

УДК 531.53

ОПТИМАЛЬНОЕ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ МАЛОЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЕ ПЛАТФОРМЫ С МАЯТНИКАМИ ДВУХ ТИПОВ РАВНОВЕСИЯ

© 2025 г. О. Р. Каюмов*

Филиал ОмГПУ, Тара, Россия

*e-mail: Oleg_Kayumov@mail.ru

Поступила в редакцию 03.09.2024 г.

После доработки 14.11.2024 г.

Принята к публикации 24.02.2025 г.

Рассматривается задача оптимального по быстродействию малого перемещения твердого тела, движущегося поступательно вдоль горизонтальной прямой и несущего n математических маятников. В начальный момент времени система находится в покое, причем одна часть маятников – в устойчивом равновесии, а другая – в неустойчивом. Система должна переместиться на заданное расстояние с гашением колебаний посредством единственной управляющей силы, приложенной к платформе и ограниченной по модулю, трение отсутствует. Маятники могут совершать колебания в вертикальной плоскости, не препятствуя друг другу благодаря конструкции. Перемещение предполагается малым в той мере, которая позволяет использовать линеаризованные уравнения. Показано, что при нечетном количестве перевернутых маятников движение платформы начинается с реверса, а при четном – нет. Для случая двух маятников (перевернутого и обычного) исследована эволюция функций оптимального управления с ростом дальности перемещения. Найденные для линейной системы режимы оптимального управления применены к задаче малого перемещения этого объекта с нелинейными уравнениями.

Ключевые слова: диаграммы функций оптимального управления, платформа с маятниками

DOI: 10.31857/S0002338825020037, EDN: ARRRWW

TIME-OPTIMAL SMALL MOVEMENT OF A PLATFORM WITH PENDULUMS OF TWO TYPES OF EQUILIBRIUM

O. R. Kayumov*

Branch of Omsk State Pedagogical University, Tara, Russia

*e-mail: Oleg_Kayumov@mail.ru

We consider the problem of the time-optimal small displacement of a rigid body moving forward along a horizontal straight line and carrying n mathematical pendulums. At the initial moment of time, the system is at rest, with one part of the pendulums in stable equilibrium, and the other in unstable equilibrium. The system must move a given distance with vibration damping through a single control force applied to the platform and limited in magnitude, there is no friction. The pendulums can oscillate in the vertical plane without interfering with each other due to the design, but the inverted rods must not “fall” (i.e. pass through the bottom stable vertical position). The displacement is assumed to be small to the extent that linearized equations can be used. It is shown that when the number of inverted pendulums is odd, the movement of the platform begins from reverse, but when there is an even number, it does not. For the case of two pendulums (inverted and normal), the evolution of optimal control functions with increasing range of movement is studied. The optimal control modes found for a linear system are applied to the problem of small displacement of this object with nonlinear equations.

Keywords: Optimal Control Function Diagrams, Platform with Pendulums

Введение. Рассмотрим задачу о горизонтальном перемещении платформы массы m_0 , на которой в начальный момент времени находилось r маятников в неустойчивом состоянии равновесия и s маятников – в устойчивом (рис. 1). Общее количество маятников $r + s = n$, т.е. система имеет $(n + 1)$ степеней свободы. Единственная внешняя управляющая сила u ограничена

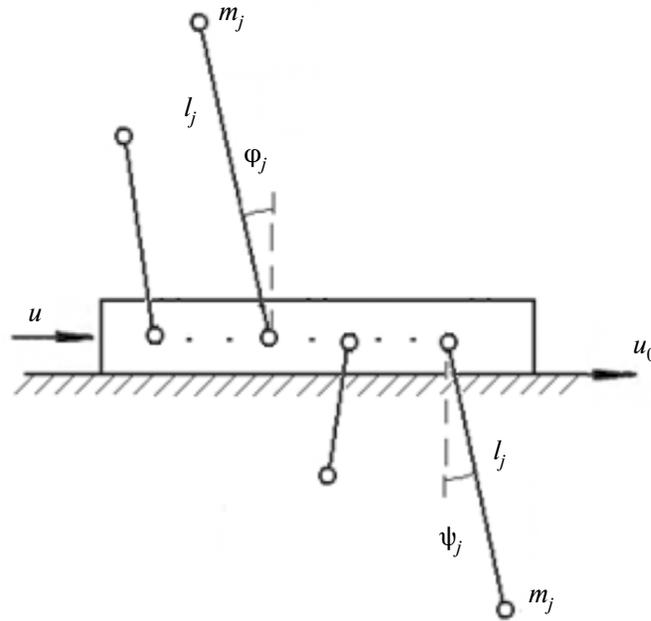


Рис. 1. Модель платформы с маятниками двух типов равновесия.

по модулю наперед заданной величиной a . Маятники моделируются невесомыми жесткими стержнями с длинами l_1, l_2, \dots, l_n и сосредоточенными массами m_1, m_2, \dots, m_n на концах. Трение в шарнирах, а также между платформой и опорой отсутствует. Система должна переместиться на заданное расстояние за наименьшее время из начального положения равновесия в аналогичное конечное. В процессе перемещения платформы маятники могут совершать колебания в вертикальной плоскости, не препятствуя друг другу благодаря конструкции. Перемещение объекта подразумевается малым в той степени, чтобы считать удовлетворительным квадратичное приближение функции Лагранжа, а уравнения движения — линейными. Эти уравнения качественно не изменятся, если вместо “колеблющихся вниз” маятников взять горизонтальные пружины с массами на концах, полагая, что так моделируется, например, нежесткая платформа с r высотными кранами.

Постановки задач управления подобными объектами формулировались в [1], где с помощью принципа максимума Понтрягина [2] была решена задача наивысшего малого перемещения платформы с одним маятником. Оптимальное управление оказалось кусочно-постоянным с тремя переключениями [1, 3]. В настоящее время задачи управления системами с упругими элементами, моделируемыми платформой с осцилляторами, являются предметом активного исследования. Несмотря на линейность уравнений, здесь возникают трудности, связанные с дефицитом внешних воздействий. Алгоритмы перемещения таких объектов с гашением колебаний за конечное время предложены в [4–6], при этом цели достигались как при действии неизвестных возмущений, так и при неполном измерении состояний. В разных постановках задачи позиционирования и стабилизации перевернутого маятника на несущем основании рассматривались, например в [7–11]. В настоящей работе речь идет о платформе с несколькими маятниками, часть из которых — перевернутые. Используемый подход основан на методике, развитой в [12–14] для аналогичной задачи оптимального по быстродействию перемещения платформы с пружинными осцилляторами.

1. Уравнения движения и свойства симметрии. Обозначим через $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_r$ углы, отмеряемые “стоящими” стержнями против часовой стрелки от состояний неустойчивого равновесия, а $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_s$ — углы “висящих” стержней от нижнего положения равновесия, $M = m_0 + m_1 + \dots + m_n$ — массу всей системы, q_0 — горизонтальную координату платформы. Конфигурация системы задается вектором $\mathbf{q} = (q_0, \varphi_1, \dots, \varphi_r, \psi_1, \dots, \psi_s)^T$. Далее ограничимся рассмотрением малых перемещений платформы, записывая кинетическую и потенциальную энергии системы в квадратичном приближении. Тогда уравнения движения примут линейный вид

$$A\ddot{\mathbf{q}} + B\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{b}u, |u| \leq a, \quad (1.1)$$

где $B = g \operatorname{diag}(0, -m_1 l_1, \dots, -m_r l_r, m_{r+1} l_{r+1}, \dots, m_n l_n)$ – матрица потенциальной энергии, $\mathbf{b} = (1, 0, \dots, 0)^T$ – вектор размерности $(n+1)$. Матрицу A кинетической энергии можно записать в блочном виде

$$A = \begin{pmatrix} M & -\mathbf{d}^T & \mathbf{h}^T \\ -\mathbf{d} & G_r & 0 \\ \mathbf{h} & 0 & G_s \end{pmatrix},$$

где $G_r = \operatorname{diag}(m_1 l_1^2, m_2 l_2^2, \dots, m_r l_r^2)$, $G_s = \operatorname{diag}(m_{r+1} l_{r+1}^2, m_{r+2} l_{r+2}^2, \dots, m_n l_n^2)$, $\mathbf{d} = (m_1 l_1, m_2 l_2, \dots, m_r l_r)^T$, $\mathbf{h} = (m_{r+1} l_{r+1}, m_{r+2} l_{r+2}, \dots, m_n l_n)$.

Как и в [1], преобразуем систему (1.1) к набору подсистем с независимыми переменными, но общим управлением. Для этого применим замену $\mathbf{q} = A^{-1} S \mathbf{z}$, где S – матрица из собственных векторов матрицы $N = B A^{-1}$. Тогда получим

$$\ddot{\mathbf{z}} + D \mathbf{z} = \mathbf{f} u, \quad D = S^{-1} N S, \quad \mathbf{f} = S^{-1} \mathbf{b}, \quad (1.2)$$

где u диагональной матрицы

$$D = \operatorname{diag}(0, -\omega_1^2, -\omega_2^2, \dots, -\omega_r^2, \omega_{r+1}^2, \omega_{r+2}^2, \dots, \omega_n^2) \quad (1.3)$$

на главной диагонали – собственные числа матрицы N , из которых первое равно нулю, r – отрицательных и s – положительных, обозначенных квадратами частот.

Можно показать (подробности опускаем), что элементы вектора $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_{n+1})^T$ не равны нулю в силу свойств матрицы S .

Вводя безразмерные константы, переменные

$$\varpi'_i = \frac{\varpi_i}{\omega_n}, \quad i = \overline{1, r}, \quad \omega'_j = \frac{\omega_j}{\omega_n}, \quad j = \overline{r+1, n}, \quad x_i = \frac{z_{i+1} \omega_n^2}{f_{i+1} a}, \quad i = \overline{0, n}, \quad u' = \frac{u}{a}$$

и время $t' = \omega_n t$, получим (опуская штрихи)

$$\begin{aligned} \ddot{x}_0 &= u, \quad \ddot{x}_i - \varpi_i^2 x_i = u, \quad i = \overline{1, r}, \\ \ddot{x}_j + \omega_j^2 x_j &= u, \quad j = \overline{r+1, n}, \quad |u| \leq 1, \end{aligned} \quad (1.4)$$

где $\omega_n = 1$.

Используя ранговый критерий Калмана [15], можно показать управляемость системы (1.4) при условии попарно различных значений ϖ_i , $i = \overline{1, r}$, а также попарно различных значений ω_j , $j = \overline{r+1, n}$. Заметим, что в рассматриваемой задаче перемещения даже при совпадении собственных частот система управляема в том смысле, что ее “одинаковые” маятники будут двигаться синхронно.

Представив систему (1.4) в нормальной форме

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 &= y_0, \quad \dot{y}_0 = u, \quad \dot{x}_i = y_i, \quad \dot{y}_i = \varpi_i^2 x_i + u, \quad i = \overline{1, r}, \\ \dot{x}_j &= y_j, \quad \dot{y}_j = -\omega_j^2 x_j + u, \quad j = \overline{r+1, n}, \quad |u| \leq 1, \end{aligned} \quad (1.5)$$

будем отмерять координату x_0 так, чтобы требуемому перемещению платформы соответствовало симметричное изменение переменной x_0 от $-b$ до b , т.е. назначим в середине этого промежутка начало отсчета координаты x_0 . Аналогичную “удвоенную” запись применим и для искомого общего времени $2T$ движения системы, что придаст краевым условиям симметричный вид.

Тогда задача оптимального по быстродействию перемещения платформы с маятниками разных типов (перевернутыми и нет) сведется к отысканию управления $u(t)$, $t \in [0, 2T]$, переводящего систему (1.5) из состояния

$$x_0(0) = -b, \quad y_0(0) = x_i(0) = y_i(0) = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad (1.6)$$

за наименьшее время $2T$ (заранее неизвестное) в состояние

$$x_0(2T) = b, \quad y_0(2T) = x_i(2T) = y_i(2T) = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (1.7)$$

При этом, как было условлено выше, ограничимся рассмотрением малых перемещений, чтобы сохраняли смысл именно линейные уравнения (1.5).

Оптимальное управление из принципа максимума Понтрягина [2] получит вид

$$u = \text{sign} \left(\sum_{i=0}^n \lambda_i \right), \quad (1.8)$$

где сопряженные переменные должны удовлетворять системе

$$\begin{aligned} \dot{\mu}_0 = 0, \quad \dot{\lambda}_0 = -\mu_0, \quad \dot{\mu}_i = -\varpi_i^2 \lambda_i, \quad \dot{\lambda}_i = -\mu_i, \quad i = \overline{1, r}, \\ \dot{\mu}_j = \omega_j^2 \lambda_j, \quad \dot{\lambda}_j = -\mu_j, \quad j = \overline{r+1, n}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

В рассматриваемой задаче быстродействия имеются те же симметрии, что прежде упоминались для платформы с пружинными осцилляторами [12], т.е. справедливо следующее замечание.

Замечание 1. В задаче (1.5)–(1.9) в смещенном времени $\tilde{t} = t - T$, $\tilde{t} \in [-T, T]$ оптимальное управление $u(\tilde{t})$, а также решения $x_i(\tilde{t})$, $\lambda_i(\tilde{t})$ будут нечетными функциями, а $y_i(\tilde{t})$, $\mu_i(\tilde{t})$, $i = \overline{0, n}$, – четными функциями.

Отсюда последуют соотношения

$$u(T) = x_i(T) = \lambda_i(T) = 0, \quad i = \overline{0, n}, \quad (1.10)$$

а также следующее [12] свойство.

Замечание 2. В задаче (1.5)–(1.9) оптимальное управление (1.8) является кусочно-постоянным с конечным числом переключений, число которых нечетно.

Это подразумевает в том числе, что особые режимы, моделируемые бесконечно быстрыми переключениями управления, здесь невозможны.

Поставленную задачу оптимизации будем рассматривать для взаимной к быстродействию вариационной задачи на максимум дальности (2b) при заданном времени (2T). Вновь используем обозначения $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_j, T$ для последовательных моментов переключения управления на полутраектории, а также вспомогательные параметры:

$$\gamma_k = T - \tau_k, \quad k = \overline{1, j}, \quad T > \gamma_1 > \gamma_2 > \dots > \gamma_j > 0. \quad (1.11)$$

Можно показать (подробности опускаем), что если движение системы (1.5) началось при действии управления $u = 1$ на участке $t \in (0, \tau_1)$, то на j -м участке постоянства управления при $t \in (\tau_{j-1}, \tau_j)$ координаты x_i , $i = \overline{1, n}$, будут явными функциями времени:

$$x_i(t) = \frac{-1}{\varpi_i^2} \left[(-1)^{j+1} - \text{ch} \varpi_i t + 2 \sum_{k=1}^{j-1} (-1)^{k+1} \text{ch} \varpi_i (t - \tau_k) \right], \quad i = \overline{1, r}, \quad (1.12)$$

$$x_i(t) = \frac{1}{\omega_i^2} \left[(-1)^{j+1} - \cos \omega_i t + 2 \sum_{k=1}^{j-1} (-1)^{k+1} \cos \omega_i (t - \tau_k) \right], \quad i = \overline{r+1, n}. \quad (1.13)$$

Если бы движение началось при $u = -1$, то выражения в правых частях (1.12) и (1.13) изменили бы знак на противоположный. В любом из этих случаев, согласно соотношению (1.10), в конце оптимальной полутраектории (т.е. при $t = T$) для всех $i = \overline{1, n}$ должны выполняться условия:

$$(-1)^{j+1} - \text{ch} \varpi_i T + 2 \sum_{k=1}^{j-1} (-1)^{k+1} \text{ch}(\varpi_i \gamma_k) = 0, \quad i = \overline{1, r}, \quad (1.14)$$

$$(-1)^{j+1} - \cos \omega_i T + 2 \sum_{k=1}^{j-1} (-1)^{k+1} \cos(\omega_i \gamma_k) = 0, \quad i = \overline{r+1, n}. \quad (1.15)$$

Соотношения (1.12), (1.14) отличаются от аналогичных соотношений (1.13), (1.15) лишь заменой тригонометрических косинусов на гиперболические. Это объясняется тем, что в (1.4) уравнения второй подсистемы (при $j = r+1, n$) преобразуются в уравнения первой подсистемы ($i = \overline{1, r}$) формальной заменой частот на “мнимые”:

$$\omega \rightarrow i\varpi, \cos(\omega t) \rightarrow ch(\varpi t), \sin(\omega t) \rightarrow ish(\varpi t). \tag{1.16}$$

Заметим, что принятые условия, когда перевернутые маятники не должны “упасть”, порождают ограничения для значений функций (1.12), т.е. фактически ограничивают область управляемости. Для уравнений $\dot{x}_i = y_i, \dot{y}_i = \varpi_i^2 x_i + u, i \in \overline{1, r}$ изображающая точка на фазовой плоскости (x_i, y_i) выходит из начала координат, а сама фазовая кривая склеивается из участков гипербол. На рис. 2 сплошными линиями показаны семейства гипербол при $u = +1$, а пунктирными линиями – при $u = -1$. Пары прямых пересекаются в седловых точках $B(1/\varpi_i^2, 0)$ и $D(-1/\varpi_i^2, 0)$, а также в точках $A(0, 1/\varpi_i)$ и $C(0, -1/\varpi_i)$. Известная [16] область нуль-управляемости такой подсистемы лежит в открытой бесконечной полосе между параллельными прямыми AB и CD . Фазовая кривая, выходящая из $O(0, 0)$ при $u = +1$ (либо при $u = -1$), пересекла бы AB (либо CD) в момент времени $t = (\ln 2)/\varpi_i$. Поэтому значение τ_1 первого момента переключения управления ограничивается условием

$$\tau_1 < (\ln 2)/\varpi_*, \tag{1.17}$$

где ϖ_* – наибольшее из чисел $\varpi_i, i \in \overline{1, r}$.

Необходимые условия оптимальности и их геометрическая интерпретация. В силу замечания 1 решения сопряженной системы (1.9) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \lambda_0(t) &= c_0(T-t), \lambda_i(t) = c_i \operatorname{sh} \varpi_i(T-t), i = \overline{1, r}, \\ \lambda_j(t) &= c_j \sin \omega_j(T-t), j = \overline{r+1, n}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

откуда следует справедливость следующего факта.

Утверждение 1. Если в задаче (1.5)–(1.9) полутраектория оптимальна по быстродействию и реализуется кусочно-постоянным управлением с $(n+1)$ переключениями в моменты времени $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n, T$, то управляющая функция имеет вид

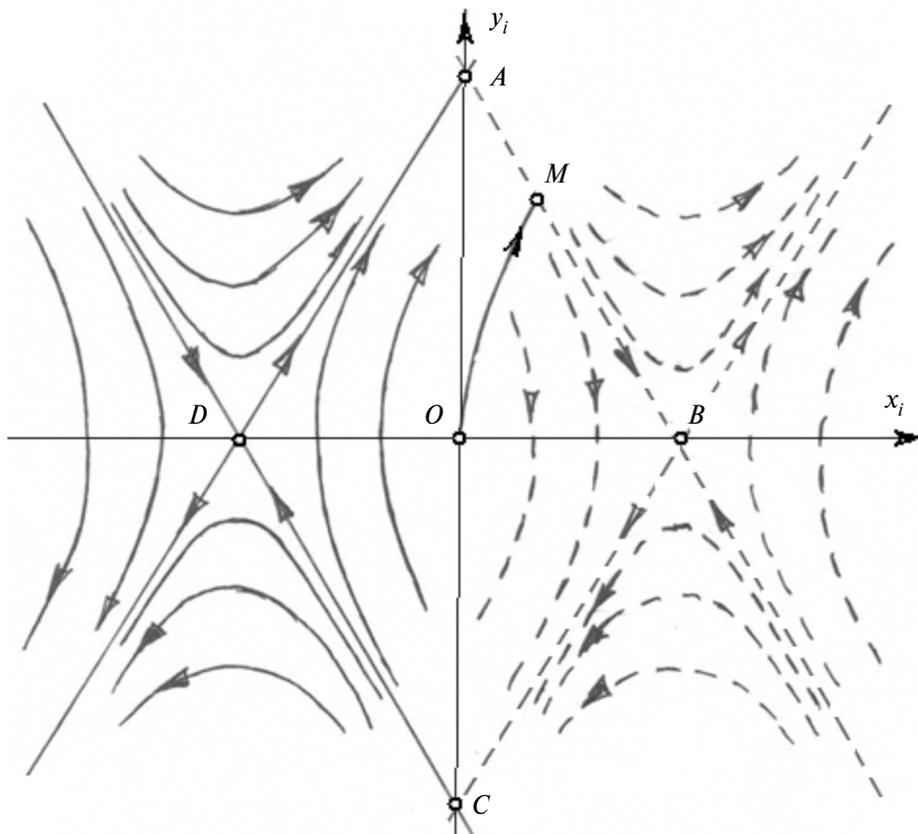


Рис. 2. Фазовые кривые на плоскости $(x_i, y_i), i \in \overline{1, \dots, r}$.

$$u = \text{sign}(\kappa \det Q_{n+1}(t)), \kappa \neq 0, Q_{n+1}(t) = \begin{vmatrix} f_0(t) & f_0(\tau_1) & f_0(\tau_2) & \dots & f_0(\tau_n) \\ f_1(t) & f_1(\tau_1) & f_1(\tau_2) & \dots & f_1(\tau_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_n(t) & f_n(\tau_1) & f_n(\tau_2) & \dots & f_n(\tau_n) \end{vmatrix}, \quad (2.2)$$

$$f_0(t) = T - t, f_i(t) = \text{sh} \varpi_i(T - t), i = \overline{1, r}, f_j(t) = \sin \omega_j(T - t), j = \overline{r+1, n}.$$

Доказательство дословно совпадает с обоснованием аналогичного утверждения из [12], если применить соотношения (2.1). В формуле (2.2) знак коэффициента κ определяется известным (по условию) значением управления $u(t)$ при $t \in [0, \tau_1]$. Аналогично доказываются следующие два замечания.

Замечание 3. Если в задаче (1.5)–(1.9) полутраектория оптимальна по быстродействию и реализуется кусочно-постоянным управлением с количеством переключений большим, чем $(n+1)$, то вид управляющей функции будет тот же (2.2).

Замечание 4. Если в задаче (1.5)–(1.9) полутраектория оптимальна по быстродействию и реализуется кусочно-постоянным управлением с количеством переключений $m < (n+1)$, то вид управляющей функции будет

$$u = \text{sign}(\kappa \det Q_m(t)), \quad (2.3)$$

где $\kappa \neq 0$, $\det Q_m(t)$ – угловой $m \times m$ минор из $\det Q_{n+1}(t)$ (2.2).

Как и в [12], отыскание наибольшей дальности перемещения при заданном времени $2T$ можно выполнять по следующему алгоритму. Сначала строится траектория с предполагаемым количеством переключений управления, для чего находятся корни γ_k , $k = \overline{1, j-1}$, системы (1.14)–(1.15) и сами моменты переключения из соотношений (1.11). Затем проверяется вдоль этой траектории действие управления вида (2.3) (если число переключений $m < (n+1)$) или вида (2.2) – в остальных случаях. Если кроме ожидаемых моментов переключения возникают другие, при которых управление тоже обращается в ноль, то такое управление не удовлетворяет необходимым условиям оптимальности.

Далее используем геометрическую интерпретацию [14] таких условий. Пусть полутраектория оптимальна по быстродействию и реализуется кусочно-постоянным управлением с $(n+1)$ переключениями в моменты времени $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n, T$, т.е. только в эти моменты определитель (2.2) равен нулю. Это равенство можно преобразовать, разделив в определителе $\det Q_{n+1}(t)$ каждый столбец на его первый элемент, а каждую строку – на соответствующую ей “частоту” (ϖ_i , $i = \overline{1, r}$ либо ω_j , $j = \overline{r+1, n}$). Введем две вспомогательные функции:

$$\chi(\rho) = \frac{\text{sh} \rho}{\rho}, \quad \psi(\rho) = \frac{\sin \rho}{\rho}, \quad (2.4)$$

доопределяя их значениями $\chi(0) = 1, \psi(0) = 1$. Тогда первый столбец преобразованного определителя будет

$$(1, \chi(\varpi_1(T-t)), \dots, \chi(\varpi_r(T-t)), \psi(\omega_{r+1}(T-t)), \dots, \psi(\omega_n(T-t)))^T,$$

а любой следующий с номером k , $k \in \overline{2, n+1}$, в переменных (1.11) примет вид

$$(1, \chi(\varpi_1 \gamma_k), \dots, \chi(\varpi_r \gamma_k), \psi(\omega_{r+1} \gamma_k), \dots, \psi(\omega_n \gamma_k))^T.$$

Согласно утверждению 1, условие (2.2) должно выполняться, лишь когда первый столбец определителя численно совпадет с одним из n последующих. Это свойство можно описать геометрически путем введения в n -мерном пространстве вспомогательной линии, называемой контрольной кривой [14]. Для утверждения 1 эта кривая получит параметрическое уравнение

$$r = (\chi(\varpi_1 \rho), \dots, \chi(\varpi_r \rho), \psi(\omega_{r+1} \rho), \dots, \psi(\omega_n \rho))^T, \quad \rho \in [0, T]. \quad (2.5)$$

Линия (2.5) начинается в точке $K_0(1, 1, \dots, 1)$ при $\rho = 0$ и завершается в точке W при $\rho = T$, имея форму, определяемую заданным набором констант ϖ_i , $i = \overline{1, r}$, и ω_j , $j = \overline{r+1, n}$. Если утверждение 1 выполнено, тогда моментам переключения управления соответствуют n

корней γ_k , $k = \overline{1, n}$, системы (1.14)–(1.15) и на контрольной кривой через n точек A_k с параметрами γ_k , $k = \overline{1, n}$, пройдет гиперплоскость, не имеющая других пересечений с кривой K_0W . Как и в [14], будем использовать эту геометрическую интерпретацию, чтобы исследовать эволюцию функций оптимального управления $u(t)$, $t \in [0, T)$ с изменением параметра T .

3. Свойства функций оптимального управления при малых значениях T .

Утверждение 2. В задаче (1.5)–(1.9) существует такое значение T_0 , что для всех $T \in (0, T_0]$ функции $u(t)$, $t \in [0, T)$, удовлетворяющие необходимым условиям оптимальности, будут иметь не более n моментов времени переключения.

Для доказательства покажем, что при достаточно малом $T \leq T_0$ на участке K_0W контрольной кривой (2.5) любые $(n+1)$ ее точек A_k , $k = \overline{1, n+1}$, не могут принадлежать общей гиперплоскости, т.е. вектор $\overline{A_1 A_{n+1}}$ не сможет принадлежать подпространству, порождаемому векторами $\overline{A_1 A_i}$, $i = \overline{2, n}$. В предположении о малости параметров $\gamma_k < T$ точек A_k , $k = \overline{1, n+1}$, используем разложения в ряды Маклорена для координатных функций:

$$\chi(\omega_i \gamma_k) \approx 1 + \sum_{s=1}^n \frac{(\sigma_i \theta_k)^s}{(2s+1)!}, \quad \sigma_i = \omega_i^2, \quad i = \overline{1, r}, \tag{3.1}$$

$$\psi(\omega_i \gamma_k) \approx 1 + \sum_{s=1}^n (-1)^s \frac{(v_i \theta_k)^s}{(2s+1)!}, \quad v_i = \omega_i^2, \quad i = \overline{r+1, n}, \quad \theta_k = \gamma_k^2, \quad k = \overline{1, r}.$$

Векторы

$$\overline{A_1 A_j} = (\chi(\omega_1 \gamma_j) - \chi(\omega_1 \gamma_1), \dots, \psi(\omega_n \gamma_j) - \psi(\omega_n \gamma_1))^T, \quad j = \overline{2, n+1},$$

приводятся к виду

$$\overline{A_1 A_j} = \sum_{s=1}^n \frac{\theta_j^s - \theta_1^s}{(2s+1)!} \mathbf{a}_s, \tag{3.2}$$

где вспомогательные векторы

$$\mathbf{a}_s = (\sigma_1^s, \dots, \sigma_r^s, (-1)^s v_{r+1}^s, \dots, (-1)^s v_n^s)^T, \quad s = \overline{1, n},$$

линейно независимы. Действительно, из таких столбцов составит определитель, который после замены

$$\mathcal{G}_i = \sigma_i, \quad i = \overline{1, r}, \quad \mathcal{G}_i = -v_i, \quad i = \overline{r+1, n}, \tag{3.3}$$

примет (с точностью до сомножителя μ_1) вид определителя Вандермонда:

$$Z_1 = \mu_1 \prod_{\substack{i,j=1 \\ j>i}}^n (\mathcal{G}_j - \mathcal{G}_i), \quad \mu_1 = \prod_{i=1}^n \mathcal{G}_i \neq 0,$$

где $\mathcal{G}_j \neq \mathcal{G}_i$ (при $j \neq i$). Если бы вектор $\overline{A_1 A_{n+1}}$ принадлежал подпространству, порождаемому векторами $\overline{A_1 A_i}$, $i = \overline{2, n}$, то был бы равен нулю определитель Z_2 , составленный из координат этих векторов в базисе \mathbf{a}_s , $s = \overline{1, n}$:

$$Z_2 = \mu_2 \begin{vmatrix} \theta_2 - \theta_1 & \theta_2^2 - \theta_1^2 & \dots & \theta_2^n - \theta_1^n \\ \theta_3 - \theta_1 & \theta_3^2 - \theta_1^2 & \dots & \theta_3^n - \theta_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \theta_{n+1} - \theta_1 & \theta_{n+1}^2 - \theta_1^2 & \dots & \theta_{n+1}^n - \theta_1^n \end{vmatrix}, \quad \mu_2 = \prod_{s=1}^n \frac{1}{(2s+1)!}.$$

Однако этот определитель упрощается:

$$Z_2 = \mu_2 \prod_{\substack{i,j=1 \\ j>i}}^{n+1} (\theta_j - \theta_i),$$

поэтому если $\theta_j \neq \theta_i$ (при $j \neq i$), то $Z_2 \neq 0$. Тем самым утверждение 2 доказано.

Поскольку для $T \in (0, T_0]$ количество моментов переключений управления $u(t)$, $t \in [0, T)$, не превышает n , то в системе (1.14)–(1.15) рассмотрим $j = n$ уравнений с неизвестными γ_k , $k = \overline{1, n}$. При меньшем числе переключений управления $m < n$ в этой системе можно формально считать $\gamma_j \equiv 0$, $j = \overline{m+1, n}$. С увеличением параметра $T \leq T_0$ будут меняться значения $\gamma_k(T)$, $k = \overline{1, n}$. Эту эволюцию можно оценить, используя разложения функций из (1.14)–(1.15) в ряды Маклорена:

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}(\varpi_i T) &\approx 1 + \sum_{s=1}^n \frac{(\sigma_i t)^s}{(2s)!}, \quad \operatorname{ch}(\varpi_i \gamma_k) \approx 1 + \sum_{s=1}^n \frac{(\sigma_i \theta_k)^s}{(2s)!}, \quad i = \overline{1, r}, \quad t = T^2, \\ \cos(\omega_i T) &\approx 1 + \sum_{s=1}^n (-1)^s \frac{(v_i t)^s}{(2s)!}, \quad \cos(\omega_i \gamma_k) \approx 1 + \sum_{s=1}^n (-1)^s \frac{(v_i \theta_k)^s}{(2s)!}, \quad i = \overline{r+1, n}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Подставляя соотношения (3.4) в (1.14)–(1.15), перегруппируем слагаемые, выделяя в них выражения:

$$p_i = \frac{1}{(2i)!} \left[-\frac{t^i}{2} + \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \theta_k^i \right], \quad i = \overline{1, n}. \quad (3.5)$$

Вводя вектор $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)^T$, преобразуем систему (1.14)–(1.15) к однородному матричному уравнению

$$\Omega \mathbf{p} = \mathbf{0}, \quad (3.6)$$

где n строк матрицы Ω имеют вид

$$\begin{aligned} (1, \sigma_i, \sigma_i^2, \sigma_i^3, \dots, \sigma_i^{n-1}), \quad \sigma_i = \varpi_i^2, \quad i = \overline{1, r}, \\ (1, -v_i, v_i^2, -v_i^3, \dots, (-1)^{n-1} v_i^{n-1}), \quad v_i = \omega_i^2, \quad i = \overline{r+1, n}. \end{aligned}$$

Вновь используя замену (3.3), получим определитель Вандермонда

$$\det \Omega = \prod_{\substack{i, j=1 \\ j > i}}^n (\vartheta_j - \vartheta_i) \neq 0 \quad \text{при} \quad \vartheta_j \neq \vartheta_i \quad (j \neq i).$$

Тогда из матричного соотношения (3.6) следует $p_i = 0$, $i = \overline{1, n}$, что приводит к системе n уравнений относительно n переменных $\alpha_i = \theta_i / t$, $i = \overline{1, n}$:

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \alpha_k^i = \frac{1}{2}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (3.7)$$

В точности такая же система нелинейных алгебраических уравнений возникала в [14], где рассматривались малые значения T для линейной модели, отличающейся от (1.4) лишь знаками, т.е. лишь положительными собственными значениями матрицы $N = BA^{-1}$. Было показано, что система (3.7) всегда имеет n корней $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_n > 0$, причем значения α_1 и α_n , α_2 и α_{n-1} и т.д. дополняют друг друга до единицы. Детали вычислений приводились отдельно для двух случаев.

Случай 1. Если n – четное, т.е. $n = 2k$, $k \in N$, то можно ввести новые переменные $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$, представив

$$\alpha_i = \frac{1}{2} + \beta_i, \quad i = 1, \dots, k, \quad \alpha_j = \frac{1}{2} - \beta_{n-j+1}, \quad j = \overline{k+1, n}, \quad (3.8)$$

где

$$1/2 > \beta_1 > \beta_2 > \dots > \beta_k > 0. \quad (3.9)$$

Замечание 5. При подстановке выражений (3.8) в систему (3.7) ее каждое второе уравнение повторит предыдущее, так что останется лишь k уравнений, порождающих в новых переменных $\delta_i = 4(-1)^{i+1} \beta_i$, $i = \overline{1, k}$, симметрическую систему:

$$\sum_{i=1}^k \delta_i^{2j-1} = 4^{j-1}, \quad j = \overline{1, k}. \quad (3.10)$$

Она решается введением элементарных симметрических многочленов, числовые значения которых найдутся стандартными процедурами, чтобы затем (согласно теореме Виета) стать коэффициентами “порождающего” алгебраического уравнения k -й степени с корнями $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k$, удовлетворяющими системе (3.10). В Приложении, которое обобщает и дополняет результаты [14], дано доказательство замечания 5, а также указан простой способ составления числовых коэффициентов этих уравнений для любого значения k . При $k > 4$ эти уравнения решаются лишь численно, но для малых k корни находятся в явном виде. Например, при $k=1$ (т.е. $n=2$) имеем $\beta_1 = 1/4$ (т.е. $\alpha_1 = 3/4, \alpha_2 = 1/4$).

Случай 2. Если n – нечетное, т.е. $n=2k+1, k \in N$, то корни системы (3.7) выразятся через новые переменные:

$$\alpha_i = \frac{1}{2} + \beta_i, \quad i = \overline{1, k}, \quad \alpha_{k+1} = \frac{1}{2}, \quad \alpha_j = \frac{1}{2} - \beta_{n-j+1}, \quad j = \overline{k+2, n}, \quad (3.11)$$

где вновь выполнится неравенство (3.9).

При подстановке выражений (3.11) в систему (3.7) ее нечетные уравнения вырождаются в тождества, а четные выразятся лишь через $\beta_i^2, i = \overline{1, k}$, так что при замене $\tilde{\alpha}_i = 4\beta_i^2, i = \overline{1, k}$, система в точности повторит вид системы (3.7) для $n=k$. Иначе говоря, получим значения $\beta_i = \sqrt{\tilde{\alpha}_i}/4$, где $\tilde{\alpha}_i, i = \overline{1, k}$, – корни системы (3.7) для $n=k$.

Поскольку среди корней системы (3.7), имеющих исходный смысл $\alpha_i = \gamma_i^2/T^2, i = \overline{1, n}$, нет нулевых значений, а сама система порождена представлением (3.4), то в предположении о малости T показана справедливость следующего свойства.

Утверждение 3. В задаче быстродействия (1.5)–(1.9) при достаточно малом значении T функция оптимального управления $u(t), t \in [0, T]$, имеет ровно n переключений. Функции $\gamma_i(T), i = \overline{1, n}$, задающие эволюцию корней системы (1.14)–(1.15), удовлетворяют условию

$$k_i = \left. \frac{d\gamma_i}{dT} \right|_{T=0} = \sqrt{\alpha_i}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (3.12)$$

где $\alpha_i, i = \overline{1, n}$, – корни системы (3.7).

Известно из [14], что если из корней $\alpha_i, i = \overline{1, n}$ системы (3.7) составить знакопеременяющую сумму степеней $(n+1)$, то она будет меньше числа $1/2$, т.е. при любом n выполнится неравенство

$$S_{n+1} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \alpha_k^{n+1} - \frac{1}{2} < 0. \quad (3.13)$$

Так как в системе (1.14)–(1.15) все функции гладкие, то в рассматриваемом диапазоне малых параметров $T \leq T_0$ можно использовать приближение

$$\gamma_i(T) \approx \gamma_i(0) + \dot{\gamma}_i(0) \cdot T + \ddot{\gamma}_i(0) \cdot T^2 / 2, \quad i = \overline{1, n}, \quad (3.14)$$

где $\gamma_i(0) = 0, \dot{\gamma}_i(0) = \sqrt{\alpha_i}, i = \overline{1, n}$.

Утверждение 4. В задаче быстродействия (1.5)–(1.9) при достаточно малом значении T функция оптимального управления $u(t), t \in [0, T]$, имеет начальное значение $u(0)$, зависящее от количества r перевернутых маятников:

1. если r четно, то $u(0) = +1$;
2. если r нечетно, то $u(0) = -1$.

Для доказательства рассмотрим зависимость дальности перемещения платформы от времени T в конце оптимальной полутраектории. Пусть $\tilde{x}_0 = x_0 + b$ – смещенная координата (для которой $\tilde{x}_0(T) = 0$ при $T = 0$). Тогда при задаваемом значении T дальность перемещения выразится [14] через корни системы (1.14)–(1.15):

$$\tilde{x}_0(T) = \pm \left[\frac{T^2}{2} - \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \gamma_k^2 \right] \quad (3.15)$$

где знак “+” ставится при $u(0)=+1$, а “–” – при $u(0)=-1$. Заметим, что в формулах (3.15) и (3.5) (в случае $i=1$) выражения в квадратных скобках отличаются лишь минусом, т.е. можно записать

$$\tilde{x}_0(T) = -2! p_1(T) \text{sign}[u(0)]. \quad (3.16)$$

Знак величины $p_1(T)$ не был уточнен в первом приближении, когда в разложениях (3.4) в ряды Маклорена учитывались только n степеней переменной $t=T^2$, что породило однородное уравнение (3.6) и вычисление $p_1=0$. Это приближение выявило линейные компоненты (с коэффициентами $\dot{\gamma}_i(0)=\sqrt{\alpha_i}$, $i=1, n$) в представлении (3.14), но не выявило квадратичных компонент (с коэффициентами $\ddot{\gamma}_i(0)$), которыми и определяется знак выражения (3.15) как величины более высокого порядка малости.

Если в разложениях (3.4) удержать $(n+1)$ слагаемых, подразумевая при этом и расширение обсуждаемого диапазона T , то после подстановки в уравнения (1.14)–(1.15) наряду с выражениями (3.5) в них выделится новая компонента:

$$p_{n+1} = \frac{1}{(2n+2)!} \left[-\frac{t^{n+1}}{2} + \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \theta_k^{n+1} \right].$$

Ее можно представить в форме

$$p_{n+1} = \frac{T^{2n+2}}{(2n+2)!} \left[\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \left(\frac{\gamma_k^2}{T^2} \right)^{n+1} - \frac{1}{2} \right] < 0, \quad (3.17)$$

где в квадратных скобках – новое (возмущенное) выражение вида S_{n+1} (3.13), сохраняющее свой прежний знак “–”. Тогда вместо однородной системы (3.6) получится неоднородная:

$$\Omega \mathbf{p} = -p_{n+1} \mathbf{e}, \quad \mathbf{e} = (\sigma_1^n, \dots, \sigma_r^n, (-1)^n v_{r+1}^n, \dots, (-1)^n v_n^n)^\top. \quad (3.18)$$

Из нее последует значение $p_1 = -p_{n+1} \det \Omega_1 / \det \Omega$, где матрица Ω_1 получается из Ω заменой первого столбца на столбец \mathbf{e} . Поэтому

$$\det \Omega_1 = \phi \det \Omega, \quad \phi = (-1)^{n-1} \left(\prod_{i=1}^r \sigma_i \right) \left((-1)^s \prod_{j=r+1}^n v_j \right),$$

откуда

$$p_1 = -\phi p_{n+1}. \quad (3.19)$$

Таким образом, в первом приближении (3.4) имели оценки $p_1=0$ и $S_{n+1}<0$. Теперь (с учетом большего числа компонент ряда Маклорена) знак выражения вида S_{n+1} сохранится для p_{n+1} (3.17), а знак выражения p_1 (3.19) проявится и совпадет со знаком ϕ . Он определяется вычислением $(-1)^{n-1}(-1)^s$, т.е. $(-1)^{r+1}$. Иначе говоря, $p_1>0$, если r нечетно. В представлении (3.16) перемещение $\tilde{x}_0(T)$ должно быть положительным, для чего при четном r потребуется $u(0)=+1$, а при нечетном r – $u(0)=-1$, что и доказывает утверждение 4.

В задаче быстрогодействия (1.5)–(1.9) при малых значениях T можно описать эволюцию функций оптимального управления $u(t)$, $t \in [0, T)$, используя наглядное изображение в виде диаграммы [13]. Общий подход к ее построению изложен в [14] для системы, аналогичной (1.2), если в матрице (1.3) отрицательные собственные числа заменить положительными, а в системе (1.14) гиперболические косинусы – тригонометрическими. Этот подход сохраняет смысл и в нашем случае и заключается в том, чтобы на основе системы (1.14)–(1.15) получить уравнения в вариациях, чтобы путем численного интегрирования строить функции $\gamma_k(T)$, $k=1, n$. Утверждений 3 и 4 достаточно, чтобы построить начальную часть диаграммы (при малых T). Однако далее понадобится на каждом шаге интегрирования проверять необходимые условия оптимальности в геометрической интерпретации – по взаимному расположению контрольной кривой и гиперплоскости, проведенной через точки A_k с параметрами $\gamma_i(T)$, $k=1, n$. В случае их касания начинаются режимы с другим числом переключений управления. Количество возможных сценариев здесь бесконечно, поэтому далее ограничимся рассмотрением конкретного случая.

4. Оптимальное управление в системе (1.4) при $r=1, s=1$. В задаче оптимального быстрого действия (1.5)–(1.9) рассмотрим подробнее случай малых перемещений платформы с двумя маятниками, которые вначале покоились так, что один находился в устойчивом равновесии, а другой был перевернут. Уравнения (1.4) запишутся в виде

$$\ddot{x}_0 = u, \ddot{x}_1 - \varpi^2 x_1 = u, \ddot{x}_2 + x_2 = u, |u| \leq 1. \tag{4.1}$$

Как и прежде, исследуем взаимную к быстрдействию вариационную задачу на максимум дальности (2b) при заданном времени (2T).

При $n=2$ контрольная кривая (2.5) задается параметрическим уравнением

$$\xi_1 = \chi(\varpi\rho), \xi_2 = \psi(\rho), \rho \in [0, T] \tag{4.2}$$

и является плоской линией. На рис. 3 она показана для случая $\varpi = 0.05$. С увеличением коэффициента ϖ такая линия неравномерно растягивается по горизонтали. Она всегда пересекает ось $O\xi_1$ в точках K_i с параметрами $\rho_i = \pi i, i \in N$, имея экстремумы по вертикали $O\xi_2$ в точках V_j с параметрами $\rho_j \approx (2j+1)\pi/2, j \in N$. Можно показать (подробности опускаем), что точки перегиба $P_i, i \in N$, располагаются ниже оси $O\xi_1$, если номер i нечетный, и выше – если номер четный.

Согласно утверждению 3, при $n=2$ для малых значений T функция оптимального управления $u(t)$ имеет на полутраектории $t \in [0, T)$ ровно два переключения, поэтому на всей траектории $t \in [0, 2T]$ – пять переключений в моменты $\tau_1, \tau_2, T, 2T - \tau_2, 2T - \tau_1$. В обозначениях (1.11) они удовлетворяют системе (1.14)–(1.15):

$$1 - \text{ch}(\varpi T) + 2\text{ch}(\varpi\gamma_1) - 2\text{ch}(\varpi\gamma_2) = 0, 1 - \cos T + 2\cos\gamma_1 - 2\cos\gamma_2 = 0. \tag{4.3}$$

При достаточно малых T значения корней определяются по формулам (3.12). Дальнейшее изменение $\gamma_1(T), \gamma_2(T)$ опишем, дифференцируя соотношения (4.3) по T и разрешая полученную систему уравнений относительно производных:

$$\frac{d\gamma_1}{dT} = \frac{D_1}{D}, \frac{d\gamma_2}{dT} = \frac{D_2}{D}. \tag{4.4}$$

Здесь

$$D = \det \begin{bmatrix} \text{sh}\varpi\gamma_2 & \sin\gamma_2 \\ \text{sh}\varpi\gamma_1 & \sin\gamma_1 \end{bmatrix} = \varpi\gamma_1\gamma_2 \det \begin{bmatrix} \xi_{12} & \xi_{22} \\ \xi_{11} & \xi_{21} \end{bmatrix} = \varpi\gamma_1\gamma_2 S_{21}, \tag{4.5}$$

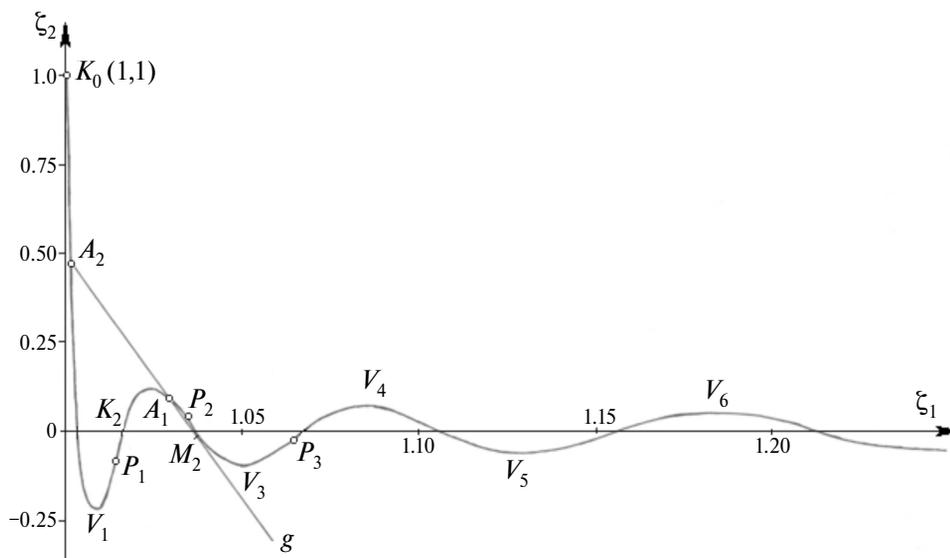


Рис. 3. Контрольная кривая для случая $\varpi = 0.05$.

где через координаты $\xi_{1i} = \chi(\varpi\gamma_i)$, $\xi_{2i} = \psi(\gamma_i)$, $i=1,2$, точек A_1 и A_2 на контрольной кривой выражена ориентированная площадь S_{21} параллелограмма, построенного на векторах $\overline{OA_2} = (\xi_{12}, \xi_{22})$ и $\overline{OA_1} = (\xi_{11}, \xi_{21})$. Аналогично вычисляются определители

$$D_1 = \frac{1}{2}\varpi\gamma_2 T S_{20}, \quad D_2 = \frac{1}{2}\varpi\gamma_1 T S_{10}, \quad (4.6)$$

где ориентированные площади параллелограммов

$$S_{i0} = \det \begin{bmatrix} \xi_{1i} & \xi_{2i} \\ \xi_{10} & \xi_{20} \end{bmatrix}, \quad i=1,2,$$

построены на векторах $\overline{OA_1}$, $\overline{OA_2}$ и $\overline{OW} = (\xi_{10}, \xi_{20})$, а точка W на контрольной кривой имеет параметр $\rho = T$. С его увеличением точки W , A_1 и A_2 перемещаются по контрольной кривой (рис. 3), выйдя из пункта K_0 и соблюдая порядок, согласно неравенству (1.11). Пока точка W остается на дуге K_0V_1 , повороты векторов $\overline{OA_1} \rightarrow \overline{OW}$, $\overline{OA_2} \rightarrow \overline{OW}$, $\overline{OA_2} \rightarrow \overline{OA_1}$ осуществляются по часовой стрелке, поэтому $S_{10} < 0$, $S_{20} < 0$, $S_{21} < 0$. В силу (4.4)–(4.6) имеем $\dot{\gamma}_1 > 0$, $\dot{\gamma}_2 > 0$, т.е. монотонный рост $\gamma_1(T)$, $\gamma_2(T)$. При этом прямая g , проведенная через A_1 и A_2 , не имеет других пересечений с контрольной кривой в силу вогнутости дуги K_0V_1 , что означает выполнение необходимых условий оптимальности этих режимов. Можно показать, что, не доходя до пункта K_2 , точка W пройдет через положение, в котором $\overline{OW} \parallel \overline{OA_1}$. Тогда сменят знак величина S_{10} и определитель D_2 , функция $\gamma_2(T)$ пройдет через максимум. Ввиду неравенства $\dot{\gamma}_2 < 0$ точка A_2 двинется “вспять”, приближаясь к K_0 . В момент совмещения A_2 и K_0 при $\gamma_2 = 0$ (т.е. при совпадении τ_2 и T) управление $u(t)$ выродится в функцию с тремя моментами переключения: τ_1 , T , $2T - \tau_1$.

Замечание 6. При любом ϖ в системе (4.1) имеются оптимальные режимы перемещения с тремя моментами переключения управления.

Действительно, таким режимам соответствуют два уравнения (1.14), (1.15):

$$-1 - \operatorname{ch}(\varpi T) + 2\operatorname{ch}(\varpi\gamma_1) = 0, \quad -1 - \cos T + 2\cos\gamma_1 = 0. \quad (4.7)$$

Множество корней второго уравнения изображается на координатной плоскости (T, γ_1) бесконечной фигурой из горизонтальных цепочек $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots$, составленных из одинаковых дуг (рис. 4). Левая нижняя дуга OBF служит графиком функции

$$\gamma_1 = \arccos\left(\cos^2\frac{T}{2}\right), \quad T \in [0, 2\pi], \quad \gamma_1 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]. \quad (4.8)$$

Она является симметричной и выпуклой вверх, так как $d^2\gamma_1/dT^2 < 0$. Производная $d\gamma_1/dT$ в точке $T=0$ имеет значение $\sqrt{2}/2$.

Первое уравнение системы (4.7) преобразуется к виду

$$\gamma_1 = \frac{1}{\varpi} \ln \left[\operatorname{ch}^2\left(\frac{\varpi T}{2}\right) + \sqrt{\operatorname{ch}^4\left(\frac{\varpi T}{2}\right) - 1} \right]$$

и задает график возрастающей функции. На рис. 4 показаны такие графики для случаев $\varpi = 0.05$ (а), $\varpi = 0.5$ (б), $\varpi = 2$ (в). Пунктиром изображены предельные случаи при $\varpi \rightarrow \infty$ ($\gamma_1(T) \rightarrow T$) и при $\varpi \rightarrow 0$ ($\gamma_1(T) \rightarrow T\sqrt{2}/2$). Все эти линии имеют с дугой OBF общую касательную в точке O и свои асимптоты $\gamma_1(T) = T - (\ln 2)/\varpi$, обусловленные неравенством (1.17). Корни T, γ_1 системы (4.7) на рис. 4 соответствуют точкам пересечения линии (4.8) с цепочками $\varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \dots$, количество которых бесконечно. В показанном на рис. 4 диапазоне $T \in [0, 6\pi]$ для любого значения ϖ гарантировано ровно четыре точки пересечения, аргументы которых обозначим последовательно T_1, T_2, T_3, T_4 . При каждом таком значении T система (4.7) имеет единственное решение γ_1 , которому соответствует функция управления $u(t)$ с тремя моментами переключения $\tau_1, T, 2T - \tau_1$. Она удовлетворяет необходимым условиям оптимальности в силу нульмерности гиперплоскости, порождаемой одной точкой A_1 на контрольной кривой, оставшейся в момент совмещения точек A_2 и K_0 .

Как показано в аналогичной ситуации [13], в этот момент на контрольной кривой прямая g должна пройти через точку A_1 , но не должна быть секущей к этой кривой, иначе в графике

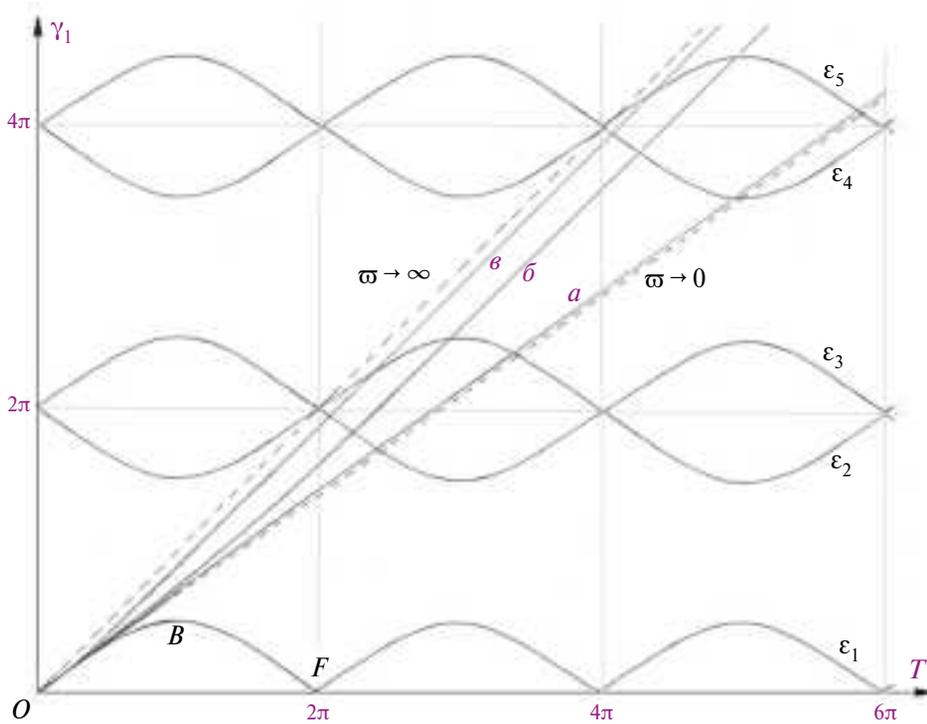


Рис. 4. Графическое решение системы (4.7) для разных значений ϖ .

$u(t)$ возникли бы скачкообразные изменения. Поэтому при $T = T_1$ прямая g проводится через A_1 как касательная к контрольной кривой. Точка прикосновения M_1 имеет статус “сдвоенной”: из нее при $T > T_1$ разойдутся две точки, остающиеся коллинеарными с A_1 при их дальнейшем движении по контрольной. На графике функции $u(t)$, $t \in [0, T]$, это соответствует “игольчатой” вставке, которая будет смещаться, меняясь в толщине. При $t \in [0, 2T]$ (где $T_1 < T < T_2$) будет семь переключений управления в моменты $\tau_1, \tau_2, \tau_3, T, 2T - \tau_3, 2T - \tau_2, 2T - \tau_1$, причем значения $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ находятся как корни системы (1.14)–(1.15):

$$\begin{aligned} -1 - \operatorname{ch}(\varpi T) + 2\operatorname{ch}(\varpi\gamma_1) - 2\operatorname{ch}(\varpi\gamma_2) + 2\operatorname{ch}(\varpi\gamma_3) &= 0 \\ -1 - \cos T + 2\cos\gamma_1 - 2\cos\gamma_2 + 2\cos\gamma_3 &= 0 \end{aligned} \quad (4.9).$$

Их изменение с увеличением параметра T опишется дифференцированием по T как соотношения (4.9), так и равенства

$$H = \det \begin{bmatrix} \gamma_3 & \gamma_1 & \gamma_2 \\ \operatorname{sh}\varpi\gamma_3 & \operatorname{sh}\varpi\gamma_1 & \operatorname{sh}\varpi\gamma_2 \\ \sin\gamma_3 & \sin\gamma_1 & \sin\gamma_2 \end{bmatrix} = 0, \quad (4.10)$$

вытекающего из необходимого условия оптимальности (2.2). Полученная система трех уравнений разрешается относительно производных в виде

$$\frac{d\gamma_i}{dT} = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = \overline{1,3}, \quad (4.11)$$

где

$$\Delta = \varpi(\gamma_3\gamma_2 S_{32}H_1 + \gamma_3\gamma_1 S_{31}H_2 + \gamma_2\gamma_1 S_{21}H_3),$$

$$\Delta_1 = \eta_3 H_2 + \eta_2 H_3, \quad \Delta_2 = -\eta_3 H_1 + \eta_1 H_3, \quad \Delta_3 = -\eta_2 H_1 - \eta_1 H_2,$$

$$H_i = \frac{\partial H}{\partial \gamma_i}, \quad \eta_i = \frac{1}{2}\varpi T \gamma_i S_{i0}, \quad i = \overline{1,3}. \quad (4.12)$$

Обозначения S_{ij} , $i, j = \overline{0,3}$, $i \neq j$, имеют прежний смысл (4.5)–(4.6), а частные производные H_2 , H_3 получаются из записи

$$H_1 = \frac{\partial H}{\partial \gamma_1} = \varpi \gamma_2 \gamma_3 [S_{23} + (\xi_{22} - \xi_{23}) \operatorname{ch} \varpi \gamma_1 - (\xi_{12} - \xi_{13}) \cos \gamma_1] \quad (4.13)$$

круговой перестановкой индексов.

Можно показать (подробности опускаем), что при всех значениях $T \in (T_1, T_2)$ прямая g , проходящая через A_1 , A_2 , A_3 , не может иметь еще одну общую точку с контрольной кривой. Режимы с семью переключениями завершаются при $T = T_2$, когда на контрольной кривой две точки из трех вновь сблизятся до совмещения, а секущая g выродится в касательную. После “исчезновения” сдвоенной точки к оставшейся точке A_1 добавится выходящая из пункта K_0 точка A_2 , т.е. при $T > T_2$ начинаются режимы с пятью переключениями.

Эти закономерности присущи системе (4.1) при любом значении ϖ , т.е. справедливо следующее свойство.

Утверждение 5. В задаче быстрогодействия для системы (4.1) существуют значения T_1 , T_2 , удовлетворяющие неравенству $4\pi > T_2 > T_1 > 2\pi$, так что функция оптимального управления $u(t)$, $t \in [0, 2T]$, имеет пять сценариев:

1. пять переключений при $0 < T < T_1$;
2. три переключения при $T = T_1$;
3. семь переключений при $T_1 < T < T_2$;
4. три переключения при $T = T_2$;
5. пять переключений при $T_2 < T < T_2 + \Delta T$.

Здесь ΔT символизирует небольшое увеличение параметра T .

Дальнейшие сценарии зависят от значения ϖ , поэтому обратимся к конкретным примерам. В каждом из них эволюция функции $u(t)$ иллюстрируется наглядно с помощью диаграммы [13], где по вертикали растет параметр T , а в каждом горизонтальном сечении прочитывается конкретная функция $u(t)$ – чередованием серых (при $u = +1$) и белых (при $u = -1$) отрезков, задающих промежутки времени постоянства управления.

Пример 1. На рис. 5 для значения $\varpi = 0.05$ показана правая часть диаграммы функций оптимального управления (ее левая часть – зеркальная, но с переменной местами белого и серого цветов). Из вершины O выходят кривые $\gamma_1(T)$, $\gamma_2(T)$ с угловыми коэффициентами, вычисленными по формулам (3.12) при $n = 2$:

$$k_1 = \sqrt{3}/2, \quad k_2 = 1/2. \quad (4.14)$$

Для режимов с тремя переключениями найдены значения $T_1 \approx 7.598689$, $T_2 \approx 10.602437$, $T_3 \approx 15.398409$, $T_4 \approx 18.156650$ как корни системы (4.7). На рис. 5 соответствующие пунктирные горизонтали разбивают диаграмму на слои с разным числом переключений управления. При $0 < T < T_1$ (режимы с пятью переключениями) интегрировались уравнения (4.4) до момента $T = T_1$, когда на контрольной кривой параметр γ_2 точки A_2 обратился в нуль. В этот момент точка A_1 ($\gamma_1 \approx 5.389141$) была “левее” точки перегиба P_1 ($\rho \approx 5.760589$), поэтому касательная из A_1 к контрольной кривой дала точку прикосновения M_1 ($\rho \approx 5.953036$), лежащую “правее” (на рис. 5 точка M_1 тоже правее, чем $\gamma_1(T_1)$). Затем касательная к контрольной кривой превратилась в секущую, из пункта M_1 вышли две новые точки, они получают номера заново в соответствии с неравенством (1.11). При $T_1 < T < T_2$ (сценарий 3) из утверждения 5) кривые $\gamma_1(T)$, $\gamma_2(T)$, $\gamma_3(T)$ строились численным интегрированием системы (4.11) до момента, когда из трех коллинеарных точек A_1 , A_2 , A_3 контрольной кривой две последние совместились (в положении $\rho \approx 5.03335$) и “исчезли” (на диаграмме линии $\gamma_2(T)$ и $\gamma_3(T)$ сошлись в одной-мной точке F_1). Согласно утверждению 5, этот момент $T = T_2$ разделяет сценарии 3) и 5), т.е. при $T > T_2$ возобновились режимы с пятью переключениями. На каждом шаге численного интегрирования системы (4.4) проверялось взаимное расположение контрольной кривой и прямой g , проходящей через A_1 и A_2 . На рис. 3 показан момент $T \approx 11.60033$, когда прямая g коснулась контрольной кривой в точке M_2 (с параметром $\rho \approx 9.402021$). Далее из этой точки M_2 выйдут две новых, т.е. касательная станет секущей, а на контрольной кривой будет четыре (переименованных) коллинеарных точки A_1 , A_2 , A_3 , A_4 . На графике функции $u(t)$, $t \in [0, T)$, это соответствует “игольчатой” вставке, которая будет смещаться и меняться в толщине, а сама функция $u(t)$ при $t \in [0, 2T]$ будет иметь девять переключений в моменты τ_1 , τ_2 , τ_3 , τ_4 , T , $2T - \tau_4$, $2T - \tau_3$, $2T - \tau_2$, $2T - \tau_1$. Они определяются корнями γ_1 , γ_2 , γ_3 , γ_4 системы (1.14)–(1.15):

$$1 - \operatorname{ch} \varpi T + 2 \operatorname{ch}(\varpi \gamma_1) - 2 \operatorname{ch}(\varpi \gamma_2) + 2 \operatorname{ch}(\varpi \gamma_3) - 2 \operatorname{ch}(\varpi \gamma_4) = 0,$$

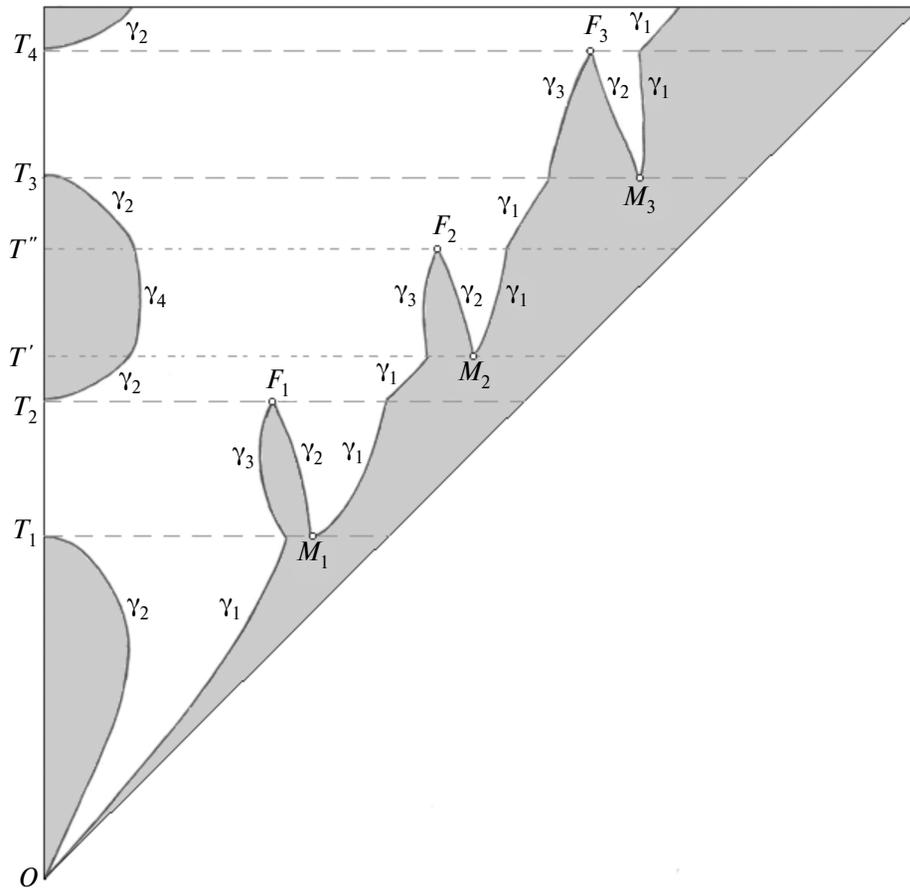


Рис. 5. Диаграмма функций оптимального управления при $\varpi = 0.05$.

$$1 - \cos T + 2\cos\gamma_1 - 2\cos\gamma_2 + 2\cos\gamma_3 - 2\cos\gamma_4 = 0. \tag{4.15}$$

Кроме необходимого условия оптимальности (4.10) должно удовлетворяться аналогичное уравнение

$$R = \det \begin{bmatrix} \gamma_4 & \gamma_1 & \gamma_2 \\ \text{sh}\varpi\gamma_4 & \text{sh}\varpi\gamma_1 & \text{sh}\varpi\gamma_2 \\ \sin\gamma_4 & \sin\gamma_1 & \sin\gamma_2 \end{bmatrix} = 0. \tag{4.16}$$

После дифференцирования по T соотношений (4.10), (4.15), (4.16) полученная система уравнений разрешается относительно производных:

$$\frac{d\gamma_i}{dT} = \frac{\tilde{\Delta}_i}{\tilde{\Delta}}, \quad i = \overline{1,4}. \tag{4.17}$$

Здесь

$$\tilde{\Delta} = -R_1(V_{43}H_2 + V_{42}H_3) + R_2(V_{43}H_1 - V_{41}H_3) + R_4(V_{32}H_1 + V_{31}H_2 + V_{21}H_3),$$

$$\tilde{\Delta}_1 = \eta_2 R_4 H_3 + \eta_3 R_4 H_2 - \eta_4 R_2 H_3, \quad \tilde{\Delta}_2 = \eta_1 R_4 H_3 - \eta_3 R_4 H_1 + \eta_4 R_1 H_3,$$

$$\tilde{\Delta}_3 = \eta_4 R_2 H_1 - \eta_4 R_1 H_2 - \eta_2 R_4 H_1 - \eta_1 R_4 H_2,$$

$$\tilde{\Delta}_4 = \eta_3 R_2 H_1 - \eta_3 R_1 H_2 - \eta_2 R_1 H_3 - \eta_1 R_2 H_3,$$

где $V_{ij} = \varpi \gamma_i \gamma_j S_{ij}$, обозначения S_{ij} , $i, j = \overline{0, 4}$, $i \neq j$, имеют прежний смысл (4.5)–(4.6), выражения η_i , $i = 1, 4$, вычисляются по формулам (4.12), а частные производные $R_i = \partial R / \partial \gamma_i$, $i = 1, 2, 4$, получаются из H_i , $i = 1, 3$, в (4.13) заменой индексов 3 на 4.

Численное интегрирование системы (4.17) завершается при $T'' \approx 13.854240$, когда совпадут значения $\gamma_2(T) = \gamma_3(T) \approx 8.602582$ (на рис. 5 эти линии сходятся в точке F_2). На контрольной кривой секущая g вновь вырождается в касательную, совпавшие точки A_2 и A_3 исчезают, из четырех точек остаются лишь две – A_1 и A_4 (переименованная в A_2 в соответствии с неравенством (1.11)). Возобновляются режимы с пятью переключениями, для которых эволюция $\gamma_1(T)$, $\gamma_2(T)$ определяется уравнениями (4.4). Их численное интегрирование завершается в момент $T_3 \approx 15.398409$, когда $\gamma_2 = 0$ (т.е. $\tau_2 = T$), и управление $u(t)$ вырождается в функцию с тремя моментами переключения: τ_1 , T , $2T - \tau_1$. На контрольной кривой через оставшуюся точку A_1 ($\gamma_1 \approx 11.019342$) строится касательная g , из ее точки прикосновения M_3 ($\rho \approx 12.993239$) выходят две новые точки, так что касательная становится секущей, содержащей три точки с новыми именами A_1 , A_2 , A_3 . Вновь начинаются режимы с семью переключениями, для которых эволюция $\gamma_1(T)$, $\gamma_2(T)$, $\gamma_3(T)$ определяется уравнениями (4.11) на промежутке $T_3 < T < T_4$. При $T_4 \approx 18.156650$ совпадут значения $\gamma_2(T) = \gamma_3(T) \approx 11.96422$ (на рис. 5 эти кривые сходятся в точке F_3), управление становится функцией с тремя переключениями, после чего вновь возобновятся режимы с пятью переключениями и т.д.

Пример 2. На рис. 6 показана правая (зеркальная) часть диаграммы функций оптимального управления для значения $\varpi = 0.5$. Как и в примере 1, из вершины O выходят кривые $\gamma_1(T)$, $\gamma_2(T)$ с угловыми коэффициентами (4.14). Из системы (4.7) для режимов с тремя переключениями найдены значения $T_1 \approx 7.034148$, $T_2 \approx 9.186685$, $T_3 \approx 13.3803297$, $T_4 \approx 15.5122003$. Проведенные на этих уровнях пунктирные горизонталы разделяют диаграмму на слои с разным количеством переключений управления. В первом слое (при $0 < T < T_1$) интегрировались уравнения (4.4), во втором (при $T_1 < T < T_2$) – (4.9). При $T = T_1$ точка A_1 ($\gamma_1 \approx 5.758569$) была

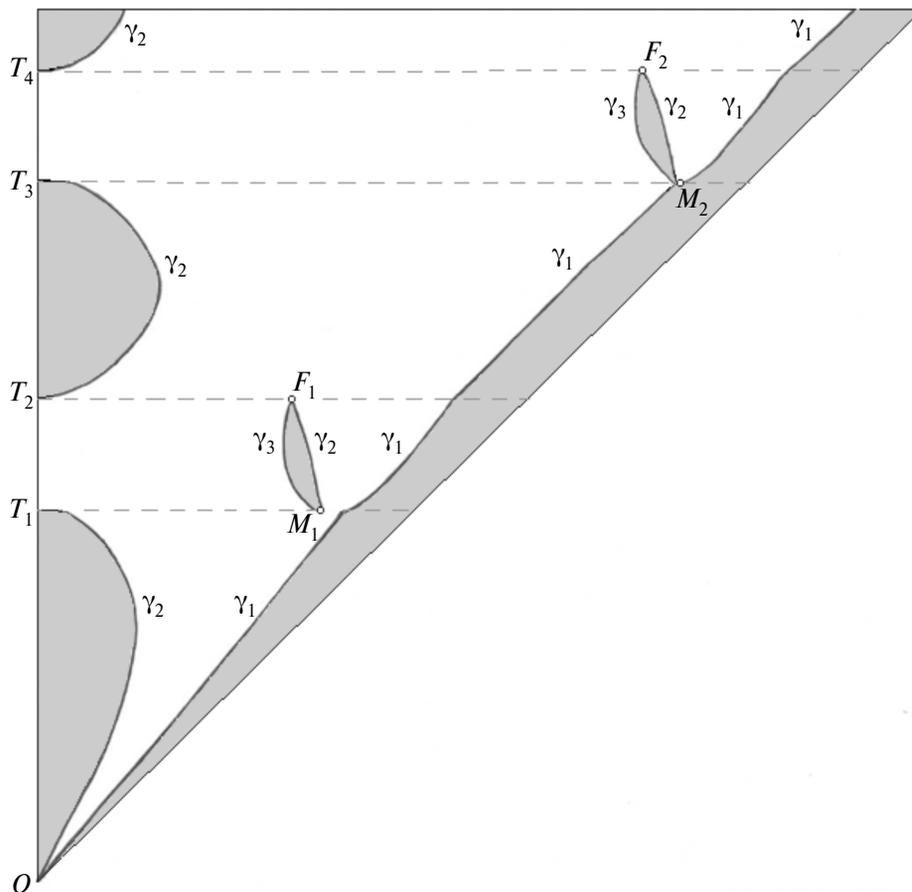


Рис. 6. Диаграмма функций оптимального управления при $\varpi = 0.5$.

“правее” точки перегиба P_1 ($\rho \approx 5.552116$), поэтому касательная из A_1 к контрольной кривой дала точку прикосновения M_1 ($\rho \approx 5.451954$), лежащую “левее”. В отличие от рис. 5, точка M_1 стала вершиной отдельной “чечевицы”, расположенной слева от кривой $\gamma_1(T)$. Ее вершина F_1 ($\rho \approx 4.761271$) найдена пересечением линий $\gamma_3(T)$ и $\gamma_2(T)$ при интегрировании системы (4.11). В третьем слое диаграммы (при $T_2 < T < T_3$) численно интегрировались уравнения (4.4), причем на каждом шаге проверялось взаимное расположение контрольной кривой и прямой A_1A_2 . Касаний между ними не произошло, т.е. в отличие от примера 1 режимы с девятью переключениями в этом диапазоне отсутствуют. Далее при $T = T_3$ точка A_1 ($\gamma_1 \approx 11.998992$) на контрольной кривой осталась одна, причем чуть левее точки перегиба P_3 ($\rho \approx 12.003092$), поэтому проведенная из A_1 касательная прошла через точку M_2 ($\rho \approx 12.005178$), лежащую правее, но почти неотличимо на рис. 6. При $T_3 < T < T_4$ (режимы с семью переключениями) интегрировались уравнения (4.11) до момента, когда линии $\gamma_3(T)$ и $\gamma_2(T)$ сошлись в вершине F_2 ($\rho \approx 11.211919$). Затем (после режима с тремя переключениями при $T = T_4$) вновь начались режимы с пятью переключениями и т.д.

Замечание 7. Из численных расчетов следует существование критического значения $\varpi_c \approx 0.312$, такого, что внутри диапазона $T_2 < T < T_3$ (начинающегося и завершающегося режимами с пятью переключениями) при $\varpi < \varpi_c$ имеется диапазон $T' < T < T'$ с девятью переключениями, а при $\varpi > \varpi_c$ такого диапазона нет.

Пример 3. На рис. 7 показана правая (зеркальная) часть диаграммы функций оптимального управления для случая $\varpi = 2$. Как и в примерах 1, 2, из вершины O выходят кривые $\gamma_1(T)$, $\gamma_2(T)$ с угловыми коэффициентами (4.14). Режимам с тремя переключениями соответствуют значения $T_1 \approx 6.486274$, $T_2 \approx 7.393761$, $T_3 \approx 12.769461$, $T_4 \approx 13.676947$.

В каждом из четырех слоев диаграммы интегрировались соответственно те же уравнения, что и в примере 2. При построении касательных к контрольной кривой были найдены точки прикосновения M_1 ($\rho \approx 4.599316$) – при $T = T_1$, M_2 ($\rho \approx 5.451954$) – при $T = T_3$. В конце

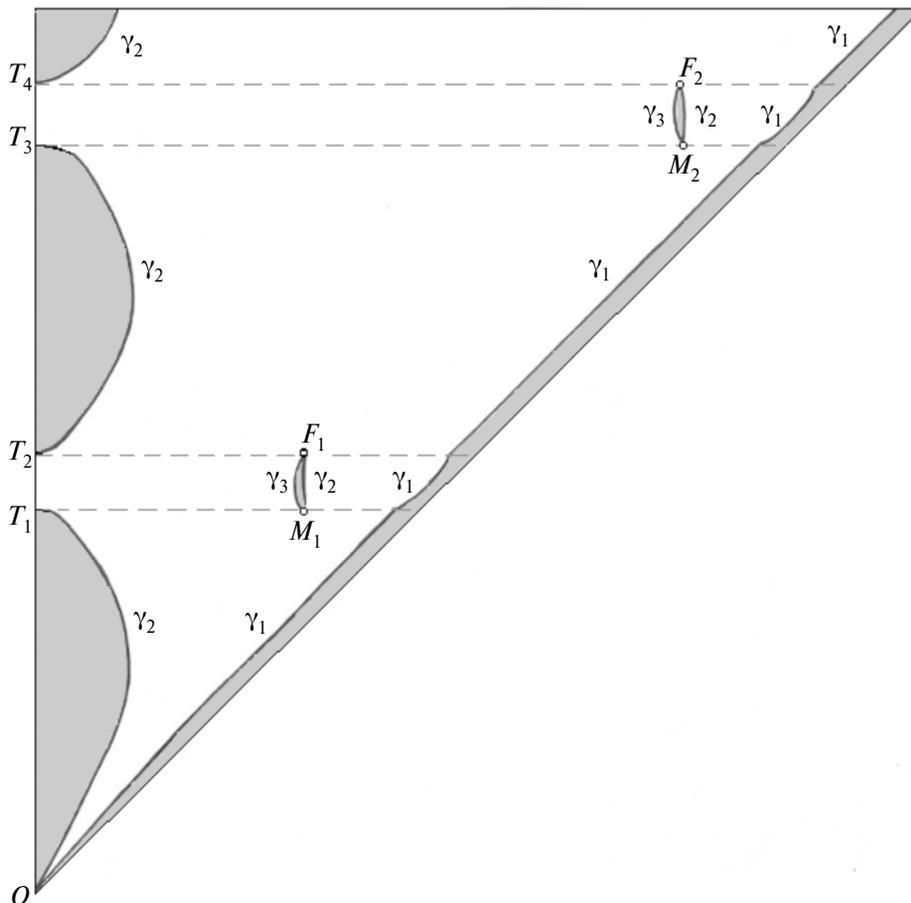


Рис. 7. Диаграмма функций оптимального управления при $\varpi = 2$.

режимов с семью переключениями кривые $\gamma_3(T)$ и $\gamma_2(T)$ сошлись при $T = T_2$ в вершине F_1 ($\rho \approx 4.519483$), а при $T = T_4$ – в вершине F_2 ($\rho \approx 10.934825$).

На каждой диаграмме (рис. 5–7) кривая $\gamma_1(T)$ имеет асимптоту $\gamma_1 \rightarrow T - (\ln 2) / \varpi$ в соответствии с ограничением (1.17). Чем больше значение ϖ , тем меньше ширина области, примакающей к краю диаграммы.

На рис. 8 показаны зависимости наименьшего времени $2T$ движения от задаваемой дальности $2b$ перемещения платформы. Примерам 1–3 соответствуют кривые a ($\varpi = 0.05$), b ($\varpi = 0.5$) и v ($\varpi = 2$).

Заметим, что при $\varpi \rightarrow \infty$ в системе (4.1) второе уравнение вырождается в условие $x_1 = 0$, оставшиеся первое и третье уравнения опишут в линейном приближении динамику платформы с одним “неперевернутым” маятником. Здесь оптимальное управление [3] имеет три переключения, так что в формуле дальности (3.15) при $u(0) = +1$ будет использована функция $\gamma_1(T)$ (4.8), т.е. получится зависимость

$$b(T) = \frac{T^2}{2} - \arccos^2\left(\cos^2 \frac{T}{2}\right).$$

На рис. 8 эта зависимость изображена пунктиром, она символизирует для системы (4.1) наилучшее быстродействие в предельном случае $\varpi \rightarrow \infty$.

5. Сравнение поведения линейной и нелинейной систем при $r=1, s=1$. Для задачи малого перемещения платформы с двумя маятниками, которые вначале покоились так, что один находился в устойчивом равновесии, а другой был перевернут, рассмотрим более точные (нелинейные) уравнения движения. Возьмем конкретные массо-инерционные характеристики: пусть $m_0=1$ кг – масса платформы, $m_1=0.4$ кг и $m_2=0.1$ кг – точечные массы на концах двух невесомых жестких стержней длинами $l_1=1$ м и $l_2 \approx 0.1995416$ м. Размер l_2 подобран из условия, чтобы после преобразования системы (1.1) к виду (4.1) в ней получился параметр $\varpi = 0.5$, тогда в расчетах можно использовать готовые управляющие функции из диаграммы на рис. 6. Конфигурацию системы зададим вектором $\mathbf{q} = (q_0, \varphi, \psi)$, где q_0 – горизонтальная координата платформы, углы отмеряются против часовой стрелки (φ – от верхнего положения равновесия, ψ – от нижнего).

Функция Лагранжа имеет вид $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T A(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - B(\mathbf{q})$, где

$$A(\mathbf{q}) = \begin{vmatrix} m_0 + m_1 + m_2 & -m_1 l_1 \cos \varphi & m_2 l_2 \cos \psi \\ -m_1 l_1 \cos \varphi & m_1 l_1^2 & 0 \\ m_2 l_2 \cos \psi & 0 & m_2 l_2^2 \end{vmatrix}, \quad B(\mathbf{q}) = g(m_1 l_1 \cos \varphi - m_2 l_2 \cos \psi).$$

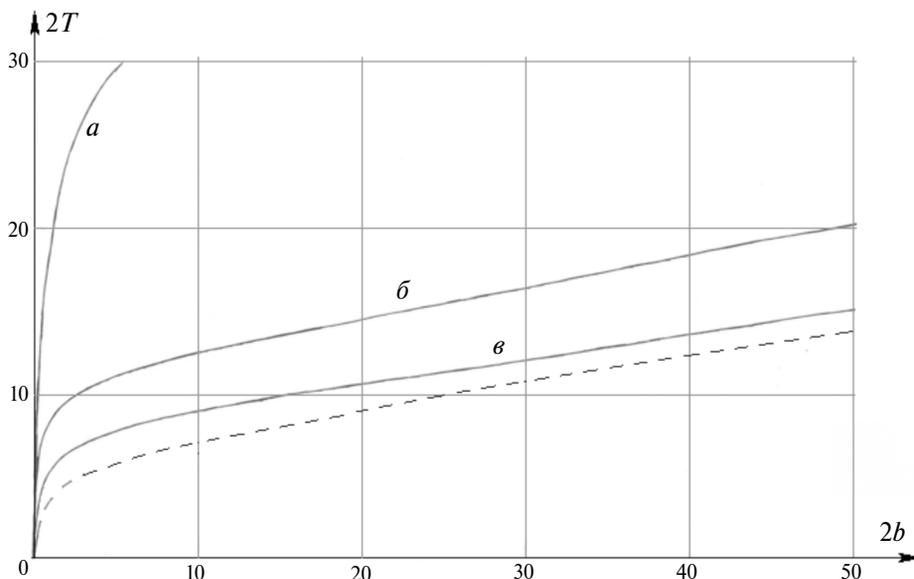


Рис. 8. Зависимость времени $2T$ от дальности $2b$ для разных значений ϖ .

Уравнения Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{b}u, \quad \mathbf{b} = (1, 0, 0)^T, \quad |u| \leq a \quad (5.1)$$

разрешим относительно старших производных. Вводя безразмерные значения и время

$$w = \frac{a}{m_0 g}, \quad \varepsilon_1 = \frac{m_1}{m_0}, \quad \varepsilon_2 = \frac{m_2}{m_0}, \quad \beta = \frac{l_1}{l_2}, \quad u_1 = \frac{u}{m_0 g}, \quad z_0 = \frac{q_0}{l_1}, \quad t_1 = t \sqrt{\frac{g}{l_1}},$$

преобразуем уравнения (5.1) к виду, где точками помечены производные по времени t_1 :

$$\ddot{z}_0 = [\varepsilon_1 \sin \varphi \cos \varphi + \varepsilon_2 \sin \psi \cos \psi + F] / \sigma, \quad |u_1| \leq w,$$

$$\ddot{\varphi} = [(1 + \varepsilon_1) \sin \varphi + \varepsilon_2 \sin \psi \cos(\psi - \varphi) + F \cos \varphi] / \sigma, \quad (5.2)$$

$$\ddot{\psi} = -\beta [\varepsilon_1 \sin \varphi \cos(\psi - \varphi) + (1 + \varepsilon_2) \sin \psi + F \cos \psi] / \sigma,$$

$$F = u_1 - \varepsilon_1 \dot{\varphi}^2 \sin \varphi + \varepsilon_2 \dot{\psi}^2 \sin \psi / \beta, \quad \sigma = 1 + \varepsilon_1 \sin^2 \varphi + \varepsilon_2 \sin^2 \psi.$$

В линейном приближении (в окрестности состояний покоя) эти уравнения упрощаются:

$$\ddot{z}_0 = \varepsilon_1 \varphi + \varepsilon_2 \psi + u_1, \quad |u_1| \leq w,$$

$$\ddot{\varphi} = (1 + \varepsilon_1) \varphi + \varepsilon_2 \psi + u_1, \quad \ddot{\psi} = -\beta [\varepsilon_1 \varphi + (1 + \varepsilon_2) \psi + u_1]. \quad (5.3)$$

Система (5.3) сохраняет смысл лишь при малых значениях углов. Во всяком случае, из физических соображений заранее известна недопустимая величина φ_* , при которой уравниются моменты (относительно оси вращения перевернутого стержня) силы тяжести и горизонтальной переносной силы инерции:

$$\varphi_* = \arctg \left(\frac{a/g}{m_0 + m_1 + m_2} \right) = \arctg \left(\frac{w}{1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2} \right).$$

Особенность линейной системы (5.3) состоит в том, что она инвариантна относительно одновременного изменения в k раз всех координат и управления u_1 . Это значит, что если при действии кусочно-постоянного управления с амплитудой w максимальные значения углов были в k раз больше приемлемых, то с амплитудой w/k они станут приемлемыми. Следовательно, к линейной системе (5.3) можно применить любую из показанных на диаграмме (рис. 6) управляющих функций, одновременно подобрав к ней амплитуду w . В этом смысле любой из найденных для системы (4.1) режимов управления может (при подходящем значении w) соответствовать малым перемещениям платформы.

Например, назначим безразмерное время движения $2T = 8$ и возьмем из диаграммы (рис. 6) соответствующую ему функцию оптимального управления с переключениями в моменты $\tau_1, \tau_2, T, 2T - \tau_2, 2T - \tau_1$, где $\tau_1 \approx 0.6409487695$, $\tau_2 \approx 2.2790125962$. Чтобы применить такое управление $u(t')$, $t' \in [0, 2T]$ к системе (5.3), потребуется дополнительная синхронизация, поскольку масштаб безразмерных значений времени t' в уравнениях (1.4) и t_1 в (5.2), (5.3) был разным. Для них пересчет времен соответствует формуле

$$t' = t_1 \sqrt{\lambda_3}, \quad \lambda_3 = \omega_2^2 l_1 / g \approx 5.4835132904 \text{ с}^{-2},$$

где λ_3 – третье собственное число матрицы $(-l_1 / g)BA^{-1}$. Для рассматриваемого случая $T = 4$ получим в новом времени t_1 продолжительность полутраектории $T \approx 1.7081678402$, а первые моменты переключения – в виде $\tau_1 \approx 0.2737117671$, $\tau_2 \approx 0.9732346909$.

При действии такого управления в линейной системе (5.3) была построена зависимость угла φ от безразмерного времени t_1 , показанная на рис. 9 пунктирной линией. При этом использовалось ограничение $w = 0.5$, что соответствует физической силе $a = 0.5m_0g \approx 5 \text{ Н}$. Как было замечено выше, при увеличении амплитуды w пунктирный график растянется пропорционально по вертикали (с сохранением точек пересечения с осью времени). Далее при

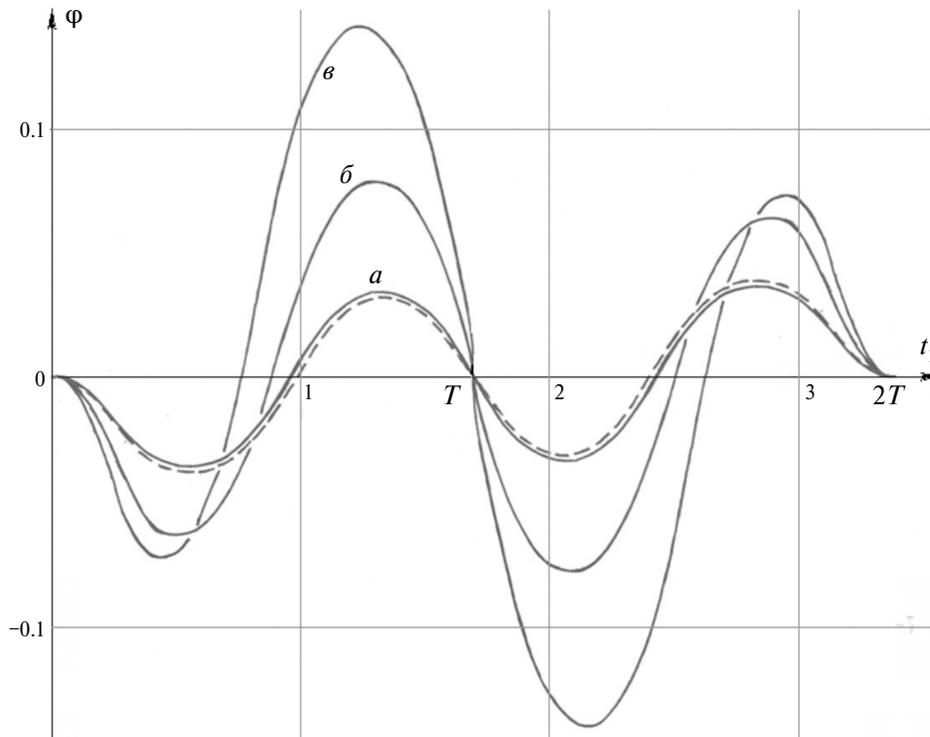


Рис. 9. Зависимость угла φ от времени t_1 для разных значений w .

корректировке моментов переключения φ_1, φ_2 (подобранных численно из условия минимума отклонений от состояния покоя в конце) были построены аналогичные траектории для нелинейной системы (5.2). На рис. 9 они изображены сплошными линиями a ($w=0.5$), b ($w=1.0$), v ($w=1.5$). На рис. 10 показано (в другом масштабе), как менялась при этом угловая координата ψ “нижнего” маятника. Все эти процессы протекали за одинаковое физическое время $2T=2.442212866$ с, но лишь для $w=0.5$ моменты времени переключения управления для линейной и нелинейной систем были близки: $\tau_1 \approx 0.195666468147$ с (и $\tau_1 \approx 0.190545902279$ с), $\tau_2 \approx 0.695729660034$ с (и $\tau_2 \approx 0.682336700252$ с), как и дальности перемещения платформы $L \approx 0.19584502$ м (и $L \approx 0.17184444$ м). При $w=1.0$ дальность в системе (5.2) увеличилась незначительно, а при $w=1.5$ – даже уменьшилась, т.е. режим управления с пятью переключениями здесь не является оптимальным. Значит, для взятого нами (произвольно) безразмерного времени $2T=8$ линеаризация уравнений оправдана лишь при условии, когда $w < 0.5$.

Закключение. Рассмотрена задача оптимального по быстродействию малого перемещения (на заданное расстояние) платформы с n маятниками при действии внешней ограниченной горизонтальной силы, когда в начальный и конечный моменты времени система находится в покое, причем одна часть маятников – в устойчивом равновесии, а другая – в неустойчивом. Задача решалась для взаимной к быстродействию вариационной задачи на максимум дальности при заданном времени движения $2T$. В линейном приближении с учетом симметрий задачи исследованы необходимые условия оптимальности на основе принципа максимума Понтрягина. Моменты времени переключения кусочно-постоянной функции оптимального управления оказались решениями системы нелинейных уравнений (1.14)–(1.15), эволюция которых далее учитывалась в геометрической интерпретации необходимых условий оптимальности как свойств точек на “контрольной кривой” в n -мерном пространстве. Показано, что при достаточно малой длительности T полутраектории функция управления $u(t)$, $t \in [0, T)$ имеет ровно n моментов переключения. При этом начальное значение управления $u(0)$ положительно, если число перевернутых маятников четно, и отрицательно – в противном случае. Другими словами, малое наибыстрейшее перемещение платформы с нечетным числом перевернутых маятников всегда начинается с реверса. Подробно исследован случай двух маятников, один из которых перевернутый, а другой – нет. Показано, что для такой системы всегда существуют значения T , при которых оптимальное управление имеет ровно три переключения. Описаны закономерности эволюции функций оптимального управления для

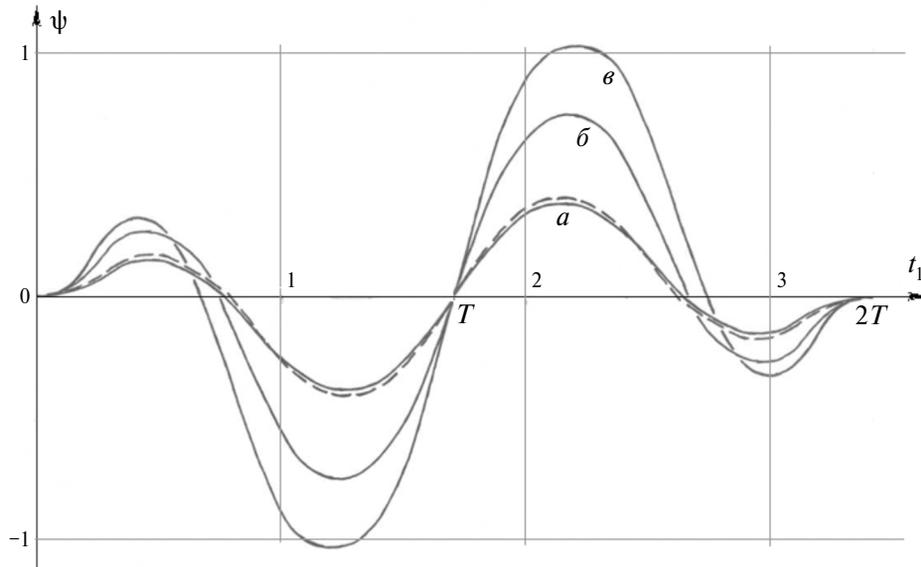


Рис. 10. Зависимость угла ψ от времени t_1 для разных значений W .

системы (4.1) как чередования режимов с разным числом переключения управления (утверждение 5). В отличие от ранее рассмотренной в [12] задачи перемещения платформы с пружинными осцилляторами, здесь не может быть периодического повторения сценариев, и в этом смысле не может быть целиком описана эволюция оптимальных режимов “для всех значений T ”. Проведенные численные эксперименты касались системы (4.1) с конкретными значениями параметра w , для них были построены диаграммы функций оптимального управления (рис. 5–7). Найденные для линейной системы (5.3) режимы оптимального управления применены к задаче малого перемещения этого объекта с нелинейными уравнениями (5.2). Показано, что любой из построенных для системы (4.1) оптимальных сценариев (с любым значением $2T$) может оказаться актуальным для задачи малого перемещения физической модели, если при этом задать подходящее ограничение на управление. Существует монотонно убывающая зависимость между задаваемым произвольно временем $2T$ перемещения объекта и таким значением параметра $w = a / (m_0 g)$, при котором траектории систем (5.2) и (5.3) окажутся близкими, т.е. линеаризация уравнений будет оправданной. При этом для достаточно больших значений ресурса w режим с пятью переключениями управления может быть не только не оптимальным, но и невозможным для гашения колебаний за наперед заданное время.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство замечания 5. Подставим выражения

$$\beta_i = (-1)^{i+1} \frac{\delta_i}{4}, \quad i = \overline{1, k},$$

в соотношения (3.8), а эти соотношения – в уравнения (3.7). Методом математической индукции предположим, что равенства вида (3.10) выполнены для всех “предыдущих” значений $j < m$ ($m < k$), т.е.

$$\sum_{i=1}^k \delta_i = 1, \quad \sum_{i=1}^k \delta_i^3 = 4, \quad \sum_{i=1}^k \delta_i^5 = 4^2, \quad \dots, \quad \sum_{i=1}^k \delta_i^{2m-3} = 4^{m-2}. \quad (\text{П. 1})$$

Докажем аналогичное соотношение при $j = m$, т.е. для сумм со степенями $2m-1 = s$, для чего в уравнении (3.7) сгруппируем разности симметричных (относительно середины) компонент (первой и последней, второй и предпоследней и т.д.) в виде

$$\sum_{i=1}^k (-1)^{i+1} (\alpha_i^s - \alpha_{n-i+1}^s) = \frac{1}{2}. \quad (\text{П. 2})$$

Внутри каждой i -й скобки, $i = \overline{1, k}$, получим многочлен только от переменной δ_i . Например, для первого слагаемого

$$\alpha_1^s - \alpha_n^s = \left(\frac{1}{2} + \frac{\delta_1}{4}\right)^s - \left(\frac{1}{2} - \frac{\delta_1}{4}\right)^s =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^s \left[2C_s^1 \frac{\delta_1}{2} + 2C_s^3 \left(\frac{\delta_1}{2}\right)^3 + \dots + 2C_s^{s-2} \left(\frac{\delta_1}{2}\right)^{s-2} + 2C_s^s \left(\frac{\delta_1}{2}\right)^s \right] \quad . \quad (\text{П. 3})$$

Аналогичное выражение (с заменой δ_1 на δ_2) получим для второго слагаемого:

$$-(\alpha_2^s - \alpha_{n-1}^s) = -\left(\frac{1}{2} - \frac{\delta_2}{4}\right)^s + \left(\frac{1}{2} + \frac{\delta_2}{4}\right)^s$$

и т.д., где останутся лишь каждый второй коэффициенты бинома Ньютона, для которых

$$C_s^1 + C_s^3 + \dots + C_s^{s-2} + C_s^s = 2^{s-1}. \quad (\text{П. 4})$$

Подставляя в (П. 2) k слагаемых вида (П. 3) и учитывая уже принятые соотношения (П. 1), получим при коэффициентах бинома одинаковость накопленных сумм и требуемое равенство

$$\sum_{i=1}^k \delta_i^{2m-1} = 4^{m-1}. \quad (\text{П. 5})$$

Таким образом, методом математической индукции обоснована система соотношений вида (П. 5) при $m=1, 2, \dots, k$. Далее из нее нужно найти k неизвестных $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k$. В силу симметричности системы перейдем к новым переменным в виде элементарных симметрических многочленов:

$$e_1 = \delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_k, \quad e_2 = \sum_{1 \leq i < j \leq k} \delta_i \delta_j, \quad e_3 = \sum_{1 \leq i < j < r \leq k} \delta_i \delta_j \delta_r, \quad \dots, \quad e_k = \delta_1 \delta_2 \dots \delta_k, \quad (\text{П. 6})$$

дополняемых формальными параметрами $e_{k+i} = 0$ при $i \in N$.

Согласно теореме Виета, эти выражения (П. 6) соответствуют по формулам

$$a_i = (-1)^i e_i, \quad i = \overline{1, k}, \quad (\text{П. 7})$$

коэффициентам “порождающего” алгебраического уравнения k -й степени

$$\delta^k + a_1 \delta^{k-1} + a_2 \delta^{k-2} + \dots + a_{k-1} \delta + a_k = 0, \quad (\text{П. 8})$$

имеющего своими корнями искомые решения $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k$ системы (3.10). Далее будем искать числовые значения параметров e_i , $i = \overline{1, k}$, вводя краткие обозначения для сумм степеней:

$$q_r = \sum_{i=1}^k \delta_i^r, \quad r \in N. \quad (\text{П. 9})$$

При заданном конкретном значении k из системы (3.10) известны числовые значения параметров с нечетными номерами:

$$q_1 = 1, \quad q_3 = 4, \quad q_5 = 4^2, \quad \dots, \quad q_{2k-1} = 4^{k-1} \quad (\text{П. 10})$$

Воспользуемся рекуррентными формулами Ньютона [17, с. 92]:

$$q_1 = e_1, \quad q_2 = e_1 q_1 - 2e_2, \quad q_3 = e_1 q_2 - e_2 q_1 + 3e_3, \quad q_4 = e_1 q_3 - e_2 q_2 + e_3 q_1 - 4e_4. \quad \dots \quad (\text{П. 11})$$

Здесь параметры q_2, q_4, \dots (с четными номерами) выражаются через предыдущие q_1, q_3, \dots (с нечетными), поэтому из соотношений (П. 11) удастся составить замкнутую систему из k уравнений с известными значениями (П. 10) и искомыми параметрами e_i , $i = \overline{1, k}$. Найдя их значения, можно вычислить по формулам (П. 7) коэффициенты порождающих уравнений, которые показаны в таблице.

Каждый столбец таблицы начинается с элемента на главной диагонали, заполняется сверху вниз и продолжается бесконечно. В первом столбце все числа равны “-1”. Каждый элемент четного столбца равен сумме двух чисел (одно берется сверху, другое — слева от верхнего), как

это бывает в “треугольнике Паскаля”. Каждый последующий нечетный столбец получается из предыдущего (нечетного) путем умножения на “-1”.

Справедливость числовых значений параметров $e_i = (-1)^i a_i$, $i = \overline{1, k}$, определяемых из таблицы, легко проверяется их подстановкой в рекуррентные формулы (П. 11), что даст для нечетных значений a_1, a_3, \dots ожидаемые числовые результаты (П. 10). Для отыскания корней системы (3.10), например при $k = 10$, достаточно на промежутке $\delta \in [-2; 2]$ протабулировать с мелким шагом выражение из левой части “порождающего” уравнения

$$\delta^{10} - \delta^9 - 9\delta^8 + 8\delta^7 + 28\delta^6 - 21\delta^5 - 35\delta^4 + 20\delta^3 + 15\delta^2 - 5\delta - 1 = 0,$$

фиксируя в качестве корней значения, при которых меняется знак выражения.

Таблица. Коэффициенты порождающих уравнений

k	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}
1	-1											
2	-1	-1										
3	-1	-2	1									
4	-1	-3	2	1								
5	-1	-4	3	3	-1							
6	-1	-5	4	6	-3	-1						
7	-1	-6	5	10	-6	-4	1					
8	-1	-7	6	15	-10	-10	4	1				
9	-1	-8	7	21	-15	-20	10	5	-1			
10	-1	-9	8	28	-21	-35	20	15	-5	-1		
11	-1	-10	9	36	-28	-56	35	35	-15	-6	1	
12	-1	-11	10	45	-36	-84	56	70	-35	-21	6	1

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Соколов Б.Н. Управление колебаниями. М.: Наука, 1980. 383 с.
2. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969. 384 с.
3. Мамалыга В.М. Об оптимальном управлении одной колебательной системой // Изв. АН СССР. МТТ. 1978. № 3. С. 8–17.
4. Ананьевский И.М., Ишханян Т.А. Управление твердым телом, несущим диссипативные осцилляторы, в присутствии возмущений // Изв. РАН. ТиСУ. 2019. № 1. С. 42–51.
5. Ovsievich A., Ananievski I. Robust Feedback for a Linear Chain of Oscillators // JOTA. 2021. V. 188. № 1. P. 307–316.
6. Ананьевский И.М., Овсеевич А.И. Управляемое перемещение линейной цепочки осцилляторов // Изв. РАН. ТиСУ. 2021. № 5. С. 18–26.
7. Голубев Ю.Ф. Оптимальное по быстродействию управление перемещением неустойчивого стержня // Изв. РАН. ТиСУ. 2008. № 5. С. 42–50.
8. Srinivasan B., Huguenin P., Bonvin D. Global Stabilization of an Inverted Pendulum. Control Strategy and Experimental Verification // Automatica. 2009. V. 45. P. 265–269.
9. Gordillo F., Aracil J. A New Controller for the Inverted Pendulum on a Cart // Int. J. Robust Nonlinear Control. 2008. № 18. P. 1607–1621.
10. Мартыненко Ю.Г., Формальский А.М. Управляемый маятник на подвижном основании // Изв. РАН. МТТ. 2013. № 1. С. 9–23.
11. Рапопорт Л.Б., Генералов А.А. Управление перевернутым маятником на колесе // АиТ. 2022. № 8. С. 3–28.
12. Каюмов О.Р. Оптимальное по быстродействию перемещение платформы с осцилляторами // ПММ. 2021. Т. 85. Вып. 6. С. 699–718.
13. Каюмов О.Р. Диаграммы функций оптимального управления в задаче наибоыстрейшего перемещения платформы с двумя осцилляторами // Изв. РАН. ТиСУ. 2022. № 5. С. 66–83.
14. Каюмов О.Р. О диаграммах функций оптимального управления в задаче перемещения платформы с осцилляторами // Изв. РАН. ТиСУ. 2024. № 2. С. 87–103.
15. Калман Р.Е. Об общей теории систем управления // Тр. 1-го Конгресса Междунар. федерации по автоматическому управлению. М.: 1961. С. 521–546.
16. Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972. 574с.
17. Прасолов В.В. Многочлены. М.: МЦНМО, 2003. 336 с.