

УДК 519.977

ПРИМЕНЕНИЕ ОПОРНЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ ДИСКРЕТНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ВЫПУКЛЫМ МНОЖЕСТВОМ УПРАВЛЕНИЙ

© 2025 г. А. С. Бортакровский^{a, b, *}

^aМосковский авиационный институт (национальный исследовательский ун-т),
Москва, Россия

^bМИСИС (национальный исследовательский технологический ун-т), Москва, Россия

*e-mail: asbortakov@mail.ru

Поступила в редакцию 22.11.2024 г.

После доработки 25.11.2024 г.

Принята к публикации 24.02.2025 г.

Рассматривается задача быстродействия дискретной линейной нестационарной системы переменной размерности, множества допустимых значений управления которой представляют собой выпуклые компакты. Предполагается, что заданы опорные функции этих множеств. На первом этапе решения задачи находится минимальное время достижения заданного конечного состояния, на втором — строится управление, приводящее систему в это конечное состояние за найденное время. В алгоритме решения задачи используются только заданные опорные функции.

Ключевые слова: задача быстродействия, дискретная система, ограниченное управление, особое управление, опорная функция

DOI: 10.31857/S0002338825020047, EDN: ARSKFA

APPLYING SUPPORT FUNCTIONS TO SOLVING A PROBLEM SPEED OF DISCRETE LINEAR SYSTEMS WITH A CONVEX SET OF CONTROLS

A. S. Bortakovskii^{a, b, *}

^aMoscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia

^bNational University of Science and Technological University (MISiS), Moscow, Russia

*e-mail: asbortakov@mail.ru

The problem of the speed of a discrete linear non-stationary system of variable dimension is considered, the sets of admissible control values of which are convex compacts. It is assumed that the support functions of these sets are specified. At the first stage of solving the problem, the minimum time to reach the specified final state is found, at the second stage, control is constructed that brings the system to this final state in the found time. In the algorithm for solving the problem, only the specified support functions are used.

Keywords: speed problem, discrete system, limited control, special control, support function

Введение. Необходимые условия оптимальности управления линейными дискретными [1, 2] или непрерывными [3] динамическими системами существенно отличаются, особенно для задачи быстродействия [4–6]. Основные различия следующие. Во-первых, малые вариации момента окончания движения невозможны для дискретного времени. Поэтому дополнительного условия для нахождения времени окончания движения дискретной системы получить нельзя. Отсутствие такого условия приводит, как правило, к необходимости некоторого перебора моментов окончания при поиске оптимального. Напротив, в непрерывном случае малые вариации момента окончания движения допустимы. Поэтому из условия трансверсальности получаем равенство (например, равенство нулю гамильтониана в конечный момент времени), которое используется затем для нахождения момента окончания.

Во-вторых, оптимальное по быстродействию управление непрерывной линейной системой, как правило, находится однозначно [3], например классические задачи Д. Бушоу [7] или Фельдбаума А.А. [8]. Разумеется, изменение оптимального программного управления на множестве нулевой меры здесь не учитывается. Наоборот, оптимальное по быстродействию управление дискретной системой почти всегда не является единственным. Причина заключается в следующем. В крайнюю (экстремальную) точку множества достижимости приводит единственная траектория, т.е. управление определяется однозначно. Напомним, что точка выпуклого множества называется крайней [9] (экстремальной [10]), если ее удаление из множества не нарушает его выпуклости. Если множество допустимых значений управления непрерывной линейной системой компактно, то множество достижимости – выпуклое компактное множество. Выпуклость обеспечивается свойствами непрерывной системы, описанными в [11], причем обычно эта выпуклость строгая, т.е. все точки границы множества достижимости – крайние, даже выступающие [9] (строго выпуклые, экспонированные [10]). Напомним, что для выступающей точки выпуклого множества, по определению, существует проходящая через нее опорная гиперплоскость, которая не имеет с множеством других общих точек.

Для дискретных систем с выпуклым компактным множеством допустимых значений управления множество достижимости – также выпуклый компакт. Однако строгой выпуклости, как правило, нет. Например, если множество допустимых значений управления представляет собой выпуклый многогранник, то и множество достижимости будет выпуклым многогранником, при этом только его вершины являются крайними точками. Остальные граничные точки не будут крайними. Поэтому существуют разные траектории, приводящие дискретную систему в граничную точку, которая не является крайней.

В-третьих, применение необходимых условий оптимальности дискретной линейной системы в задаче быстродействия, как правило, малоэффективно. Из-за неединственности оптимального управления функция Понтрягина не зависит от управления в некоторые, а может быть, и в каждый момент дискретного времени. Поэтому оптимальное управление является особым. Заметим, что в непрерывных системах особые управления можно найти, используя другие условия принципа максимума.

В статье предлагается алгоритм решения задачи быстродействия дискретной линейной нестационарной системы с ограниченным управлением. В практических задачах множество допустимых значений управления, как правило, небольшой размерности и довольно “простое”. Это либо выпуклый многогранник, в частности прямоугольный параллелепипед, либо телесный эллипсоид, либо их выпуклые комбинации. Такие геометрические ограничения на значения управления задаются линейными или квадратичными неравенствами. Например, ограничения тяги двигателя, моментов вращения, углов направлений и других параметров управления. Для описания многогранника вместо системы линейных неравенств часто используется набор его вершин. Для задания любого выпуклого множества можно применять опорную функцию. Это один из универсальных способов однозначного описания выпуклых множеств. Для многогранников и эллипсоидов [12] опорные функции вычисляются довольно просто. Применение опорных функций для описания множеств достижимости линейных непрерывных динамических систем показано в [13]. Для дискретных систем опорные функции применяются реже из-за неединственности оптимального по быстродействию управления.

Предлагаемый алгоритм содержит два этапа. На первом этапе находится минимальное время окончания движения. При этом приходится многократно решать задачи конечномерной оптимизации небольшой размерности. На втором этапе строится оптимальное управление, приводящее систему в заданное конечное состояние. При этом особое управление нужно представлять в виде комбинации неособых, выбранных специальным образом, управлений. Эффективность алгоритма демонстрируется на примерах. Подчеркнем, что в алгоритме используются только опорные функции.

1. Постановка задачи. Пусть движение дискретной линейной системы описывается уравнением

$$x_{t+1} = A_t x_t + B_t u_t, \quad (1.1)$$

где x_t, u_t – векторы состояния системы и значения управления в момент t дискретного времени $t = 0, 1, \dots, T-1$; $x_t \in \mathbb{R}^{n_t}$; $u_t \in U_t$, U_t – выпуклое компактное подмножество \mathbb{R}^{m_t} , содержащее нулевой элемент $o \in U_t$. Предполагаем, что известна опорная функция [9,10] каждого множества U_t допустимых значений управления u_t , $t = 0, 1, \dots, T-1$. Матрицы A_t и B_t имеют размеры $n_{t+1} \times n_t$ и $n_{t+1} \times m_t$ соответственно. Терминальные состояния системы заданы начальным и конечным условиями:

$$x_0 = S, \quad x_T = F, \quad (1.2)$$

где $S \in \mathbb{R}^{n_0}$, $F \in \mathbb{R}^{n_T}$. Требуется найти наименьшее время T движения системы из начального состояния в конечное, а также допустимое управление, обеспечивающее это движение, т.е. решить задачу быстродействия:

$$T \rightarrow \min. \quad (1.3)$$

Система (1.1) отличается от обычной [1, 2] переменной размерностью. Это обобщение для дискретных систем не является существенным и не играет важной роли в отличие от гибридных систем [14]. Предполагаем, что решение задачи (1.3) существует, т.е. система (1.1) вполне управляема [15].

Решение задачи быстродействия будем проводить в два этапа. На первом этапе определяется наименьшее время движения, т.е. минимальное время достижения цели – заданного конечного состояния. На втором этапе строится управление, обеспечивающее это движение. Оба этапа выполняются только с использованием заданных опорных функции множеств допустимых значений управления.

2. Опорные функции и крайние точки выпуклых множеств. Приведем некоторые известные понятия выпуклого анализа [9,10], а также новые алгоритмы нахождения граничных и крайних точек выпуклого множества, которые будем применять в разд. 3 для множества достижимости системы (1.1).

2.1. Основные свойства опорных функций. Опорная функция выпуклого компактного подмножества $X \subset \mathbb{R}^n$ для аргумента $y \in \mathbb{R}^n$ определяется равенством

$$\rho(y | X) = \max_{x \in X} (x, y). \quad (2.1)$$

Здесь (x, y) – скалярное произведение в евклидовом пространстве \mathbb{R}^n . Если взять единичный вектор $y = e$, то величина $\rho(e | X)$ опорной функции будет равна алгебраическому значению ортогональной проекции множества X на направление e . В этом заключается геометрический смысл опорной функции. Выпуклое компактное множество X содержится полностью в полупространстве $(x, y) \leq \rho(y | X)$, ограниченном опорной гиперплоскостью:

$$H(y | X) = \{(x, y) = \rho(y | X)\},$$

ортогональной ненулевому вектору $y \neq 0$. Опорная функция (2.1) выпуклого множества является выпуклой функцией. Кроме того, для любого линейного отображения $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ множество AX – выпуклое компактное подмножество \mathbb{R}^m , причем

$$\rho(y | AX) = \rho(A^* y | X), \quad (2.2)$$

где $A^*: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ – сопряженное отображение.

Крайней [9] (*экстремальной* [10]) точкой выпуклого множества называется такая его точка, при удалении которой множество остается выпуклым. Иначе говоря, крайняя точка не является внутренней (например, серединой) для любого отрезка, целиком принадлежащего выпуклому множеству.

Суммой (по Минковскому) выпуклых множеств X_1, \dots, X_k называется множество

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_k, \quad (2.3)$$

состоящее из векторов

$$x = x_1 + x_2 + \dots + x_k, \quad (2.4)$$

где $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2, \dots, x_k \in X_k$. Отметим следующие важные свойства:

- а) сумма выпуклых компактных множеств есть выпуклое компактное множество;
- б) опорная функция суммы выпуклых компактных множеств равна сумме опорных функций слагаемых [9,10], т.е.

$$\rho(y | X_1 + \dots + X_k) = \rho(y | X_1) + \dots + \rho(y | X_k); \quad (2.5)$$

в) разложение (2.4) для крайней точки x множества (2.3) единственное, причем все слагаемые будут крайними точками соответствующих множеств, т.е. x_i – крайняя точка X_i , $i = 1, \dots, k$.

Докажем последнее утверждение. Сначала покажем, что все слагаемые в (2.4) – крайние точки. Предположим противное. Пусть, например, x_i не является крайней точкой множества X_i . Тогда она будет серединой некоторого отрезка $[x_i^-, x_i^+]$, целиком лежащего в X_i . Подставляя в (2.4) вместо x_i либо точку x_i^- , либо x_i^+ , получаем соответственно либо точку x^- , либо x^+ . При этом точка x окажется серединой отрезка $[x^-, x^+]$, целиком лежащего в X , что невозможно, поскольку точка x крайняя.

Теперь докажем единственность разложения (2.4). Пусть имеются два представления точки x :

$$x = x_1^- + x_2^- + \dots + x_k^-, \quad x = x_1^+ + x_2^+ + \dots + x_k^+. \quad (2.6)$$

Составим третье:

$$x = \frac{1}{2}(x_1^- + x_1^+) + \frac{1}{2}(x_2^- + x_2^+) + \dots + \frac{1}{2}(x_k^- + x_k^+). \quad (2.7)$$

Если $x_1^- \neq x_1^+$, то первое слагаемое в (2.7) – это середина отрезка $[x_1^-, x_1^+]$, лежащего в X_1 . Тогда первое слагаемое не является крайней точкой X_1 , что противоречит ранее доказанному утверждению. Значит, $x_1^- = x_1^+$. Аналогично заключаем, что $x_i^- = x_i^+$, $i = 2, \dots, k$, поэтому разложения (2.6) совпадают.

2.2. Опорные функции многогранника и эллипсоида. Приведем примеры опорных функций для двух типов множеств, наиболее часто встречающихся в задачах управления. Если множество X – выпуклый многогранник с вершинами x^1, \dots, x^k , то его опорная функция вычисляется по формуле

$$\rho(y|X) = \max_{i=1, \dots, k} (y, x^i),$$

причем максимум достигается либо в одной точке $x^* = \arg \max_{i=1, \dots, k} (y, x^i)$ – в вершине многогранника (иначе говоря, на 0-мерной грани), либо на бесконечном множестве точек – на r -мерной грани многогранника ($1 \leq r < n$).

Пусть X – телесный эллипсоид с центром в точке $a \in \mathbb{R}^n$, заданный квадратным неравенством

$$(x - a)' Q^{-1} (x - a) \leq 1,$$

где Q – симметрическая положительно определенная матрица порядка n . Здесь и далее штрих у матрицы означает ее транспонирование. Опорная функция эллипсоида вычисляется по формуле [11]

$$\rho(y|X) = (a, y) + \sqrt{y' Q y},$$

причем максимум достигается в одной точке:

$$x^* = a + (y' Q y)^{-1/2} Q y.$$

2.3. Критерий принадлежности точки выпуклому компактному множеству. При помощи опорной функции можно записать необходимое и достаточное условие [9, 10, 13] принадлежности точки $z \in \mathbb{R}^n$ выпуклому компактному подмножеству $X \subset \mathbb{R}^n$:

$$z \in X \Leftrightarrow (y, z) = \rho(y|X) \quad \forall y \in \mathbb{R}^n. \quad (2.8)$$

Это условие неудобно для проверки, так как приходится рассматривать все направления y . Проще использовать калибровочную функцию Минковского [9] (дистанционную функцию [10]), которая определяется для выпуклого компактного множества X , содержащего нулевой элемент $o \in X$, следующим образом:

$$\mu(z|X) = \min\{\lambda \geq 0 | z \in \lambda X\}. \quad (2.9)$$

Критерий (2.8) при помощи функции (2.9) будет иметь вид

$$z \in X \Leftrightarrow \mu(z|X) \leq 1.$$

Действительно, если z^* – граничная точка множества X , принадлежащая лучу идущему из нулевой точки $o \in \mathbb{R}^n$ через точку z , то функция Минковского будет равна отношению $\mu(z|X) = z : z^*$ коллинеарных радиус-векторов. Если $|z| \leq |z^*|$, то $z \in X$, иначе $z \notin X$.

Составим вспомогательную задачу для вычисления функции Минковского при помощи опорной функции. Пусть $z \in \mathbb{R}^n$ и $X \subset \mathbb{R}^n$ – выпуклое компактное множество, содержащее нулевой элемент $o \in X$. Рассмотрим задачу условной минимизации:

$$\beta_z(x|X) = \frac{\rho(x|X)}{(x,z)} \rightarrow \min_{(x,z)>0}. \quad (2.10)$$

Вектор $z \in \mathbb{R}^n$ является параметром для функции $x \rightarrow \beta_z(x|X)$, которая определена на полупространстве $(x,z) > 0$. Отметим, что функция (2.10) не зависит от длины вектора x , а зависит только от его направления. Поэтому минимизацию (2.7) можно проводить на полусфере:

$$S_z = \{e \in \mathbb{R}^n \mid (e,z) > 0, |e|=1\}$$

единичного радиуса с центром в точке o . Выясним геометрический смысл функции (2.10). Для этого представим ее в виде

$$\beta_z(e|X) = \frac{\rho(e|X)}{(e,z)} = \frac{\rho(e|X)}{|z| \cos \varphi}. \quad (2.11)$$

Здесь φ – угол между векторами e и z . На рис. 1 изображены: плоское множество X , опорная прямая $H(e|X)$, луч oz , z_e – точка пересечения опорной прямой и луча, а также угол φ . В прямоугольном треугольнике с гипотенузой oz_e катет, прилежащий к углу φ , равен $\rho(e|X)$. Поэтому отношение $\rho(e|X)/\cos \varphi$ – это длина гипотенузы oz_e . Таким образом, значение функции (2.11) равно отношению $\beta_z(e|X) = z_e : z = |z_e| : |z|$ коллинеарных векторов z_e и z (или их длин). Если направление луча oz задано единичным вектором $|z|=1$, то величина $\beta_z(e|X) = |z_e|$ определяет алгебраическое значение косой проекции множества X на ось oz вдоль прямой $H(e|X)$.

На рис. 2, который иллюстрирует результат минимизации (2.10), изображены: оптимальное направление e^* , соответствующая опорная прямая $H(e^*|X)$, проходящая через граничную точку z^* , лежащую на луче oz . Минимальное значение функции (2.11) равно отношению $\beta_z(e^*|X) = z^* : z$. Обратное отношение определяет функцию Минковского. Поэтому

$$\beta_z(e^*|X) = \min_{(e,z)>0} \beta_z(e|X) = \frac{1}{\mu(z|X)}.$$

Таким образом, критерий принадлежности точки $z \in \mathbb{R}^n$ выпуклому компактному множеству $X \subset \mathbb{R}^n$ можно записать в виде

$$z \in X \Leftrightarrow \beta_z(e^*|X) \geq 1.$$

При численном решении задачи минимизации (2.10) нужно учитывать, что минимизируемая функция не является дифференцируемой, поскольку опорная функция дифференцируема только по направлениям. Поэтому приходится применять субградиентные или другие методы [16]. Заметим, что оптимальное направление e^* единственное, так как точка z^* пересечения луча oz с границей множества X одна.

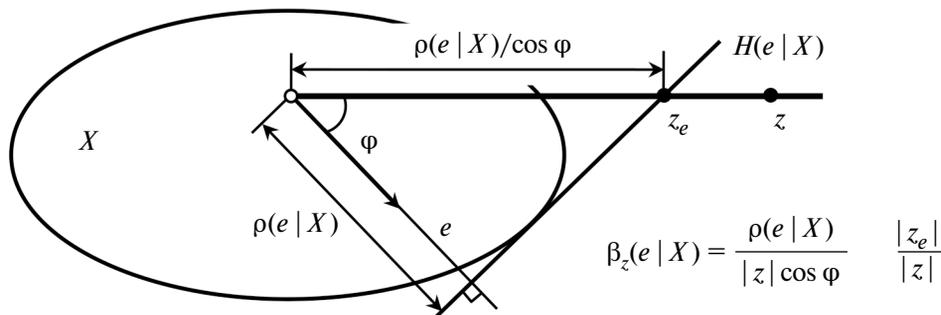


Рис. 1. Геометрический смысл функции $\beta_z(e|X)$.

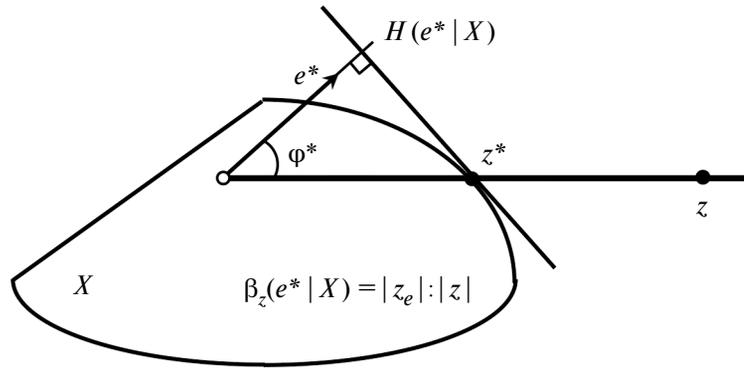


Рис. 2. Геометрический смысл минимального значения $\beta_z(e^* | X)$.

Поскольку задача минимизации (2.10) вспомогательная для решения вопроса о принадлежности $z \in X$, полезно учитывать следующее условие окончания. Если на некотором шаге итерационного метода поиска минимума (2.10) найдено направление e , для которого

$$\beta_z(e | X) < 1,$$

то продолжать итерации не нужно, так как точка z лежит вне множества X .

2.4. Алгоритм покоординатного поиска крайней точки выпуклого компактного множества. Рассмотрим алгоритм нахождения крайней точки выпуклого множества при помощи опорной функции. Пусть задано выпуклое компактное подмножество $X \subset \mathbb{R}^n$ и ортонормированный базис e_1, \dots, e_n пространства \mathbb{R}^n .

На первом шаге вычисляем $\rho_1 = \rho(e_1 | X)$ и определяем множество $X_1 = \{(\rho_1, x_2, \dots, x_n)' \in X\}$ точек вида $x = (\rho_1, x_2, \dots, x_n)'$, принадлежащих X . Заметим, что опорная гиперплоскость H_1 , задаваемая уравнением $(e_1, x) = \rho_1$, где $x \in \mathbb{R}^n$, содержит точки именно такого вида $(\rho_1, x_2, \dots, x_n)' \in \mathbb{R}^n$. Значит, множество $X_1 = X \cap H_1$ совпадает с указанным пересечением. Если множество X_1 состоит из одной точки $x^* = (\rho_1, x_2^*, \dots, x_n^*)'$, то эта точка является искомой, иначе поиск продолжается.

На втором шаге вычисляем $\rho_2 = \rho(e_2 | X_1)$ и определяем множество $X_2 = X_1 \cap H_2 = \{(\rho_1, \rho_2, x_3, \dots, x_n)' \in X\}$ — точек пересечения множества X_1 с опорной к X_1 $(n-2)$ -мерной плоскостью H_2 , задаваемой уравнением $(e_2, x) = \rho_2$, где $x \in X_1$. Если множество X_2 состоит из одной точки $x^* = (\rho_1, \rho_2, x_3^*, \dots, x_n^*)'$, то поиск заканчивается. В противном случае продолжаем аналогично.

На n -м шаге вычисляем $\rho_n = \rho(e_n | X_{n-1})$ и определяем точку $x^* = (\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n)'$. Поиск заканчивается, так как точка x^* крайняя.

Обоснование алгоритма следующее. На последнем шаге происходит одномерный поиск максимума скалярного произведения (e_n, x) по точкам $(\rho_1, \dots, \rho_{n-1}, x_n)' \in X_{n-1}$, где множество $X_{n-1} = X_{n-2} \cap H_{n-1}$ либо одна точка, либо отрезок, принадлежащие прямой H_{n-1} . Поэтому $x_n = \rho_n$ — последняя координата либо одной точки, либо одного из концов отрезка. В любом случае точка x^* является крайней для множества X_{n-1} .

Докажем теперь, что точка x^* — крайняя для X_{n-2} . Предположим противное. Пусть x^* не является крайней для пересечения $X_{n-2} = X_{n-3} \cap H_{n-2}$ множества X_{n-3} и плоскости H_{n-2} . Тогда она служит серединой некоторого отрезка $[x^-, x^+]$, лежащего в этой плоскости. Однако этот отрезок не принадлежит прямой H_{n-1} , так как x^* — крайняя точка X_{n-1} . Значит, концы отрезка $[x^-, x^+]$ лежат по разные стороны от прямой H_{n-1} . Но эта прямая опорная для X_{n-2} . Поэтому одна из точек x^- или x^+ лежит вне множества X . Полученное противоречие доказывает утверждение. Значит, x^* — крайняя точка для X_{n-2} . Последовательно доказываем, что x^* является крайней для X_{n-3}, \dots, X_1 и, наконец, для X . Обоснование алгоритма закончено.

Алгоритм представляет собой дедуктивную процедуру поиска крайней точки на плоскостях, размерность которых уменьшается с каждым шагом от гиперплоскости до прямой. В результате получаем крайнюю точку, принадлежащую опорной гиперплоскости, перпендикулярной направлению e_1 .

2.5. Представления точки выпуклого множества в виде выпуклой комбинации его крайних точек. Рассмотрим следующую задачу. Представить заданную точку x^* выпуклого компактного множества $X \subset \mathbb{R}^n$ в виде выпуклой комбинации:

$$x^* = \alpha_1 x^1 + \dots + \alpha_k x^k, \quad \alpha_1 \geq 0, \dots, \alpha_k \geq 0, \quad \alpha_1 + \dots + \alpha_k = 1, \quad (2.12)$$

крайних точек x^1, \dots, x^k множества X , используя для решения только опорные функции. Согласно теореме Каратеодори [9,10], в (2.12) можно ограничиться $k = n+1$ слагаемыми, т.е. надо найти не более чем $n+1$ крайних точек.

Решение задачи будем искать в два этапа. На первом этапе “набираем” такие крайние точки x^1, \dots, x^k , чтобы заданную точку можно было представить в виде аффинной комбинации:

$$x^* = \alpha_1 x^1 + \dots + \alpha_k x^k, \quad \alpha_1 + \dots + \alpha_k = 1. \quad (2.13)$$

На втором этапе заменяем некоторые из найденных точек x^1, \dots, x^k другими крайними точками так, чтобы аффинную комбинацию (2.13) сделать выпуклой (2.12).

Начнем с первого этапа. На первом шаге выбираем ортонормированный базис e_1^1, \dots, e_n^1 пространства \mathbb{R}^n . Используя алгоритм покоординатного поиска (см. разд. 2.4), находим крайнюю точку x^1 . Если $x^* = x^1$, то разложение (2.12) получено и поставленная задача решена. В противном случае выполняем следующий шаг.

На втором шаге выбираем единичный вектор e_1^2 , имеющий направление вектора $x^* - x^1$. Дополняем этот вектор до ортонормированного базиса e_1^2, \dots, e_n^2 . Используя алгоритм покоординатного поиска (см. разд. 2.4), находим крайнюю точку x^2 . Заметим, что точки x^1 и x^2 лежат по разные стороны от гиперплоскости, проходящей через точку x^* и ортогональной e_1^2 . Если точка x^* лежит на прямой $(x^1 x^2)$, то задача решена, так как x^* лежит между точками x^1 и x^2 , поэтому существует разложение (2.12) при $k=2$. Если точка x^* не принадлежит прямой $(x^1 x^2)$, то выполняем следующий шаг.

На третьем шаге выбираем единичный вектор e_1^3 , лежащий в двумерной плоскости $(x^* x^1 x^2)$, перпендикулярный прямой $(x^1 x^2)$ и направленный в полуплоскость, содержащую точку x^* . Такой вектор получается в результате процесса ортогонализации Грама–Шмидта, примененного к паре векторов $x^2 - x^1, x^* - x^1$ с последующей нормировкой второго полученного вектора:

$$e_1^3 = \frac{y}{|y|}, \quad y = x^* - x^1 - \alpha(x^2 - x^1), \quad \alpha = \frac{(x^* - x^1, x^2 - x^1)}{(x^2 - x^1, x^2 - x^1)}.$$

Дополняем e_1^3 до ортонормированного базиса e_1^3, \dots, e_n^3 . Теперь, используя алгоритм покоординатного поиска (см. разд. 2.4), находим крайнюю точку x^3 . Заметим, что точка x^3 отделена от точек x^1, x^2 гиперплоскостью, проходящей через точку x^* и ортогональной e_1^3 . Поэтому точки x^1, x^2, x^3 аффинно-независимые. Если точка x^* принадлежит двумерной плоскости $(x^1 x^2 x^3)$, то первый этап заканчивается, так как существует разложение (2.13) при $k=3$. Если точка x^* не принадлежит двумерной плоскости $(x^1 x^2 x^3)$, то выполняем следующий шаг.

На четвертом шаге выбираем единичный вектор e_1^4 , лежащий в трехмерной плоскости $(x^* x^1 x^2 x^3)$, перпендикулярный двумерной плоскости $(x^1 x^2 x^3)$ и направленный в полупространство, содержащее точку x^* . Такой вектор получается в результате процесса ортогонализации Грама–Шмидта, примененного к трем векторам $x^2 - x^1, x^3 - x^1, x^* - x^1$ с последующей нормировкой последнего полученного вектора. Дополняем e_1^4 до ортонормированного базиса e_1^4, \dots, e_n^4 . Теперь, используя алгоритм покоординатного поиска (см. разд. 2.4), находим крайнюю точку x^4 . Заметим, что точка x^4 отделена от точек x^1, x^2, x^3 гиперплоскостью, проходящей через точку x^* и ортогональной e_1^4 . Поэтому точки x^1, x^2, x^3, x^4 аффинно-независимые. Если точка x^* принадлежит трехмерной плоскости $(x^1 x^2 x^3 x^4)$, то первый этап заканчивается, так как существует разложение (2.13) при $k=4$. Если точка x^* не принадлежит трехмерной плоскости $(x^1 x^2 x^3 x^4)$, то выполняем следующий шаг.

Продолжая аналогичным образом, получаем такой набор x^1, \dots, x^k не более чем $k = n+1$ крайних точек, что точка x^* принадлежит $(k-1)$ -мерной плоскости $(x^1 \dots x^k)$. В этом случае разложение (2.13) существует.

На рис. 3 представлен первый этап решения для плоского случая (при $n=2$). Множество X ограничено полужирной линией, а заданная точка x^* отмечена окружностью. На первом шаге выбираем единичный вектор e_1^1 , строим опорную прямую, обозначенную цифрой 1, и находим крайнюю точку x^1 . Затем на втором шаге выбираем единичный вектор e_1^2 , одинаково направленный с вектором $x^* - x^1$, строим опорную прямую, обозначенную цифрой 2, и находим крайнюю точку x^2 . Так как точка x^* не лежит на прямой $(x^1 x^2)$, то делаем

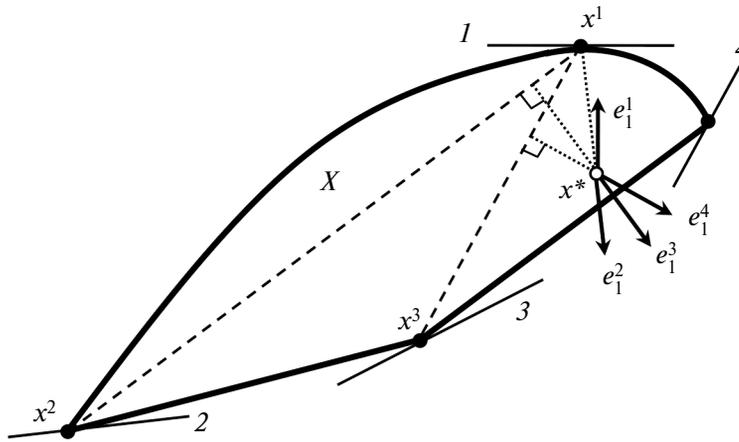


Рис. 3. Представление заданной точки выпуклого множества в виде выпуклой комбинации его крайних точек.

третий шаг. Выбираем единичный вектор e_1^3 , перпендикулярный прямой (x^1x^2) и указывающий на полуплоскость, содержащую x^* . Строим опорную прямую, обозначенную цифрой 3, и находим крайнюю точку x^3 . На этом первый этап заканчивается. Получен набор аффинно-независимых точек x^1, x^2, x^3 . Точка x^* принадлежит плоскости $(x^1x^2x^3)$. Поэтому ее можно представить в виде аффинной комбинации найденных крайних точек.

Второй этап алгоритма начинается, когда определены крайние точки x^1, \dots, x^k , для которых выполняется равенство (2.13), т.е. точка x является аффинной комбинацией найденных крайних точек. Если все коэффициенты комбинации (2.13) неотрицательные, то комбинация будет выпуклой (2.12). Значит, поставленная задача решена.

Предположим противное. Пусть в разложении (2.13) имеется отрицательный коэффициент. Учитывая, что $\alpha_1 + \dots + \alpha_k = 1$, переписываем равенство (2.13) в виде

$$\alpha_1(x^1 - x^*) + \dots + \alpha_k(x^k - x^*) = 0.$$

Умножаем обе его части скалярно на e_1^k :

$$\alpha_1(e_1^k, x^1 - x^*) + \dots + \alpha_{k-1}(e_1^k, x^{k-1} - x^*) + \alpha_k(e_1^k, x^k - x^*) = 0. \quad (2.14)$$

Напомним, что точки x^1, \dots, x^{k-1} лежат в “отрицательном” полупространстве относительно гиперплоскости, проходящей через точку x^* и перпендикулярной e_1^k , а x^k — в “неотрицательном”. Поэтому первые $k-1$ скалярных произведений в (2.14) — отрицательные, так как векторы $x^i - x^*$, $i = 1, \dots, k-1$, образуют тупые углы с вектором e_1^k , а последнее скалярное произведение — неотрицательное. Если первые коэффициенты $\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}$ неотрицательные, то и последний коэффициент α_k , согласно (2.14), должен быть неотрицательным. В том случае аффинная комбинация (2.13) будет выпуклой, что противоречит предположению. Значит, среди коэффициентов $\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}$ есть хотя бы один отрицательный. Предположим, что $\alpha_1 < 0$. Тогда точку x^1 надо заменить. Выбираем единичный вектор e_1^{k+1} , лежащий в $(k-1)$ -мерной плоскости $(x^1 \dots x^k)$, перпендикулярный $(k-2)$ -мерной плоскости $(x^2 \dots x^k)$ и направленный в полупространство, содержащее точку x^* . Такой вектор получается в результате процесса ортогонализации Грама–Шмидта, примененного к векторам $x^3 - x^2, x^4 - x^2, \dots, x^k - x^2, x^* - x^2$ с последующей нормировкой последнего полученного вектора. Дополняем e_1^{k+1} до ортонормированного базиса $e_1^{k+1}, \dots, e_n^{k+1}$. Теперь, используя алгоритм покоординатного поиска (см. разд. 2.4), находим крайнюю точку x^{k+1} . Заметим, что точка x^{k+1} отделена от точек x^2, \dots, x^k гиперплоскостью, проходящей через точку x^* и ортогональной e_1^{k+1} . Поэтому точки x^2, \dots, x^k, x^{k+1} аффинно-независимы. Разлагаем x^* по этим точкам:

$$x^* = \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_{k+1} x^{k+1}, \quad \alpha_2 + \dots + \alpha_{k+1} = 1.$$

Если все коэффициенты неотрицательные, то комбинация выпуклая и задача решена. В противном случае точку с отрицательным коэффициентом надо заменить, описанным выше способом.

Для многогранника процедура заканчивается за конечное число шагов, так как на каждом шаге находится новая крайняя точка – вершина многогранника, а количество вершин многогранника ограничено. Разумеется, процедуру можно применять для любого выпуклого множества. Как правило, процесс быстро сходится. В противном случае в выпуклое множество X можно вписать многогранник и получить приближенное решение, точность которого зависит от “мелкости” граней вписанного многогранника.

На рис. 3 представлен второй этап решения. Точка x^* не лежит внутри треугольника с вершинами x^1, x^2, x^3 . Поэтому в разложении $x^* = \alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3$, согласно рис. 3, коэффициент $\alpha_2 < 0$. Значит, точку x^2 надо заменить. Выбираем единичный вектор e_1^4 , перпендикулярный прямой $(x^1 x^3)$ и указывающий на полуплоскость, содержащую x^* . Проводим опорную прямую $H(e_1^4 | X)$, обозначенную цифрой 4, и находим крайнюю точку x^4 . Точка x^* лежит внутри треугольника с вершинами x^1, x^3, x^4 . Поэтому аффинная комбинация $x^* = \alpha_1 x^1 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4$ будет выпуклой.

Описанная двухэтапная процедура может быть использована и для граничных точек выпуклого компактного множества, например для грани выпуклого многогранника. Предположим, что точка x^* принадлежит грани X_1 множества X , лежащей в опорной гиперплоскости $H(e^* | X)$, т.е. $x^* \in X_1 = X \cap H(e^* | X)$. В этом случае разложение (2.12) надо искать по крайним точкам грани X_1 . Для этого описанные выше базисы $e_1^1, e_2^1, \dots, e_n^1$; $e_1^2, e_2^2, \dots, e_n^2$ и т.д. для поиска крайних точек нужно формировать, начиная с единичного вектора e^* . Для первой крайней точки взять базис $e^*, e_1^1, e_2^1, \dots, e_{n-1}^1$, для второй – $e^*, e_1^2, e_2^2, \dots, e_{n-1}^2$ и т.д. Такой выбор ортонормированных базисов обеспечивает нахождение крайних точек грани X_1 .

3. Множество достижимости дискретной линейной системы и его опорная функция. Пусть дискретная система (1.1) совершает T шагов под действием управления $\{u\} = u_0, u_1, \dots, u_{T-1}$. Тогда

$$x_T = A_{T-1} \cdot \dots \cdot A_0 x_0 + A_{T-1} \cdot \dots \cdot A_1 B_0 u_0 + A_{T-1} \cdot \dots \cdot A_2 B_1 u_1 + \dots + B_{T-1} u_{T-1}.$$

Упростим эту формулу. Первое слагаемое не зависит от управления. Его можно удалить, делая замену вектора состояния:

$$x_t = y_t + A_{t-1} \cdot \dots \cdot A_0 x_0. \quad (3.1)$$

При этом получаем новую систему с вектором состояния y_t . Задача быстрогодействия для новой системы будет иметь вид

$$y_{t+1} = A_t y_t + B_t u_t, \quad u_t \in U_t, \quad t = 0, 1, \dots, T-1, \quad (3.2)$$

$$y_0 = o, \quad y_T = F_T,$$

$$T \rightarrow \min.$$

Начальное состояние системы – нулевое (3.2), конечное $F_T = F - A_{T-1} \cdot \dots \cdot A_0 x_0$.

За время T под действием управления $\{u\} = u_0, u_1, \dots, u_{T-1}$ система (3.2) приходит в состояние

$$y_T = A_{T-1} \cdot \dots \cdot A_1 B_0 u_0 + A_{T-1} \cdot \dots \cdot A_2 B_1 u_1 + \dots + B_{T-1} u_{T-1},$$

а множество достижимости за время T имеет вид

$$Y_T = A_{T-1} \cdot \dots \cdot A_1 B_0 U_0 + A_{T-1} \cdot \dots \cdot A_2 B_1 U_1 + \dots + B_{T-1} U_{T-1}.$$

Обозначим через

$$v_0 = A_{T-1} \cdot \dots \cdot A_1 B_0 u_0; \quad v_1 = A_{T-1} \cdot \dots \cdot A_2 B_1 u_1; \quad \dots; \quad v_{T-1} = B_{T-1} u_{T-1} \quad (3.3)$$

терминальные управления, значения которых ограничены множествами:

$$V_0 = A_{T-1} \cdot \dots \cdot A_1 B_0 U_0; \quad V_1 = A_{T-1} \cdot \dots \cdot A_2 B_1 U_1; \quad \dots; \quad V_{T-1} = B_{T-1} U_{T-1} \quad (3.4)$$

соответственно. Так называемые терминальные управления (3.3) и множества (3.4) принадлежат пространству \mathbb{R}^{nr} терминальных состояний системы. Конечное состояние представляется суммой терминальных управлений:

$$y_T = v_0 + v_1 + \dots + v_{T-1}, \tag{3.5}$$

а множество достижимости – суммой подмножеств:

$$Y_T = V_0 + V_1 + \dots + V_{T-1}. \tag{3.6}$$

Поскольку все множества $U_t, t = 0, 1, \dots, T-1$, – выпуклые компакты, содержащие нулевой элемент, то и все множества V_t будут также выпуклыми компактными, содержащими нулевой элемент. Предполагаем, что известны опорные функции $\rho(y|U_t), y \in \mathbb{R}^m, t = 0, 1, \dots, T-1$. Тогда опорные функции множеств $V_t = A_{T-1} \dots A_{t+1} B_t U_t$ определены на \mathbb{R}^{n_T} и вычисляются, согласно (2.2), по формуле

$$\rho(e|V_t) = \rho(e|A_{T-1} \dots A_{t+1} B_t U_t) = \rho((A_{T-1} \dots A_{t+1} B_t)' e|U_t).$$

Опорная функция суммы (3.6) множеств равна, согласно (2.5), сумме опорных функций:

$$\rho(e|Y_T) = \rho(e|V_0) + \rho(e|V_1) + \dots + \rho(e|V_{T-1}). \tag{3.7}$$

Таким образом, получена опорная функция (3.7) множества достижимости системы (3.2) за время T . Условие достижимости заданного конечного состояния F_T за время T можно записать в виде включения

$$F_T \in Y_T. \tag{3.8}$$

Считаем, что множество достижимости Y_T имеет полную размерность n_T .

4. Алгоритм нахождения минимального времени движения. Для проверки включения (3.8) будем использовать, согласно п. 2.2, вспомогательную задачу минимизации (2.10), которую запишем равносильным образом:

$$\beta_{F_T}(e|Y_T) = \frac{\rho(e|Y_T)}{(e, F_T)} \rightarrow \min_{(e, F_T) > 0, |e|=1}. \tag{4.1}$$

Найдя минимальное значение $\beta_{F_T}(e^*|Y_T)$, можно проверить, является ли время T достаточным для достижения цели F_T . Действительно, если

$$\beta_{F_T}(e^*|Y_T) \geq 1, \tag{4.2}$$

то $F_T \in Y_T$. Значит, за время T конечное состояние F_T достигается.

Остается найти минимальное значение T . Наиболее просто это сделать, выполняя перебор значений $T = 1, 2, \dots$ и проверяя условие (4.2) на каждом шаге. Минимальное значение T^* , при котором условие (4.2) верно, является решением задачи быстрогодействия. Заметим, что дискретное время в прикладных задачах весьма велико. Значит, простой перебор $T = 1, 2, \dots$ неэффективен. Поэтому нужно применять для поиска минимума методы целочисленной оптимизации [17].

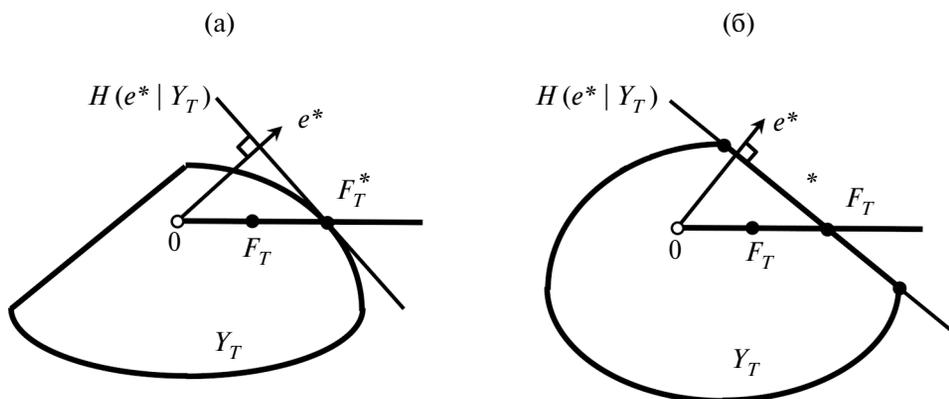


Рис. 4. Точки прицеливания: строго выпуклая (а), нестрого выпуклая (б).

5. Алгоритм построения оптимального управления. В разд. 4 при решении задачи (4.1) получаем оптимальное направление e^* и минимальное значение $\beta_{F_T}(e^* | Y_T)$. Пусть T – минимальное время T достижения системой (3.2) цели F_T . Обозначим через $F_T^* = \beta_{F_T}(e^* | Y_T)F_T$ граничную точку множества достижимости Y_T , принадлежащую лучу oF_T . Будем называть эту точку F_T^* *точкой прицеливания*. На рис. 4 изображены элементы решения задачи (4.1): множество достижимости Y_T , цель F_T , точка прицеливания F_T^* , опорная прямая $H(e^* | Y_T)$ (в плоском случае), проходящая через точку прицеливания.

Заметим, что если управление $\{u^*\} = u_0^*, u_1^*, \dots, u_{T-1}^*$ приводит систему (3.2) в точку прицеливания F_T^* , то пропорциональное управление

$$\mu\{u^*\} = \mu u_0^*, \mu u_1^*, \dots, \mu u_{T-1}^*$$

с коэффициентом сжатия $\mu = F_T : F_T^* = 1/\beta_{F_T}(e^* | Y_T)$ приведет систему (3.2) в цель F_T . Поэтому достаточно найти управление, приводящее систему в прицельную точку.

На рис. 4 представлены два случая: либо точка F_T^* – крайняя точка множества достижимости Y_T (рис. 4а), либо не крайняя (рис. 4б). Процедуры построения оптимального управления в этих двух случаях существенно отличаются по сложности. Начнем с более простой.

5.1. Построение оптимального управления для крайней точки прицеливания. Пусть при решении задачи (4.1) получены оптимальное направление e^* и прицельная точка F_T^* . Предполагаем, что точка F_T^* является крайней для множества достижимости Y_T . Тогда, согласно утверждению в) в разд. 2.1, разложение (3.5)

$$F_T^* = v_0^* + v_1^* + \dots + v_{T-1}^*$$

– единственное, причем каждое терминальное управление v_t^* , $t = 0, 1, \dots, T-1$, является крайней точкой множества V_t соответственно. Найдем эти терминальные управления. Оптимальное направление e^* выбираем в качестве первого базисного вектора $e_1 = e^*$. Дополняем его до ортонормированного базиса e_1, \dots, e_{n_T} пространства \mathbb{R}^{n_T} . Используя алгоритм покоординатного поиска (см. разд. 2.4), находим крайние точки v_t^* , $t = 0, 1, \dots, T-1$, множеств V_t соответственно. Заметим, что точка F_T^* и каждая из точек v_t^* принадлежат опорным гиперплоскостям к множествам Y_T и V_t . Все эти плоскости перпендикулярны одному и тому же направлению e_1 . Поэтому

$$(e_1, F_T^*) = (e_1, v_0^*) + (e_1, v_1^*) + \dots + (e_1, v_{T-1}^*) \Leftrightarrow \rho(e_1 | Y_T) = \rho(e_1 | V_0) + \rho(e_1 | V_1) + \dots + \rho(e_1 | V_{T-1}).$$

Таким образом, для крайней прицельной точки F_T^* однозначно определяется терминальное управление $\{v^*\} = \{v_0^*, v_1^*, \dots, v_{T-1}^*\}$, при котором конечное состояние (3.5) совпадает с F_T^* :

$$y_T = v_0^* + v_1^* + \dots + v_{T-1}^* = F_T^*.$$

По терминальному управлению $\{v^*\}$ восстанавливаем управление $\{u^*\} = \{u_0^*, u_1^*, \dots, u_{T-1}^*\}$ системой (3.2), используя связи (3.3):

$$v_t^* = A_{T-1} \dots A_{t+1} B_t u_t^*, \quad t = 0, 1, \dots, T-1. \quad (5.1)$$

В отличие от терминального управления $\{v^*\}$ управление $\{u^*\}$ не всегда находится однозначно. Однако для решения задачи достаточно получить любое управление $\{u^*\}$, удовлетворяющее (5.1). Наконец, пропорциональное управление $\mu\{u^*\}$ с коэффициентом $\mu = F_T : F_T^* = 1/\beta_{F_T}(e^* | Y_T)$ приводит систему (3.2) в цель F_T , а систему (1.1) – в заданное конечное состояние F . Коэффициент сжатия μ , согласно разд. 2.3, равен значению функции Минковского.

5.2. Построение оптимального управления для некрайней прицельной точки. Пусть, как и ранее, в результате решения задачи (4.1) получено направление e^* и граничная точка F_T^* (см. рис. 4б), которая не является крайней точкой множества достижимости Y_T . Надо построить управление $\{u^*\} = \{u_0^*, u_1^*, \dots, u_{T-1}^*\}$, приводящее систему (3.2) в конечное состояние $y_T^* = F_T^*$. Проще сначала найти терминальное управление $\{v^*\} = \{v_0^*, v_1^*, \dots, v_{T-1}^*\}$, для которого конечное состояние совпадает с точкой прицеливания, а затем получить искомое управление $\{u^*\}$, используя связи (5.1).

Крайние точки множества достижимости отличаются от некрайних тем, что терминальное управление, приводящее систему к крайней точке, единственное. Напротив, в некрайнюю точку можно привести систему разными управлениями. Эта неоднозначность затрудняет нахождение оптимального управления. Например, применение принципа максимума “наталкивается” на особое управление, при котором функция Понтрягина от управления не зависит.

Чтобы преодолеть это обстоятельство, нужно представить прицельную точку в виде выпуклой комбинации:

$$F_T^* = \alpha_1 y_T^1 + \dots + \alpha_k y_T^k, \quad \alpha_1 \geq 0, \dots, \alpha_k \geq 0, \quad \alpha_1 + \dots + \alpha_k = 1, \quad (5.2)$$

крайних точек y_T^1, \dots, y_T^k множества достижимости Y_T . Терминальные управления $\{v^1\} = \{v_0^1, v_1^1, \dots, v_{T-1}^1\}, \dots, \{v^k\} = \{v_0^k, v_1^k, \dots, v_{T-1}^k\}$, приводящие систему соответственно в точки y_T^1, \dots, y_T^k , определяются однозначно. При этом терминальное управление $\{v^*\} = \alpha_1 \{v^1\} + \dots + \alpha_k \{v^k\}$ приведет систему в прицельную точку F_T^* .

Для получения разложения (5.2) можно использовать алгоритм, описанный в разд. 2.5. Точка F_T^* является граничной и принадлежит пересечению $Y_T^* = Y_T \cap H(e^* | Y_T)$ множества достижимости Y_T и опорной гиперплоскости $H(e^* | Y_T)$, проходящей через F_T^* . Эта ситуация описана в конце разд. 2.5. Для покоординатного поиска крайних точек множества Y_T^* нужно использовать ортонормированный базис, первым вектором которого служит вектор e^* . На первом шаге формирование ортонормированного базиса начинается с пары e^*, e_1^1 , на втором – с пары e^*, e_1^2 и т.д., как это предлагается в разд. 2.5. В результате двухэтапной процедуры получается разложение (5.2).

Для каждой крайней точки $y_T^i, i=1, \dots, k$, однозначно находится терминальное управление $\{v^i\}$, при котором конечное состояние (3.5) совпадает с y_T^i . В разд. 5.1 крайняя точка y_T^i определялась одной гиперплоскостью, ортогональной направлению e^* . Поэтому остальные векторы, дополняющие e^* до ортонормированного базиса, не играют существенной роли. В рассматриваемом случае крайняя точка y_T^i находится при помощи покоординатного поиска с использованием всех базисных векторов $e^*, e_1^i, \dots, e_{n-1}^i$. Этот же базис применяется для нахождения терминальных управлений $\{v_T^i\}$.

Для выпуклой комбинации $\{v^*\} = \alpha_1 \{v^1\} + \dots + \alpha_k \{v^k\}$ терминальных управлений конечное состояние (3.5) будет совпадать с прицельной точкой F_T^* . По терминальному управлению $\{v^*\}$ восстанавливаем управление $\{u^*\} = \{u_0^*, u_1^*, \dots, u_{T-1}^*\}$ системой (3.2), используя связи (5.1). Наконец, пропорциональное управление $\mu \{u^*\}$ с коэффициентом $\mu = F_T : F_T^* = 1 / \beta_{F_T}(e^* | Y_T)$ приводит систему (3.2) в цель F_T , а систему (1.1) – в заданное конечное состояние F .

Таким образом, для решения задачи быстрогодействия на первом этапе применяем алгоритм, представленный в разд. 4, а на втором – один из алгоритмов, описанных в разд. 5.

6. Примеры. Рассмотрим методические примеры решения задачи быстрогодействия двумерных дискретных линейных систем. В первом примере система стационарная, множество допустимых значений управления представляет собой плоский эллипс, а множество достижимости строго выпуклое. Во втором примере система нестационарная, множество допустимых значений управления – отрезок, а множество достижимости – многоугольник. Построение управлений в этих случаях отличается, как это было показано в разд. 5.1 и 5.2 соответственно.

Пример 1. Решить задачу быстрогодействия

$$x_{t+1} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} x_t + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u_t, \quad (6.1)$$

$$u_t' \begin{pmatrix} 0.04 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u_t \leq 1, \quad t = 0, 1, \dots, T-1;$$

$$x_0 = (0; 0)', \quad x_T = (12; 4)'$$

$$T \rightarrow \min.$$

Здесь $x_t \in \mathbb{R}^2, u_t \in U \subset \mathbb{R}^2$, множество U допустимых значений управления – плоский эллипс, угол $\phi = \pi/4$. На каждом шаге свободного движения (при нулевом управлении) система совершает поворот на угол ϕ . Как и ранее, штрих у матрицы (строки) означает транспонирование.

По сравнению с общей постановкой задачи имеем дискретную линейную стационарную систему постоянной размерности $n_t = n = 2, m_t = m = 2$. Матрицы

$$A_t = A = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \text{ и } B_t = B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

постоянные. Опорная функция эллипсоида U , согласно разд. 2.2, имеет вид

$$\rho(v|U) = \sqrt{v'Qv}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0.04 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (6.2)$$

причем максимум по u скалярного произведения (v, u) достигается в одной точке:

$$u^* = (v'Qv)^{-1/2}Qv.$$

Поскольку начальное состояние системы нулевое, нет необходимости делать замену (3.1) и переходить к системе (3.2). При этом множество достижимости Y_T системы (3.2) совпадает с множеством достижимости X_T системы (1.1), а целевая точка F_T системы (3.2) совпадает с конечным состоянием F системы (1.1).

Получим опорную функцию множества достижимости системы (6.1). Поскольку матрица B единичная, из нулевого начального состояния через T шагов система (6.1) попадает в состояние

$$x_T = A^{T-1}u_0 + A^{T-2}u_1 + \dots + u_{T-1}.$$

Значит, множество достижимости за время T имеет вид

$$X_T = A^{T-1}U + A^{T-2}U + \dots + U,$$

а его опорная функция вычисляется по формуле

$$\rho(e|X_T) = \rho(e|A^{T-1}U) + \rho(e|A^{T-2}U) + \dots + \rho(e|U).$$

Множество A^kU для любого натурального $k \in \mathbb{N}$ представляет собой плоский эллипс, задаваемый квадратным неравенством:

$$v'Q_k v \leq 1, \quad Q_k = (A^{-k})'QA^{-k}.$$

Опорная функция такого эллипса находится по формуле (6.2) при замене матрицы Q на матрицу Q_k . Поэтому окончательно получаем

$$\rho(e|X_T) = \sqrt{e'Q_{T-1}e} + \sqrt{e'Q_{T-2}e} + \dots + \sqrt{e'Qe}.$$

Итак, опорная функция множества достижимости найдена. Переходим непосредственно к решению задачи быстродействия. На первом этапе определяем минимальное время T движения системы. Этот этап выполнялся простым перебором значений $T = 1, 2, \dots$, а именно на каждом шаге численно решалась задача минимизации:

$$\beta_F(e|X_T) = \frac{\rho(e|X_T)}{(e, F)} \rightarrow \min_{(e, F) > 0, |e|=1}. \quad (6.3)$$

Оптимальный угол между векторами e и F находился с точностью 10^{-4} . При $T = 1, 2, 3$ минимальное значение функции (6.3) было меньше единицы. Значит, точка F не принадлежит соответствующему множеству достижимости X_T . При $T = 4$ минимальное значение $\beta_F(e^*|X_4) = 1.0656$ больше единицы, поэтому конечное состояние F “накрывается” множеством X_4 . При этом получены оптимальное направление $e^* = (0.9697; 0.2441)$ и точка прицеливания $F^* = (12.7876; 4.2625)$. По оптимальному направлению e^* находим оптимальное терминальное управление $\{v^*\}$:

$$v_0^* = (4.994; 0.050)', \quad v_1^* = (3.595; 3.427)', \quad v_2^* = (0.622; 3.915)', \quad v_3^* = (3.577; -3.129)',$$

по которому однозначно восстанавливается управление $\{u^*\}$, приводящее систему в прицельную точку F^* :

$$u_0^* = (-4.742; -0.317)', \quad u_1^* = (3.915; -0.622)', \quad u_2^* = (4.965; -0.119)', \quad u_3^* = (4.994; 0.050)'.$$

Находим пропорциональное управление $\{u\} = \mu\{u^*\}$ с коэффициентом пропорциональности $\mu = 1/\beta_F(e^*|X_4) = 0.9384$:

$$u_0 = (-4.450; -0.298)', \quad u_1 = (3.674; -0.584)', \quad u_2 = (4.659; -0.111)', \quad u_3 = (4.686; 0.047)'.$$

Это управление приводит систему (6.1) в заданное конечное состояние $F(12; 4)$. Соответствующая траектория имеет вид

$$x_1 = (-4.45; -0.298)', x_2 = (0.738; -3.941)', x_3 = (7.967; -2.376)', x_4 = (11.9998; 4.0007)'.$$

Как видим, погрешность вычислений оказалась меньше одной тысячной.

На рис. 5 оптимальная траектория изображена полужирной ломаной, начальное состояние представлено маленькой окружностью, конечное состояние F – квадратиком, точка прицеливания F^* – звездочкой, границы множеств достижимости (при $T = 2, 3, 4$) нарисованы штрихпунктирными линиями.

Пример 2. Решить задачу быстродействия:

$$x_{t+1} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} x_t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u_t, \tag{6.4}$$

$$|u_t| \leq 1, t = 0, 1, \dots, T-1;$$

$$x_0 = (0; 0)', x_T = (-2; 2)';$$

$$T \rightarrow \min.$$

Здесь $x_t \in \mathbb{R}^2$, $u_t \in U \subset \mathbb{R}$, множество U допустимых значений управления – отрезок $U = [-1; 1]$, частота $\omega = \pi/18$. На шаге t свободного движения (при нулевом управлении) система совершает поворот на угол $\phi = \omega t$, который возрастает со временем. Как и ранее, штрих у матрицы (строки) означает транспонирование.

По сравнению с общей постановкой задачи имеем дискретную линейную нестационарную систему постоянной размерности ($n_t = n = 2$) со скалярным управлением ($m_t = m = 1$). Запишем матрицы системы:

$$A_t = \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \text{ и } B_t = B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

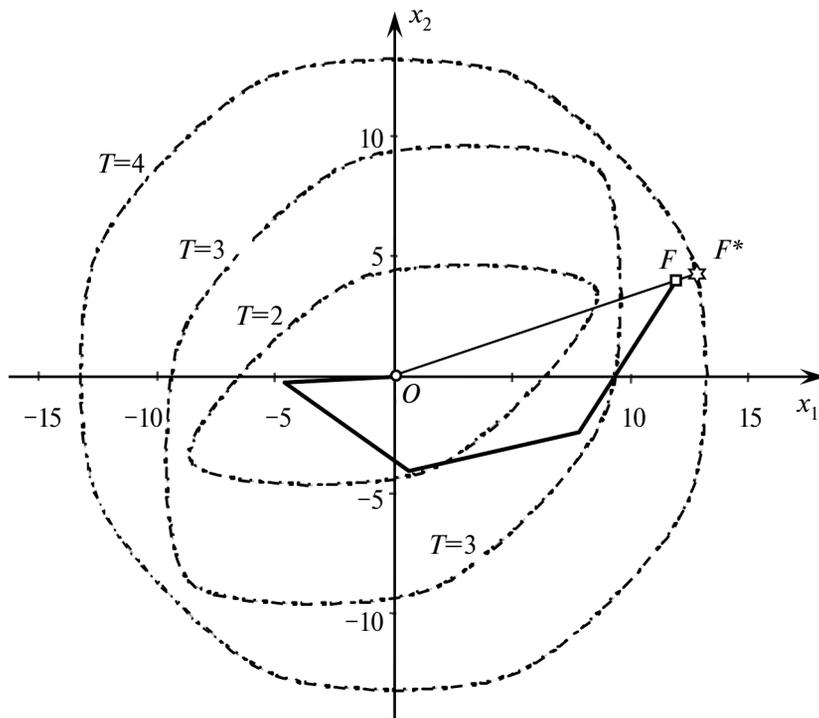


Рис. 5. Границы множеств достижимости и оптимальная траектория системы (6.1).

Матрица A_T – переменная, а B – постоянная. Опорная функция отрезка U , согласно разд. 2.2, имеет вид

$$\rho(v|U) = \max\{-v; v\},$$

причем максимум по u скалярного произведения (v, u) достигается в одной точке:

$$u^* = \begin{cases} -1, & v < 0, \\ 1, & v > 0. \end{cases} \quad (6.5)$$

Поскольку начальное состояние системы нулевое, нет необходимости делать замену (3.1) и переходить к системе (3.2). Поэтому множество достижимости Y_T системы (3.2) совпадает с множеством достижимости X_T системы (1.1), а целевая точка F_T системы (3.2) совпадает с конечным состоянием F системы (1.1).

Получим опорную функцию множества достижимости системы (6.4). Из нулевого начального состояния через T шагов система (6.4) попадает в состояние

$$x_T = A_{T-1} \dots A_1 B u_0 + A_{T-1} \dots A_2 B u_1 + \dots + B u_{T-1}.$$

Значит, множество достижимости за время T имеет вид

$$x_T = A_{T-1} \dots A_1 B U + A_{T-1} \dots A_2 B U + \dots + B U,$$

а его опорная функция вычисляется по формуле

$$\rho(e|X_T) = \rho(e|A_{T-1} \dots A_1 B U) + \rho(e|A_{T-1} \dots A_2 B U) + \dots + \rho(e|B U).$$

Множество $A_{T-1} \dots A_k B U$ для любого $k=1, \dots, T-1$ представляет собой отрезок с концами

$$v_k^- = (-\cos \phi(k), \sin \phi(k))', \quad v_k^+ = (\cos \phi(k), -\sin \phi(k))',$$

где $\phi(k) = \omega k + \dots + \omega(T-1) = \omega(T-k)(T+k-1)/2$ – суммарный угол поворота системы за последние $T-k$ шагов. Опорная функция такого отрезка находится, согласно (6.5), по формуле

$$\rho(e|A^k B U) = \max\{(e, v_k^-), (e, v_k^+)\}.$$

Поэтому окончательно получаем

$$\rho(e|X_T) = \max\{(e, v_{T-1}^-), (e, v_{T-1}^+)\} + \dots + \max\{(e, v_0^-), (e, v_0^+)\}.$$

Итак, опорная функция множества достижимости найдена. Переходим непосредственно к решению задачи быстродействия. На первом этапе определяем минимальное время T движения системы. Этот этап выполнялся простым перебором значений $T=1, 2, \dots$, а именно на каждом шаге численно решается задача минимизации (6.3). Оптимальный угол между векторами e и F находился с точностью 10^{-5} . При $T=1, \dots, 5$ минимальное значение функции (6.3) было меньше единицы. Значит, точка F не принадлежит соответствующему множеству достижимости X_T . При $T=6$ минимальное значение $\beta_F(e^*|X_6) = 1.5379$ больше единицы, поэтому конечное состояние F принадлежит множеству X_6 . При этом найдены оптимальное направление $e^* = (-0.766; 0.643)$ и точка прицеливания $F^* = (-3.0758; 3.0758)$. Полученная точка прицеливания не является крайней. Она принадлежит некоторой стороне многоугольника X_6 . Находим вершины многоугольника, принадлежащие этой стороне. Для этого дополняем вектор e^* вектором $e^1 = (0.643; 0.766)$ до ортонормированного базиса и, выполняя по координатный поиск, определяем вершину $x^1 = (-2.4893; 3.7749)'$. Этот же базис используем для нахождения терминального управления $\{v^1\}$:

$$v_0^1 = (-1; 0)', \quad v_1^1 = (-0.643; 0.766)', \quad v_2^1 = (0; 1)', \quad v_3^1 = (-0.5; 0.866)',$$

$$v_4^1 = (-0.766; 0.643)', \quad v_5^1 = (-0.866; 0.5)',$$

по которому восстанавливается управление $\{u^1\} = \{1, 1, 1, 1, -1\}$, приводящее систему в крайнюю точку x^1 .

Затем дополняем вектор e^* вектором $e^2 = -e^1$ до базиса и определяем вторую вершину $x^2 = (-3.7749; 2.2428)'$, а также находим управление $\{u^2\} = \{1, 1, -1, 1, -1\}$, приводящее систему

(6.4) в точку x^2 . Прицельную точку представляем в виде выпуклой комбинации крайних точек $F^* = \alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2$, где $\alpha_1 = 0.5437$, $\alpha_2 = 0.4563$. Следовательно, управление

$$\{u^*\} = \alpha_1 \{u^1\} + \alpha_2 \{u^2\} = \{1, 1, 1, 1, 0.08749, -1\}$$

приводит систему (6.4) в прицельную точку F^* . Тогда пропорциональное управление $u = \mu \{u^*\}$ с коэффициентом пропорциональности $\mu = 1/\beta_F(e^* | X_4) = 0.6502$:

$$u_0 = 0.6502, u_1 = 0.6502, u_2 = 0.6502, u_3 = 0.6502, u_4 = 0.0569, u_5 = -0.6502$$

приводит систему (6.4) в заданное конечное состояние F . Соответствующая траектория имеет вид

$$x_1 = (0.65; 0)', x_2 = (1.29; 0.11)', x_3 = (1.82; 0.55)', x_4 = (1.96; 1.39)',$$

$$x_5 = (0.66; 2.32)', x_6 = (-2; 2)'.$$

На рис. 6 изображены границы множеств достижимости: пунктирной линией для $T = 2$, штриховыми линиями для $T = 3$ и $T = 5$, штрихпунктирными – для $T = 4$ и $T = 6$. Начальное состояние системы (6.4) представлено маленькой окружностью, конечное состояние F – квадратиком. На рис. 7 по сравнению с рис. 6 дополнительно отмечены точка прицеливания F^* (звездочка) и крайние точки x^1 и x^2 (ромбы). “Крайние” траектории системы, приводящие систему в крайние точки, изображены штриховыми линиями, а “прицельная” траектория с конечным состоянием F^* – пунктирной линией. Эти три траектории совпадают от начального состояния до состояния $x(4)$. Оптимальная траектория движения в заданную точку F – полужирная ломаная.

В таблице приведены данные о продолжительности численного решения задачи на компьютере при разном количестве шагов T дискретной системы (6.4). При анализе этой зависимости необходимо учитывать, что время решения задачи включает время построения изображений множеств достижимости, которое оказывается значительным при больших значениях T .

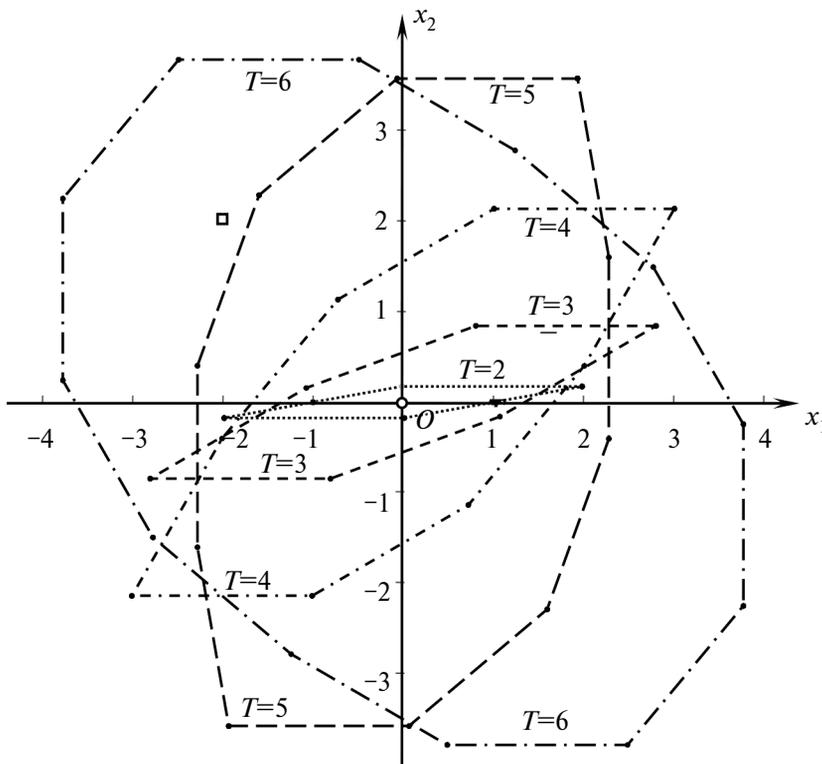


Рис. 6. Границы множеств достижимости системы (6.4).

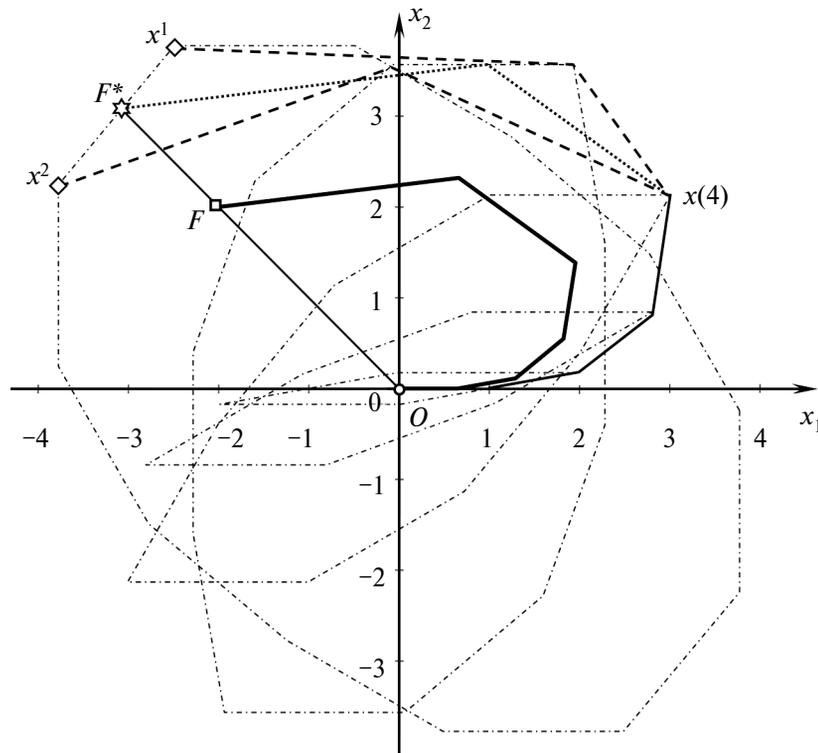


Рис. 7. “Крайние”, “прицельная” и оптимальная траектории системы (6.4).

Таблица. Время численного решения задачи быстродействия системы (6.4)

| Количество шагов T | 10 | 20 | 50 | 100 | 200 | 500 | 1000 |
|----------------------|------|------|------|------|-------|-------|--------|
| Время решения, с | 0.47 | 0.71 | 1.58 | 4.79 | 17.83 | 99.28 | 380.55 |

Заключение. Показана эффективность использования опорных функций для решения задачи быстродействия дискретной линейной системы переменной размерности, множества допустимых значений, управления которой представляют собой выпуклые компакты. В предлагаемом двухэтапном алгоритме решения задачи опорные функции применяются для описания множеств допустимых управлений и множеств достижимости. На первом этапе решения при нахождении минимального времени достижения заданного конечного состояния используется установленная связь функции Минковского с опорной функцией множества. Эту связь можно учитывать в разных задачах выпуклого анализа. На втором этапе формируется оптимальное управление, приводящее систему в заданное конечное состояние. При этом применяется разработанный алгоритм покоординатного поиска крайней точки выпуклого множества. Этот алгоритм реализуется при помощи опорной функции и может быть использован для решения экстремальных задач выпуклого анализа.

Дальнейшие теоретические исследования могут быть связаны с представлением граничной точки выпуклого множества в виде выпуклой комбинации его крайних точек. В статье – эта задача решения для многогранников. В общем случае предлагаемое построение решает задачу приближенно с любой точностью. Однако существование точного решения не доказано. Заметим, что эта проблема относится скорее к выпуклому анализу, а не к теории управления. В прикладных задачах управления, как правило, достаточно приближенного решения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пропой А.И. Элементы теории оптимальных дискретных систем. М.: Наука, 1973.
2. Болтянский В.Г. Оптимальное управление дискретными системами. М.: Наука, 1973.
3. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961.
4. Мороз А.И. Синтез оптимального по быстродействию управления для линейных дискретных систем // АиТ. 1965. № 2. С. 193–207.

5. *Сиротин А.Н.* Об одном способе синтеза управления для класса дискретных систем с ограничениями // Изв. РАН. ТиСУ. 2007. № 4. С. 43–55.
6. *Ибрагимов Д.Н., Сиротин А.Н.* О задаче оптимального быстродействия для линейной дискретной системы с ограниченным скалярным управлением на основе множеств 0-управляемости // АиТ. 2015. № 9. С. 3–30.
7. *Bushaw D.W.* Experimental Towing Tank // Stevens Inst. of Technology. Reprint 169. N.Y.: Hoboken, 1953.
8. *Фельдбаум А.А.* О синтезе оптимальных систем с помощью фазового пространства // АиТ. 1955. Т. 16. № 2. С. 129–149.
9. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.
10. *Лейхтвейс К.* Выпуклые множества. М.: Наука, 1985.
11. *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.
12. *Черноусько Ф.Л.* Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод эллипсоидов. М.: Наука, 1988.
13. *Куржанский А.Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977.
14. *Бортаковский А.С.* Необходимые условия оптимальности гибридных систем переменной размерности // Изв. РАН. ТиСУ. 2022. № 1. С. 28–40.
15. *Квакернаак Х., Сиван Р.* Линейные оптимальные системы управления. М.: Мир, 1977.
16. *Поляк Б.Т.* Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983.
17. *Котман А., Анри-Лабордер А.* Методы и модели исследования оптимизации. Целочисленное программирование. М.: Мир, 1976.