В соответствии с принципом максимума [1] искомое экстремальное управление доставляет функции (2.1) максимум. Поскольку значение t всегда положительно, то скалярное произведение $(\mathbf{p}_v, \mathbf{u})$ должно быть максимально при условии $|\mathbf{u}| \leq F$. Следовательно, оптимальное управление задано равенством $\mathbf{u}_* = F\mathbf{p}_v/|\mathbf{p}_v|$. Тогда второе уравнение в формулах (1.2) приобретает вид

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{F}{m} \frac{\mathbf{p}_v}{|\mathbf{p}_v|} + \boldsymbol{\gamma} - \frac{k_a}{m}\mathbf{v}, \quad (2.4)$$

где вектор \mathbf{p}_v задан соотношением (2.3). Произведем замену времени

$$\tau = \exp\left(\frac{k_a t}{m}\right). \quad (2.5)$$

Используя решение (2.3) и определение (2.5), запишем равенство (2.4) в форме

$$\tau \frac{d\mathbf{v}}{d\tau} = \frac{F}{k_a} \frac{\mathbf{c}_1 \tau + \mathbf{c}_2}{|\mathbf{c}_1 \tau + \mathbf{c}_2|} + \frac{m}{k_a} \gamma - \mathbf{v}. \quad (2.6)$$

Дифференциальное уравнение (2.6) можно преобразовать к виду

$$\frac{d(\mathbf{v}\tau)}{d\tau} = \frac{F}{k_a} \frac{\mathbf{c}_1 \tau + \mathbf{c}_2}{|\mathbf{c}_1 \tau + \mathbf{c}_2|} + \frac{m}{k_a} \gamma. \quad (2.7)$$

Введем обозначения:

$$a = c_{2x}^2 + c_{2y}^2 + c_{2z}^2, \quad c = c_{1x}^2 + c_{1y}^2 + c_{1z}^2, \quad b = 2(c_{1x}c_{2x} + c_{1y}c_{2y} + c_{1z}c_{2z}). \quad (2.8)$$

Заметим, что в силу принципа максимума постоянные векторы \mathbf{c}_1 и \mathbf{c}_2 не могут быть нулевыми одновременно. При рассмотрении общего случая будем полагать, что ни один из этих двух векторов не равен нулю, а соответствующие частные случаи исследуем отдельно. Тогда величины a и c не равны нулю. Применяя обозначения (2.8), из соотношения (2.7) для компоненты v_x вектора \mathbf{v} имеем

$$v_x = \frac{F}{\tau k_a} \int \frac{c_{1x}\tau + c_{2x}}{\sqrt{a + b\tau + c\tau^2}} d\tau. \quad (2.9)$$

Заметим [10], что

$$\int \frac{\tau}{\sqrt{a + b\tau + c\tau^2}} d\tau = \frac{\sqrt{a + b\tau + c\tau^2}}{c} - \frac{b}{2c} \int \frac{1}{\sqrt{a + b\tau + c\tau^2}} d\tau, \quad (2.10)$$

а также [10], что

$$\int \frac{1}{\sqrt{a + b\tau + c\tau^2}} d\tau = \frac{1}{\sqrt{c}} \operatorname{Arsh} \frac{2c\tau + b}{\sqrt{4ac - b^2}} + \text{const}, \quad (2.11)$$

поскольку $c > 0$ и $4ac - b^2 > 0$. Используя равенства (2.10) и (2.11), получаем для интеграла (2.9)

$$v_x = \frac{F}{\tau k_a c} \left(c_{1x} \sqrt{a + b\tau + c\tau^2} + \frac{2cc_{2x} - c_{1x}b}{2\sqrt{c}} \operatorname{Arsh} \frac{2c\tau + b}{\sqrt{4ac - b^2}} \right) + \frac{c_{ix}}{\tau}, \quad (2.12)$$

где c_{ix} — константа интегрирования, которую будем рассматривать как компоненту постоянного вектора \mathbf{c}_v .

Теперь найдем компоненту r_x вектора \mathbf{r} . Из первого уравнения в формулах (1.2) с учетом замены (2.5) независимой переменной имеем

$$r_x = \int v_x dt = \frac{m}{k_a} \int \frac{v_x}{\tau} d\tau. \quad (2.13)$$

Можно показать, что

$$\begin{aligned} -\int \frac{1}{\tau^2} \operatorname{Arsh}(a_r \tau + b_r) d\tau &= \int \operatorname{Arsh}\left(\frac{a_r}{s} + b_r\right) ds = \\ &= \frac{a_r}{\sqrt{1 + b_r^2}} \ln \frac{2}{a_r} \left(a_r b_r + s(1 + b_r^2) + \sqrt{1 + b_r^2} \sqrt{s^2 + (a_r + b_r s)^2} \right) + s \operatorname{Arsh}\left(\frac{a_r}{s} + b_r\right) + \text{const}, \\ s &= \frac{1}{\tau}, \quad a_r = \frac{2c}{\sqrt{4ac - b^2}}, \quad b_r = \frac{b}{\sqrt{4ac - b^2}}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Поскольку [10]

$$-\int \frac{\sqrt{a + b\tau + c\tau^2}}{\tau^2} d\tau = \frac{\sqrt{a + b\tau + c\tau^2}}{\tau} - \frac{b}{2} \int \frac{1}{\tau \sqrt{a + b\tau + c\tau^2}} d\tau - c \int \frac{1}{\sqrt{a + b\tau + c\tau^2}} d\tau, \quad (2.15)$$

причем для $a > 0$ и $4ac - b^2 > 0$

$$\int \frac{1}{\tau \sqrt{a + b\tau + c\tau^2}} d\tau = -\frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{Arsh} \frac{2a + b\tau}{\tau \sqrt{4ac - b^2}} + \operatorname{const}, \quad (2.16)$$

то можно записать интеграл (2.15) в форме

$$-\int \frac{\sqrt{a + b\tau + c\tau^2}}{\tau^2} d\tau = \frac{\sqrt{a + b\tau + c\tau^2}}{\tau} + \frac{b}{2\sqrt{a}} \operatorname{Arsh} \frac{2a + b\tau}{\tau \sqrt{4ac - b^2}} - \sqrt{c} \operatorname{Arsh}(a_r \tau + b_r) + \operatorname{const}, \quad (2.17)$$

где, помимо соотношения (2.16), использовано равенство (2.11). После подстановки в формулу (2.13) сначала выражения (2.12), а затем интегралов (2.14) и (2.17) получаем

$$\begin{aligned} r_x = & \frac{mFc_{1x}}{k_a^2 c} \left(\sqrt{c} \operatorname{Arsh}(a_r \tau + b_r) - \frac{b}{2\sqrt{a}} \operatorname{Arsh} \frac{2a + b\tau}{\tau \sqrt{4ac - b^2}} - \frac{\sqrt{a + b\tau + c\tau^2}}{\tau} \right) - \\ & - \frac{mF}{k_a^2 \sqrt{c}} \left(c_{2x} - \frac{bc_{1x}}{2c} \right) \times \\ & \times \left(\frac{1}{\tau} \operatorname{Arsh}(a_r \tau + b_r) + \frac{a_r}{\sqrt{1 + b_r^2}} \ln \frac{2}{a_r \tau} \left(1 + b_r^2 + a_r b_r \tau + \sqrt{1 + b_r^2} \sqrt{1 + (a_r \tau + b_r)^2} \right) \right) - \\ & - \frac{mc_{vx}}{k_a \tau} + c_{rx}, \end{aligned} \quad (2.18)$$

где c_{rx} – константа интегрирования, которую будем рассматривать как компоненту постоянного вектора \mathbf{c}_r .

Из соображений симметрии следует, что выражения для компонент v_y и r_y совпадают с выражениями (2.12) и (2.18), если в последних заменить явно входящие константы c_{1x} , c_{2x} , c_{vx} и c_{rx} на константы c_{1y} , c_{2y} , c_{vy} и c_{ry} соответственно.

Для компоненты v_z из дифференциального уравнения (2.7) имеем

$$v_z = \frac{F}{\tau k_a} \int \frac{c_{1z} \tau + c_{2z}}{\sqrt{a + b\tau + c\tau^2}} d\tau - \frac{m\gamma}{\tau k_a} \int d\tau. \quad (2.19)$$

Если сравнить выражение (2.9) с формулой (2.19), то можно заметить, что соотношение для компоненты v_z получается из равенства (2.12) заменой явно входящих постоянных c_{1x} , c_{2x} , и c_{vx} на соответствующие постоянные c_{1z} , c_{2z} , и c_{vz} , а также добавлением слагаемого $-m\gamma/k_a$. Тогда, согласно формуле (2.19), выражение для компоненты r_z получается из выражения (2.18) добавлением слагаемого $-(m^2\gamma/k_a^2) \ln \tau$ и соответствующей заменой констант.

Полученное решение зависит от четырех неизвестных постоянных векторов: \mathbf{c}_1 , \mathbf{c}_2 , \mathbf{c}_v и \mathbf{c}_r . Пусть граничные условия для задачи (1.2), (1.3) даны в форме

$$\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0, \quad \mathbf{v}(t_0) = \mathbf{v}_0, \quad \mathbf{r}(T) = \mathbf{r}_T, \quad \mathbf{v}(T) = \mathbf{v}_T,$$

где t_0 – начальный момент времени. Тогда можно, например, сначала решить систему из шести линейных алгебраических уравнений относительно компонент векторов \mathbf{c}_v и \mathbf{c}_x , состоящую из соотношения (2.18) и аналогичных ему для остальных компонент вектора \mathbf{r} , взятых в начальный и конечный моменты времени. В результате векторы \mathbf{c}_v и \mathbf{c}_x окажутся выражены через неизвестные векторы \mathbf{c}_1 и \mathbf{c}_2 . Последние можно найти, решив еще одну систему из шести алгебраических уравнений, но теперь уже нелинейных. Ее можно записать, используя соотношение (2.12) и аналогичные ему для остальных компонент вектора \mathbf{v} , взятых в начальный и конечный моменты времени.

Для поиска неизвестного момента времени T обратим внимание [1] на то, что на оптимальной траектории гамильтониан (2.1) равен константе $p_0 \geq 0$. Если постоянная p_0 равна нулю, то выражение (2.1) с подставленным в него оптимальным управлением $\mathbf{u}_* = \mathbf{p}_v / |\mathbf{p}_v|$ сразу превращается в уравнение для вычисления значения T . Если же величина p_0 положительна, то, как видно из формулы (2.1) для случая $H = p_0$, можно разделить обе ее части на значение p_0 . Это эквивалентно замене векторов $\mathbf{c}_1 \rightarrow \mathbf{c}_1/p_0$ и $\mathbf{c}_2 \rightarrow \mathbf{c}_2/p_0$, что ничего не меняет в описанной

выше процедуре поиска четырех неизвестных постоянных векторов. Итак, при $p_0 > 0$ значение T можно искать из уравнения $H = 1$.

3. Вырожденный случай. Как видно, в частности, из соотношения (2.12), для применения полученных результатов необходимо, чтобы величина $4ac - b^2$ была ненулевой. Однако, согласно введенным в формулах (2.3) и (2.8) обозначениям, это не так, если является нулевой постоянной c_1 . В этом случае вектор \mathbf{u}_* не меняется с течением времени, т.е. сила \mathbf{F}_u постоянна. Тогда материальная точка движется по оптимальной траектории под действием неизменных сил \mathbf{F}_u и \mathbf{F}_γ , а также силы сопротивления среды \mathbf{F}_a .

Теперь предположим, что равна нулю постоянная c_2 . Тогда вектор \mathbf{p}_* , сопряженный к вектору \mathbf{r} , также нулевой. Последнее имеет место, например, вследствие условий трансверсальности, если на конечное положение управляемого точечного объекта не наложено никаких ограничений. Как видно из формул (2.3) и (2.4), в этой ситуации вектор силы управления также не меняется, а потому случаи равенства нулю постоянной c_1 или c_2 можно рассматривать как один и тот же. Для определенности будем полагать, что $c_2 = 0$. Тогда в обозначениях (2.8) величины a и b равны нулю, а интеграл (2.9) приобретает следующий вид:

$$v_x = \frac{F}{\tau k_a} \int \frac{c_{1x} \tau}{\sqrt{c} \tau^2} d\tau = \frac{F c_{1x}}{k_a \sqrt{c}} + \frac{c_{vx}}{\tau}. \quad (3.1)$$

Действуя по аналогии, из уравнения (2.7) можно получить

$$v_y = \frac{F c_{1y}}{k_a \sqrt{c}} + \frac{c_{vy}}{\tau}, \quad v_z = \frac{F c_{1z}}{k_a \sqrt{c}} + \frac{c_{vz}}{\tau} - \frac{m\gamma}{k_a}. \quad (3.2)$$

Для компоненты r_x из формулы (2.13) и аналогичных соотношений для компонент r_y и r_z имеем

$$\begin{aligned} r_x &= \frac{m F c_{1x}}{k_a^2 \sqrt{c}} \ln \tau - \frac{m c_{vx}}{k_a \tau} + c_{rx}, & r_y &= \frac{m F c_{1y}}{k_a^2 \sqrt{c}} \ln \tau - \frac{m c_{vy}}{k_a \tau} + c_{ry}, \\ r_z &= \frac{m}{k_a^2} \left(\frac{F c_{1z}}{\sqrt{c}} - m\gamma \right) \ln \tau - \frac{m c_{vz}}{k_a \tau} + c_{rz}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Пусть граничные условия для задачи (1.2), (1.3) даны в форме

$$\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0, \quad \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0, \quad \mathbf{v}(T) = \mathbf{v}_T. \quad (3.4)$$

Заметим, что вектор $\mathbf{r}(T)$ не задан. Согласно замене времени (2.5) начальному моменту $t_0 = 0$ соответствует значение $\tau = 1$, для которого из уравнений (3.1) и (3.2) имеем

$$c_{vx} = v_{0x} - \frac{F c_{1x}}{k_a \sqrt{c}}, \quad c_{vy} = v_{0y} - \frac{F c_{1y}}{k_a \sqrt{c}}, \quad c_{vz} = v_{0z} - \frac{F c_{1z}}{k_a \sqrt{c}} + \frac{m\gamma}{k_a}, \quad (3.5)$$

где v_{0x} , v_{0y} и v_{0z} — компоненты начального вектора скорости \mathbf{v}_0 . В конечный момент времени T из уравнений (3.1), (3.2) и (3.5) имеем

$$\frac{F c_{1x}}{k_a \sqrt{c}} = \frac{v_{Tx} \tau_T - v_{0x}}{\tau_T - 1}, \quad \frac{F c_{1y}}{k_a \sqrt{c}} = \frac{v_{Ty} \tau_T - v_{0y}}{\tau_T - 1}, \quad \frac{F c_{1z}}{k_a \sqrt{c}} = \frac{v_{Tz} \tau_T - v_{0z}}{\tau_T - 1} + \frac{m\gamma}{k_a}, \quad (3.6)$$

где v_{Tx} , v_{Ty} и v_{Tz} — компоненты конечного вектора скорости \mathbf{v}_T и введено обозначение $\tau_T = \exp(k_a T/m)$. Подставим выражения (3.6) в формулы (3.5), (3.1) и (3.2). Тогда из двух последних имеем

$$\mathbf{v} = \frac{\tau_T}{\tau(\tau_T - 1)} (\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_T) - \frac{1}{\tau_T - 1} (\mathbf{v}_0 - \tau_T \mathbf{v}_T). \quad (3.7)$$

На основании граничных условий (3.4) систему (3.3) можно преобразовать к виду

$$\mathbf{r} = \frac{m \ln \tau}{k_a (\tau_T - 1)} (\tau_T \mathbf{v}_T - \mathbf{v}_0) + \frac{m \tau_T (\tau^{-1} - 1)}{k_a (\tau_T - 1)} (\mathbf{v}_T - \mathbf{v}_0) + \mathbf{r}_0. \quad (3.8)$$

Выражения (3.7) и (3.8) дают ответ для задачи (1.2), (1.3) при граничных условиях (3.4) с учетом замены (2.5), если известно значение τ_T . Это значение можно найти из квадратного уравнения:

$$\frac{F^2}{k_a^2}(\tau_T - 1)^2 = (v_{Tx}\tau_T - v_{0x})^2 + (v_{Ty}\tau_T - v_{0y})^2 + \left(v_{Tz}\tau_T - v_{0z} + \frac{m\gamma}{k_a}(\tau_T - 1) \right)^2, \quad (3.9)$$

которое получается, если возвести в квадрат обе части каждого из трех равенств (3.6) и сложить соответствующие выражения. Заметим, что искомый корень должен быть больше единицы. Если окажется, что таких корней два, то нужно выбрать меньший из них. Тогда для времени быстрогодействия получаем $T = (m/k_a) \ln \tau_T$.

4. Пример. Пусть граничные условия (3.4) имеют вид

$$\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0, \quad v_{0x} = v_{Ty} = v_f, \quad v_{0y} = v_{0z} = v_{Tx} = v_{Tz} = 0, \quad (4.1)$$

где v_f – заданная константа.

Тогда соотношение (3.9) запишем в форме

$$(1-f)\tau_T^2 + 2f\tau_T + 1 - f = 0, \quad f = \frac{F^2 - m^2\gamma^2}{v_f^2 k_a^2}. \quad (4.2)$$

Можно показать, что единственное решение квадратного уравнения (4.2), большее единицы, задано выражением

$$\tau_T = \frac{f + \sqrt{2f-1}}{f-1}, \quad f > 1. \quad (4.3)$$

На рис. 1 показан график зависимости безразмерного времени $\ln \tau_T$ от значений безразмерного параметра f . Эта функция монотонно убывает с ростом величины f на всей своей области определения $f > 1$.

При граничных условиях (4.1) систему (3.7) можно записать в виде

$$\frac{v_x}{v_f} = \frac{\tau_T}{\tau_T - 1} \left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau_T} \right), \quad \frac{v_y}{v_f} = -\frac{\tau_T}{\tau_T - 1} \left(\frac{1}{\tau} - 1 \right), \quad v_z = 0. \quad (4.4)$$

Отношения v_x/v_f и v_y/v_f равны соответствующим долям, которые компоненты вектора скорости v_x и v_y в данный момент времени составляют от значения v_f .

На рис. 2 изображены зависимости безразмерных величин v_x/v_f и v_y/v_f от безразмерного времени $\ln \tau$. Кривые 1, 2 и 3 показывают отношение v_y/v_f для значений параметра f , равных 4, 3 и 2 соответственно. Кривые 4, 5 и 6 показывают отношение v_x/v_f для значений параметра f , равных 2, 3 и 4 соответственно.

Система (3.8) для граничных условий (4.1) дает

$$\begin{aligned} r_x &= -\frac{m v_f \tau_T}{k_a (\tau_T - 1)} \left(\frac{\ln \tau}{\tau_T} + \frac{1}{\tau} - 1 \right) + r_{0x}, \\ r_y &= \frac{m v_f \tau_T}{k_a (\tau_T - 1)} \left(\ln \tau + \frac{1}{\tau} - 1 \right) + r_{0y}, \\ r_z &= r_{0z}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

где r_{0x} , r_{0y} и r_{0z} – компоненты вектора \mathbf{r}_0 . Введем безразмерный вектор координат материальной точки

$$\boldsymbol{\rho} = \frac{k_a}{m v_f} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0).$$

Соотношения (4.5) для компонент вектора $\boldsymbol{\rho}$ имеют вид

$$\rho_x = -\frac{\tau_T}{\tau_T - 1} \left(\frac{\ln \tau}{\tau_T} + \frac{1}{\tau} - 1 \right), \quad \rho_y = \frac{\tau_T}{\tau_T - 1} \left(\ln \tau + \frac{1}{\tau} - 1 \right), \quad \rho_z = 0. \quad (4.6)$$

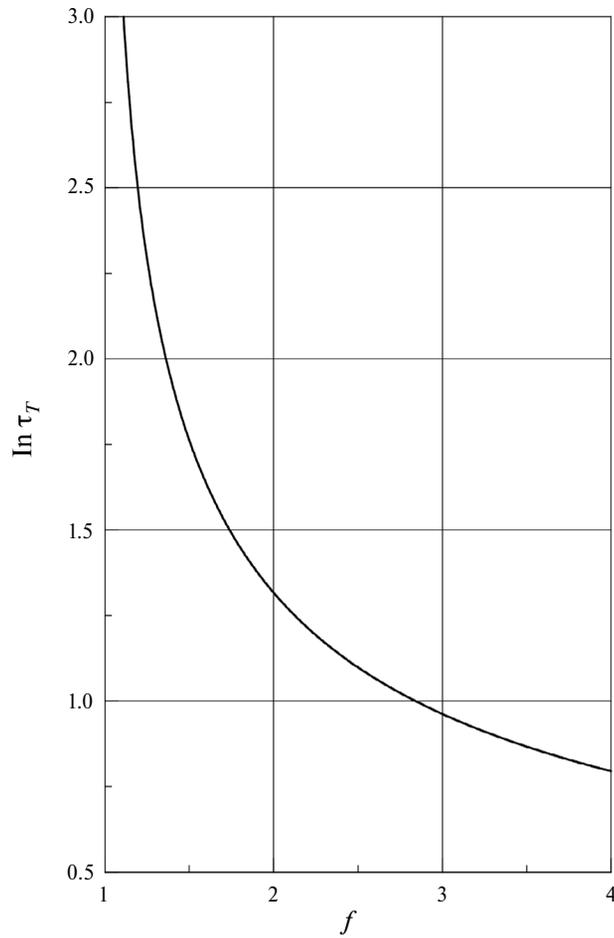


Рис. 1. Зависимость времени быстрогодействия от параметра f .

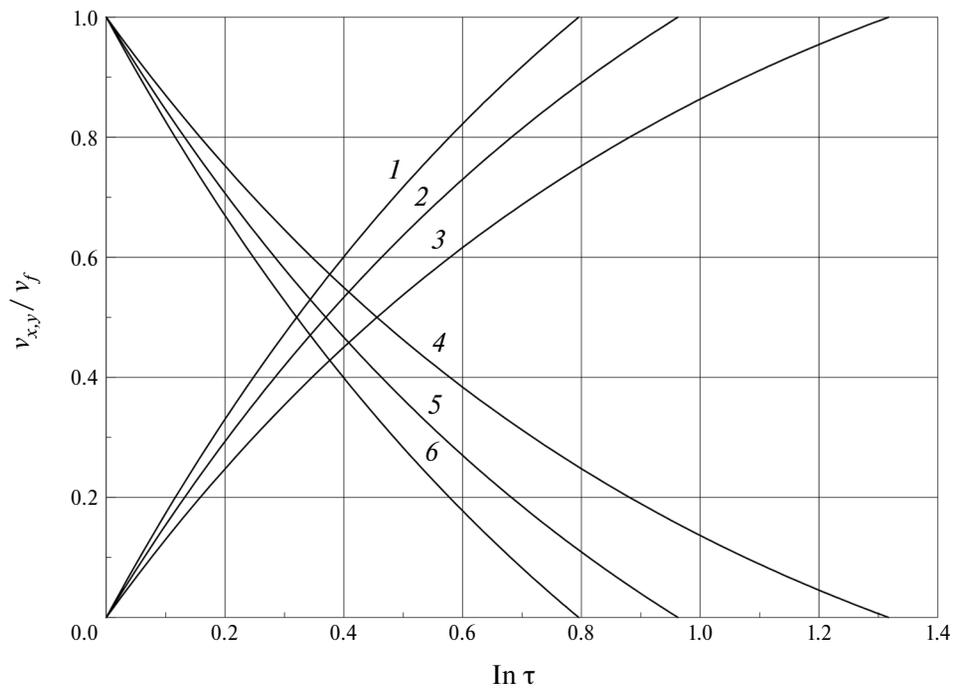


Рис. 2. Зависимости компонент вектора скорости от времени.

На рис. 3 изображены зависимости компонент ρ_x и ρ_y от времени $\ln \tau$. Графики 1, 2 и 3 показывают величину ρ_y для значений параметра f , равных 4, 3 и 2 соответственно. Графики 4, 5 и 6 показывают величину ρ_x для значений параметра f , равных 2, 3 и 4. На рис. 4 показаны траектории движения управляемой материальной точки в безразмерных координатах ρ_x и ρ_y . Кривые 1, 2 и 3 изображены для значений параметра f , равных соответственно 4, 3 и 2.

Таким образом, формулы (4.3), (4.4) и (4.6) дают решение задачи (1.2), (1.3) при граничных условиях (4.1) в безразмерном виде через единственный параметр f и время τ , которые были определены равенствами (4.2) и (2.5) соответственно. Как следует из соотношений (4.2) и (4.3), необходимым и достаточным условием существования решения служит неравенство $F^2 > m^2 \gamma^2 + v_f^2 k_a^2$.

5. Некоторые обобщения. В отдельных случаях область применимости полученных результатов можно расширить. Как известно [11], для дозвуковой скорости движения при числе Рейнольдса $Re \gg 1$ в уравнении (1.1) следует использовать квадратичную зависимость силы сопротивления среды от скорости тела [12] и заменить силу $\mathbf{F}_a = -k_a \mathbf{v}$ на силу $\mathbf{F}_{aq} = -k_q \mathbf{v} |\mathbf{v}|$, причем коэффициент k_q зависит в первую очередь от плотности среды и геометрических особенностей управляемого объекта. Обратим внимание на рис. 5, где показаны зависимости величины $V = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} / v_f$ для тех же самых значений параметра f , что и на рис. 4, причем нумерация кривых тоже совпадает. Видно, что уменьшение модуля скорости в процессе движения составляет около 30% от максимального значения, что приблизительно равно $\pm 15\%$ от средней величины. Тогда возможна ситуация, при которой параболическую зависимость силы \mathbf{F}_{aq} от скорости допустимо аппроксимировать линейной зависимостью $\mathbf{F}_{aq} \approx \mathbf{F}_q - k_a \mathbf{v}$ в некоторой окрестности характерного для конкретной задачи значения вектора скорости управляемого объекта, причем вектор \mathbf{F}_q не зависит от времени. В этом случае уравнение (1.1) следует заменить на равенство

$$m \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_u + \mathbf{F}_c - k_a \mathbf{v}, \quad \mathbf{F}_c = \mathbf{F}_\gamma + \mathbf{F}_q. \quad (5.1)$$

Проведя для соотношения (5.1) исследование, аналогичное описанному выше, получим оптимальное решение:

$$\mathbf{v} = \frac{F}{\tau k_a c} \left(\mathbf{c}_1 \sqrt{a + b\tau + c\tau^2} + \left(\mathbf{c}_2 \sqrt{c} - \frac{b}{2\sqrt{c}} \mathbf{c}_1 \right) \text{Arsh} \frac{2c\tau + b}{\sqrt{4ac - b^2}} \right) - \frac{1}{k_a} \mathbf{F}_c + \frac{1}{\tau} \mathbf{c}_v, \quad (5.2)$$

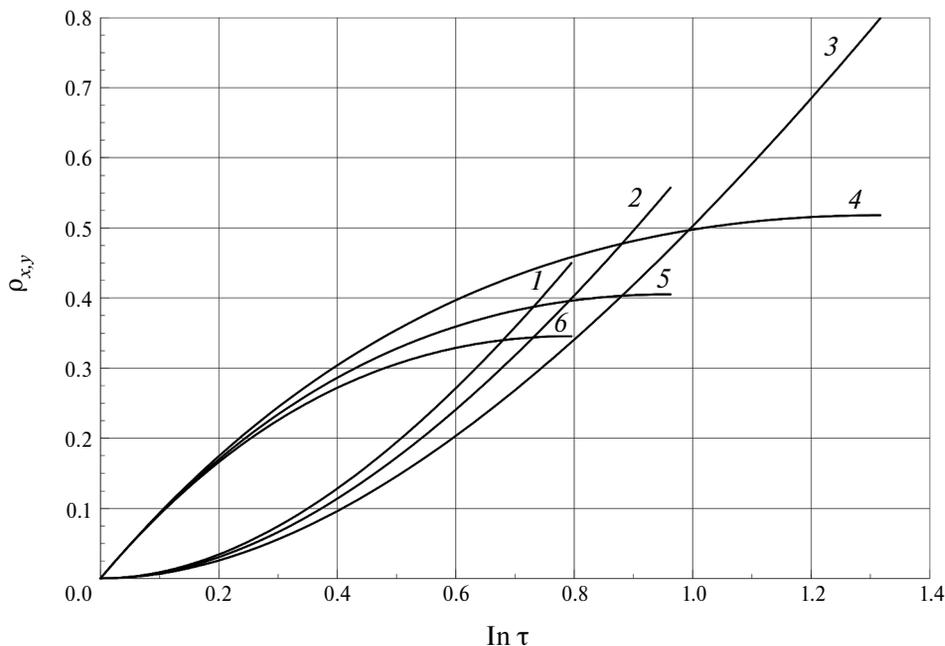


Рис. 3. Зависимости компонент вектора координат от времени.

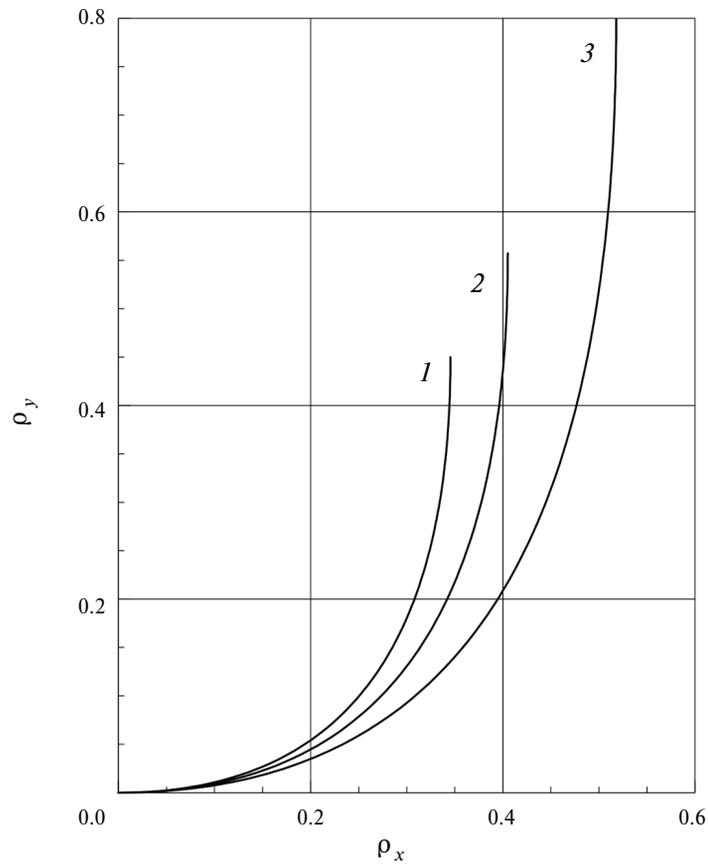


Рис. 4. Траектории движения объекта в горизонтальной плоскости.

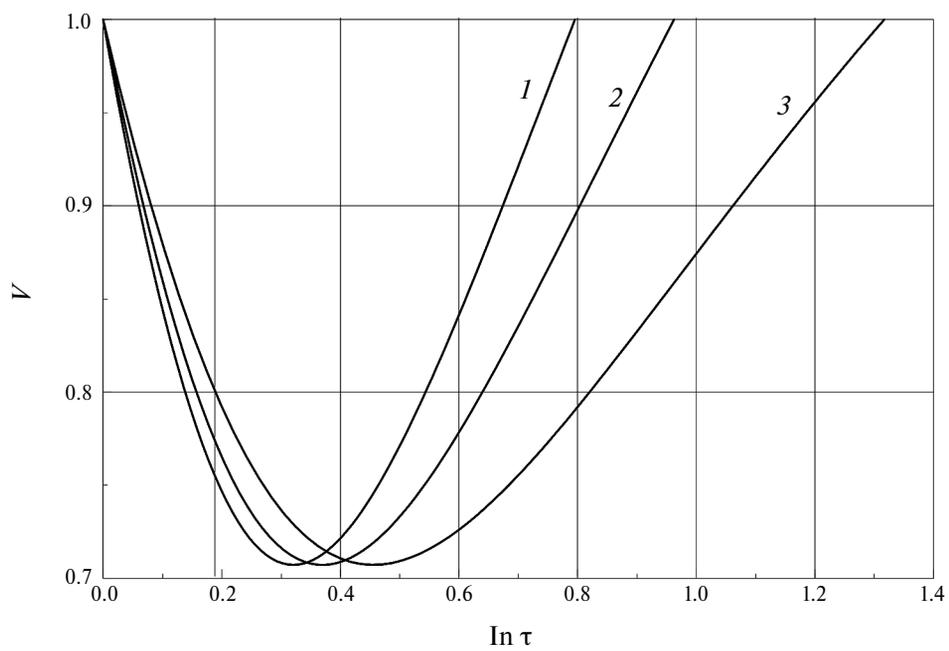


Рис. 5. Зависимость модуля вектора скорости от времени.

$$\begin{aligned}
\mathbf{r} = & \frac{mF}{k_a^2 c} \left(\sqrt{c} \operatorname{Arsh}(a_r \tau + b_r) - \frac{b}{2\sqrt{a}} \operatorname{Arsh} \frac{2a + b\tau}{\tau \sqrt{4ac - b^2}} - \frac{\sqrt{a + b\tau + c\tau^2}}{\tau} \right) \mathbf{c}_1 - \\
& - \frac{mF}{k_a^2 \sqrt{c}} \left(\mathbf{c}_2 - \frac{b}{2c} \mathbf{c}_1 \right) \times \\
& \times \left(\frac{1}{\tau} \operatorname{Arsh}(a_r \tau + b_r) + \frac{a_r}{\sqrt{1 + b_r^2}} \ln \frac{2}{a_r \tau} \left(1 + b_r^2 + a_r b_r \tau + \sqrt{1 + b_r^2} \sqrt{1 + (a_r \tau + b_r)^2} \right) \right) - \\
& - \frac{m \ln \tau}{k_a^2} \mathbf{F}_c - \frac{m}{k_a \tau} \mathbf{c}_v + \mathbf{c}_r.
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Определение неизвестных постоянных векторов из граничных условий для векторов скорости (5.2) и координат (5.3) управляемого объекта производится так же, как было указано ранее применительно к формулам (2.12) и (2.18).

Заключение. Удалось получить новые результаты и глубже исследовать оптимальные решения в задаче о движении точечного объекта в вязкой среде по сравнению с достигнутыми ранее [6–9]. Помимо управления и силы сопротивления среды было рассмотрено влияние постоянного внешнего воздействия, которым может быть как однородная сила тяжести, так и дополнительная сила, возникающая при аппроксимации нелинейного закона сопротивления, а также их сумма. Несмотря на то, что в общем случае двухточечной задачи не удалось найти два неизвестных постоянных вектора аналитически, это было сделано для частного случая, когда положение управляемого объекта в конечный момент времени нефиксировано. Пример показывает, что полученные выражения могут быть использованы в практических целях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969.
2. Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления. М.: Наука, 1969.
3. Беллман Р. Динамическое программирование. М.: Изд-во иностр. лит., 1960.
4. Кумакшев С.А., Шматков А.М. Траектории гражданского сверхзвукового самолета, оптимальные по расходу топлива // Изв. РАН. ТиСУ. 2022. № 5. С. 118–130.
5. Черноусько Ф.Л., Шматков А.М. Оптимальное по быстродействию управление в одной системе третьего порядка // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 5. С. 723–731.
6. Акуленко Л.Д. Асимптотические методы оптимального управления. М.: Наука, 1987.
7. Внучков Д.В. Оптимальное по быстродействию приведение динамической системы с линейной диссипацией в заданное конечное положение // Изв. РАН. ТиСУ. 1998. № 3. С. 56–61.
8. Акуленко Л.Д., Шматков А.М. Оптимальное по быстродействию пересечение сферы в вязкой среде // Изв. РАН. ТиСУ. 2007. № 1. С. 23–30.
9. Акуленко Л.Д. Наискорейшее приведение к требуемому фазовому состоянию объекта, движущегося в вязкой среде // ПММ. 2011. Т. 75. Вып. 5. С. 763–770.
10. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматлит, 1962.
11. Бусройд Р. Течение газа со взвешенными частицами. М.: Мир, 1975.
12. Мосенков Т.А., Фигурина Т.Ю. О перемещении двух взаимодействующих тел в среде с квадратичным сопротивлением // Изв. РАН. ТиСУ. 2024. № 3. С. 61–68.