ИЗВЕСТИЯ РАН. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2025, № 2, с. 70–81

СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

УДК 519.853,517.977.5

МОДЕЛИ ОЦЕНКИ ЭФФЕКТИВНОСТИ ПРОЕКТА СОЗДАНИЯ ПРОИЗВОДСТВЕННОГО ПРЕДПРИЯТИЯ[1]

© 2025 г. И. А. Борисов[a, *], О. А. Косоруков[b, **], А. В Мищенко[a, ***], В. И. Цурков[c, ****]

[a]ФГОБУ ВО "Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации", Москва, Россия
[b]МГУ им. М.В. Ломоносова, Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте РФ, Москва, Россия
[c]Федеральный исследовательский центр "Информатика и управление" РАН, Москва, Россия
*e-mail: ilyaborisov2015@yandex.ru
**e-mail: kosorukovoa@mail.ru
***e-mail: alnex4957@rambler.ru
****e-mail: v.tsurkov@mail.ru

Поступила в редакцию 18.12.2024 г.
После доработки 07.01.2025 г.
Принята к публикации 24.02.2025 г.

Разработаны однопериодные и многопериодные модели оценки эффективности проектов, связанных с созданием производственных предприятий в условиях как детерминированного задания параметров этих моделей, так и с учетом неопределенности показателей. Предложено использование метода ветвей и границ, основанного на направленном переборе с итерационным вычислением верхних и нижних текущих оценок функционала, для решения задачи выбора оптимального выпуска конечной продукции. Рассмотрены подходы к анализу устойчивости оптимальных решений при изменении параметров модели и критерия оптимальности модели. Представлена методика количественной оценки возможных рисков производственных программ. Применение разработанных методов и моделей обеспечит возможность принятия управленческих решений в условиях наличия факторов риска и неопределенности, повышение эффективности реализации проектного управления на производственных предприятиях.

Ключевые слова: однопериодная и многопериодная математические модели, оптимальная производственная программа, метод ветвей и границ, верхняя оценка количества допустимых решений, анализ устойчивости решений в модели

DOI: 10.31857/S0002338825020052, **EDN:** ARZEXN

MODELS FOR ASSESSING THE EFFECTIVENESS OF THE PROJECT OF CREATING A PRODUCTION ENTERPRISE

I. A. Borisov[a,*], O. A. Kosorukov[b,**], A. V. Mishchenko[a,***], V. I. Tsurkov[c,****]

[a] FGOBU VO "Financial University under the Government of the Russian Federation", Moscow, Russia
[b] Moscow State University named after. M. V. Lomonosov, Russian Academy of National Economy and Public Administration under the President of the Russian Federation, Moscow, Russia
[c] Federal Research Center "Computer Science and Control" Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia
*e-mail: ilyaborisov2015@yandex.ru
**e-mail: kosorukovoa@mail.ru
***e-mail: alnex4957@rambler.ru
****e-mail: v.tsurkov@mail.ru

The paper develops singleperiod and multiperiod models for assessing the efficiency of projects related to the creation of production enterprises in conditions of both deterministic setting of the parameters of these models

[1] Результаты исследований, представленные в разд. 1, 2, 4, получены за счет средств Российского научного фонда (проект № 22-71-10131).

and taking into account the uncertainty of indicators. The use of the method of branches and boundaries based on directed search with iterative calculation of upper current and lower estimates to solve the problem of choosing the optimal output of final products is proposed. Approaches to analyzing the stability of optimal solutions under changes in model parameters and model optimality criterion are considered. The methodology of quantitative assessment of possible risks of production programs is proposed. The use of the developed methods and models will provide the possibility of making managerial decisions in the presence of risk factors and uncertainty, increasing the efficiency of project management implementation at production enterprises.

Keywords: singleperiod and multiperiod mathematical models, optimal production program, method branches and boundaries, upper estimate of the number of acceptable solutions, analysis of stability of solutions in the model

Введение. Многие задачи оптимального планирования так или иначе связаны с проблемой распределения различного вида ресурсов. Оценка эффективности управления этими ресурсами часто приводит к необходимости решать оптимизационные задачи, такие, например, как выбор производственной программы предприятия по тому или иному критерию, планирование выполнения заявок в конвейерных системах обработки, оптимизация расписания выполнения работ проекта, распределение транспортных средств по маршрутам [1–5] и др. Общая постановка многих из этих задач часто заключается в том, чтобы таким образом использовать имеющиеся ограниченные ресурсы, чтобы достичь поставленных целей, не нарушая определенных условий [6–14]. Моделирование распределения этих ресурсов в большинстве случаев сводится к решению задач линейной и нелинейной дискретной оптимизации, большинство из которых относится к NP-трудным, которые характеризуются экспоненциальным ростом объема вычислений при увеличении размерности задачи [15, 16]. Этот факт, а также то, что выбор оптимального решения происходит в условиях неполной информации, определяет актуальность проблемы разработки эффективных методов управления ограниченными ресурсами.

В предлагаемой статье будут рассматриваться оптимизационные модели оценки проекта создания производственного предприятия. В настоящее время существует достаточно обширный количественный инструментарий оценки эффективности подобных проектов. Например, в [17,18] рассмотрены модели оптимизации производственных программ предприятия, методы оценки устойчивости расписаний выполнения работ проекта исследуются в [19, 20]. Вместе с тем количественный инструментарий для оценки эффективности проектов в условиях неопределенности и риска ограничен.

Объективное существование неопределенности и риска — это неотъемлемый компонент производственной деятельности. Одной из причин низкой степени осознания необходимости учитывать риски и неопределенность при принятии управленческих решений является сложность их идентификации и количественной оценки [11, 12]. В настоящее время проблема неопределенности и риска стала предметом как общетеоретических, так и ориентированных на практическое применение исследований, проводимых во многих странах, включая Россию. Это связано с тем, что рост неопределенности и риска в организационных системах, достигая критического уровня, может повлиять не только на механизм взаимодействия элементов этих систем, но и привести к их разрушению [11].

В работе предлагается количественный инструментарий принятия управленческих решений для производственных систем с учетом факторов риска и неопределенности. В моделях в условиях ограниченных инвестиций, направляемых на закупку оборудования и производственной площади, необходимо на заданном директивном периоде оптимизировать выпуск конечной продукции по критерию прибыли или рентабельности с учетом ограничений спроса на эту продукцию. Рассматриваются однопериодные и многопериодные модели. Для решения этой задачи описывается метод ветвей и границ, приводятся различные подходы анализа устойчивости оптимальных решений при изменении параметров модели, а также методика количественной оценки рисков доходности производственной программы, перепроизводства и упущенной выгоды. Предложенные методы и модели могут использоваться в том числе в рамках проектного управления на производственных предприятиях, обеспечивая принятие эффективных управленческих решений в условиях наличия рисков и неопределенностей [21, 22].

1. Постановка задачи и метод решения. 1.1. Однопериодная математическая модель. Рассмотрим проект создания предприятия, выпускающего n видов продукции с применением k видов оборудования.

Известны: а) ограничения спроса на выпускаемую продукцию; б) стоимость необходимого оборудования и стоимость производственной площади, на которой будет размещено оборудование.

Необходимо определить объемы выпуска продукции на директивном периоде, задаваемом производственной программой $x=(x_1,\ldots,x_n)$, количество единиц приобретаемого или арендуемого оборудования $y = (y_1, \ldots, y_k)$, который задает количество и виды производственного оборудования для создания предприятия, и соответствующую производственную площадь для этого оборудования с учетом ограничений на финансирование проекта. Производственная программа x должна быть выбрана так, чтобы максимизировать прибыль от выпускаемой продукции. Математическая постановка задачи заключается в следующем:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i - \sum_{i=1}^{n} b_i x_i - z_{\text{пост}} \to \max, \tag{1.1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} t_{il} x_i \le y_l \tau_l; l = \overline{1,k}, \tag{1.2}$$

$$\sum_{l=r}^{k} \gamma_l y_l + d \sum_{l=r}^{k} s_l y_l \le F, \tag{1.3}$$

$$x_i \le pt_i; i = \overline{1,n}, \tag{1.4}$$

$$x_i \in z^+; y_l \in z^+; i = \overline{1,n}; l = \overline{1,k}. \tag{1.5}$$

Здесь используются следующие обозначения: a_i — цена продукции i; b_i — переменные издержки при выпуске единицы продукции i; $z_{\text{пост}}$ – постоянные издержки; x_i — объем выпуска продукции i; t_{il} – норма времени обработки единицы продукции вида i на оборудовании l; y_l – количество оборудования l; τ_l – эффективное время работы оборудования l на периоде планирования; γ_l – цена единицы оборудования l; s_l – площадь, занимаемая одной единицей оборудования l; d – стоимость одного квадратного метра производственной площади; F – объем инвестиций для создания производственного предприятия; pt_i – спрос на продукцию i.

Решение задачи (1.1)—(1.5) определяет производственную программу x и вектор y, который задает количество и виды производственного оборудования для создания предприятия.

1.2. Метод ветвей и границ. Модель (1.1)—(1.5) — это задача целочисленной линейной оптимизации, которая является NP-трудной. Для ее решения может использоваться метод ветвей и границ, основанный на направленном переборе с итерационным вычислением верхних и нижних текущих оценок. Схема этого метода для решения задачи (1.1)—(1.5) состоит в следующем.

Шаг 1. Вычисление верхней границы $F_{\text{в}}$. Для этого решается задача (1.1)—(1.4), (1.6), где

$$x_i \ge 0; y_l \ge 0; i = \overline{1,n}; l = \overline{1,k}. \tag{1.6}$$

Значение целевой функции на оптимальном решении задачи (1.1)—(1.4), (1.6) обозначим через $F_{\text{в}}$.

Шаг 2. Вычисление нижней оценки $F_{\text{н}}$. Здесь $F_{\text{н}}$ — значение целевой функции на каком-либо допустимом решении задачи (1.1)—(1.5). Очевидно, что $F_{\text{н}} \le F_{\text{в}}$. Если получим $F_{\text{н}} = F_{\text{в}}$, то задача (1.1)—(1.5) решена, допустимое решение, которое соответствует нижней оценке, будет оптимальным.

В частности, в качестве $F_{\text{н}}$ можно взять следующее допустимое решение. Выбираем решение задачи (1.1)—(1.4), (1.6) и, если компоненты вектора x и вектора y нецелочисленные, то дробные части отбрасываются. Получаем два целочисленных вектора $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$, которые являются допустимым решением задачи (1.1)—(1.5). Далее вычислим значение целевой функции на этом допустимом решении и ее значение будет равно $F_{\text{н}}$.

Шаг 3. Вычисление текущих верхних оценок $F_{\text{в}}^{\text{тек}}$. Если получим, что $F_{\text{в}} > F_{\text{н}}$, то начинаем формировать новое допустимое решение и в процессе его формирования вычисляем $F_{\text{в}}^{\text{тек}}\left(\hat{x}, \hat{y}\right)$. Здесь $\hat{x}$ — целочисленный вектор, который задает виды и объем продукции, которые уже включены в производственную программу, а $\hat{y}$ — целочисленный вектор, задающий виды и количество единиц закупленного оборудования.

Величина $F_{\text{в}}^{\text{тек}}\left(\hat{x}, \hat{y}\right)$ — значение целевой функции (1.1) при решении задачи (1.1)—(1.4), (1.6) с дополнительными условиями:

$$x_i \ge \hat{x}_i \text{ и } y_l \ge \hat{y}_l.$$

Это будет следующая задача:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i - \sum_{i=1}^{n} b_i x_i - z_{\text{пост}} \to \max,$$

$$\sum_{i=1}^{n} t_{il} x_i \le \tau_l y_l; l = \overline{1,k},$$

$$\sum_{l=1}^{k} \gamma_l y_l + d \sum_{l=1}^{k} s_l y_l \le F,$$

$$x_i \le pt_i,$$

$$x_i \ge \hat{x}_i; y_l \ge \hat{y}_l; i = \overline{1,n}; l = \overline{1,k}.$$

Если $F_{\text{в}}^{\text{тек}}\left(\hat{x},\hat{y}\right) \le F_н$, то формируемое решение отбрасываем. Если $F_{\text{в}}^{\text{тек}}\left(\hat{x},\hat{y}\right) > F_н$, то продолжаем формировать исходное решение $(\hat{x},\hat{y})$ путем включения в состав оборудования дополнительной единицы какого-либо оборудования и в состав производственной программы дополнительной единицы выпускаемой продукции.

Далее рассчитываем верхнюю текущую оценку на обновленных векторах $\hat{x}$ и $\hat{y}$. Продолжая эту процедуру, формируемое решение будет либо отбраковано, либо получим, что ни одну единицу продукции и ни одну единицу оборудования нельзя включить в формируемое решение, не нарушив каких-либо ограничений. Тогда производственная программа сформирована и вычисляется значение целевой функции F^* на этом решении. Если $F^* > F_{\text{н}}$, то принимаем $F_{\text{н}} = F^*$ и переходим к формированию нового допустимого решения. Метод заканчивает работу в том случае, если при очередной корректировке $F_{\text{н}}$ станет равно $\text{F}_{\text{в}}$. Решение, которое соответствует этому значению $F_{\text{н}}$, будет оптимальным. Если все варианты формирования решения задачи (1.1)–(1.5) исчерпаны и $\text{F}_{\text{н}} < F_{\text{в}}$, то в качестве оптимального решения выбирается то, которое соответствует последней (максимальной) оценке $F_{\text{н}}$.

2. Анализ устойчивости решений в модели. 2.1. Анализ устойчивости при изменении параметров модели. Рассмотрим ситуацию, когда такие параметры модели (1.1)–(1.5), как маржинальный доход, стоимость оборудования, производственные площади, а также спрос на продукцию меняются в зависимости от какого-либо параметра ξ. Таким параметром, в частности, может быть время или инфляция. Тогда возникает вопрос: если векторы x и y задают решение задачи (1.1)–(1.5) при $\xi = 0$, то будет ли это решение оптимальным при росте $\xi\left(\xi > 0\right)$? В этом случае задачу (1.1)–(1.5) можно записать в следующем виде:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i\left(\xi\right) x_i \to \max. \tag{2.1}$$

Здесь $c_i\left(\xi\right) = a_i\left(\xi\right) - b_i\left(\xi\right), i = \overline{1,n},$

$$\sum_{i=1}^{n} t_{il} x_i \le y_l \tau_l; l = \overline{1,k}, \tag{2.2}$$

$$\sum_{l=1}^{k} \gamma_l\left(\xi\right) y_l + d\left(\xi\right) \sum_{l=1}^{k} s_l y_l \le F, \tag{2.3}$$

$$x_i \le pt_i\left(\xi\right); i = \overline{1,n}, \tag{2.4}$$

$$x_i \in z^+; y_l \in z^+; i = \overline{1,n}; l = \overline{1,k}. \tag{2.5}$$

Рассмотрим ситуацию, когда $c_i\left(\xi\right), \gamma_l\left(\xi\right), d\left(\xi\right)$ и $pt_i\left(\xi\right)$ – это монотонные неубывающие функции от ξ. Пусть $\text{X} = \left\{x^1,\ldots,x^N\right\}$ – множество всех допустимых производственных программ задачи (2.1)–(2.5) при $\xi = 0$. Пусть функции $f^j\left(\xi\right)$ задаются следующим образом:

$$f^j\left(\xi\right) = \sum_{i=1}^{n} c_i\left(\xi\right) x_i^j.$$

Если $x^l\left(x^l \in \text{X}\right)$ является оптимальной производственной программой при $\xi = 0$, то $f^l\left(\xi\right) \ge f^j\left(\xi\right)$ для $\forall\, j = \overline{1,N}, j \ne l$.

Рассмотрим производные

$$\frac{df^j(\xi)}{d\xi}$$

если $c_i(\xi)$ – линейные функции ξ. Тогда возможны две ситуации:

$$\frac{df^l(\xi)}{d\xi} \geq \frac{df^j(\xi)}{d\xi} \text{для } \forall j = \overline{1,N}, j \neq l, \forall \xi > 0,$$

$$\exists k(1 \leq k \leq N)\frac{df^k(\xi)}{d\xi} > \frac{df^l(\xi)}{d\xi} \text{для } \forall \xi > 0.$$

В первом случае решение x^lявляется оптимальным для всех $\xi > 0$. Тогда будем говорить, что решение x^l абсолютно устойчиво при заданном изменении $c_i(\xi)$.

Во втором случае функция $f^k(\xi)$ растет быстрее, чем $f^l(\xi)$, и, следовательно, уравнение $f^l(\xi) = f^k(\xi)$ имеет положительное решение $\xi = \xi_p$. Следовательно решение x^l станет оптимальным при $\xi = [0, \xi_p]$, а при $\xi > \xi_p$ оптимальной будет производственная программа x^k. Интервал $[0, \xi_p]$ называется интервалом, устойчивым для решения x^l.

Рассмотрим ситуацию линейного роста цен на оборудование и на производственную площадь, т.е. $\gamma_l(\xi)$ и $d(\xi)$. В этом случае найдем решение уравнения:

$$\sum_{l=1}^{k}\gamma_l(\xi)y_l^q + d(\xi)\sum_{l=1}^{k}s_l y_l^q = F. \tag{2.6}$$

Будем полагать, что $x^l = (x_1^l, \ldots, x_n^l)$ и $y^q = (y_1^q, \ldots, y_k^q)$ в выражении (2.6) – это решение задачи (2.1)–(2.5) при $\xi = 0$. Обозначим через ξ_f решение уравнения (2.6). Тогда решение y^q оптимально при $\xi \in [0, \xi_f]$. При значении $\xi > \xi_f$ ограничение (2.3) не будет выполняться и, следовательно, y^q не будет допустимым решением. Таким образом, интервал $[0, \xi_f]$ – это интервал устойчивости для решения y^q.

Рассмотрим следующие ограничения:

$$x_i^l \leq pt_i(\xi), i = \overline{1,n}, \tag{2.7}$$

где $pt_i(\xi)$ – линейная невозрастающая функция. Допустим, что при $\xi = 0$ неравенство (2.7) имеет вид

$$x_i^l < pt_i(0), i = \overline{1,n}.$$

Найдем решения уравнений:

$$x_i^l = pt_i(\xi), i = \overline{1,n}.$$

Пусть это решения $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. Выберем $\xi_d = \min\limits_{i=\overline{1,n}}\{\xi_i\}$, следовательно, x^l будет оптимальным при изменении спроса в диапазоне $[0, \xi_d]$.

Таким образом, если линейно меняются параметры модели $c_i(\xi), \gamma(\xi), d(\xi)$ и $pt_i(\xi)$, то интервал устойчивости оптимального решения x^l и y^q при росте ξ задается интервалом $[0, \xi^*]$, где $\xi^* = \min\{\xi_p, \xi_f, \xi_d\}$.

2.1.1. Пример формирования области устойчивости при изменении маржинального дохода. Допустим, что есть два допустимых решения:

$$x^1 = (100, 200); x^2 = (200, 100); c_1 = 2; c_1 = 1,$$

$$c_i(\xi) = c_i + c_i\alpha_i\xi; \alpha_1 = 1 : \alpha_2 = 5.$$

Тогда $f^1(0) = 400; f^2(0) = 500$.Следовательно, при $\xi = 0$ решение x^2 оптимально. Пусть оптимальный объем закупок оборудования в модели (2.1)–(2.5) задан вектором y = (1, 1, 2), а цены $\gamma_l(\xi)$ – следующим образом:

$$\gamma_l(\xi) = \gamma_l + \Theta_l\gamma_l\xi, \text{где } \gamma_1 = 30\ 000,$$

$$\gamma_2 = 25\ 000; \gamma_3 = 20\ 000; \Theta_1 = 0,01; \Theta_2 = 0.02; \Theta_3 = 0.03,$$

$$d(\xi) = d + d\beta\xi.$$

Здесь $d = 100\ 000; \beta = 0.04$. Объем финансирования равен 620 000. Площадь, занимаемая каждой единицей оборудования, соответственно равна:

$$s_1 = 1.3; s_2 = 1.5; s_3 = 1.2.$$

Также будем полагать, что изменение спроса происходит исходя из следующей зависимости:

$$Pt_i(\xi) = Pti - iPt_i\xi;$$

где $Pt_1 = 205; Pt_2 = 203; \Delta_1 = 1.5; \Delta_2 = 3.$ Тогда интервал устойчивости при изменении маржинального дохода $C_i(\xi)$ определим как

$$f^1(\xi) = 400 + 1200\xi; f^2(\xi) = 500 + 900\xi.$$

Так как

$$\frac{\alpha f^1(\xi)}{\alpha\xi} > \frac{\alpha f^2(\xi)}{\alpha\xi},$$

решая уравнение $f^1(\xi) = f^2(\xi)$, получим $\xi_p = 0.33$. Следовательно, интервал устойчивости при изменении $C_i(\xi)$ для решения x^2 равен [0; 0.33].

2.1.2. Пример формирования области устойчивости при изменении цен на оборудование и производственные площади. Определим интервал устойчивости для ситуации изменения $\gamma_l(\xi)$ и $d(\xi)$. Решаем уравнение следующего вида:

$$\sum_{l=1}^{k} \gamma_l(\xi) y_l + d(\xi) \sum_{l=1}^{K} s_l y_l = F.$$

Подставив в это уравнение значения $\gamma_l(\xi), y_l, d(\xi) s_l$, получим: $520\ 000 \cdot 0.04\xi + 30\ 000 \cdot 0.01\xi + 25\ 000 \cdot 0.02\xi + 20\ 000 \cdot 0.03\xi = 620\ 000 - 520\ 000 - 95\ 000$. После преобразования найдем

$$(28 + 0.3 + 0.5 + 0.6)\xi = 5.$$

Следовательно, $\xi_f = 0.16$.

Таким образом, при изменении цен на производственные площади и оборудование оптимальное решение

$$x = (200, 100) \text{ и } y = (1, 1, 2)$$

сохраняется на интервале [0; 0.16]. Следовательно, в этом случае [0; 0.16] является интервалом устойчивости при изменении цен на оборудование и производственные площади.

2.1.3. Пример формирования области устойчивости при изменении спроса. Определим интервал устойчивости для x^2, если меняется спрос. Решаем следующие уравнения:

$$200 = 205 - 1.5 \cdot 205 \cdot \xi,$$

$$100 = 203 - 3 \cdot 203\xi.$$

Из первого уравнения получим

$$\xi_1 = 0.017.$$

Решение второго уравнения

$$\xi_2 = 0.16.$$

Определяем $\xi_d = \min\{\xi_1, \xi_2\} = 0.017$.

Таким образом, интервал устойчивости решения x^2 при изменении спроса равен [0.017]. Если меняются все ранее перечисленные параметры модели, то интервал устойчивости для решения x^2, y равен [0, ξ*], где

$$\xi^* = \min\left\{\xi_p, \xi_f, \xi_d\right\} = 0.017.$$

2.2. Анализ устойчивости при изменении критерия оптимизации. Рассмотрим ситуацию, когда критерием оптимизации проекта создания предприятия является рентабельность производственной программы, т.е. отношение прибыли к переменным затратам. Тогда целевая функция будет иметь вид

$$\left(\sum_{i=1}^{n} c_i(\xi) x_i\right) \Bigg/ \left(\sum_{i=1}^{n} b_i(\xi) x_i\right) \to \max.$$

Предположим, что $c_i(\xi)$ и $b_i(\xi)$ – линейные неубывающие функции параметра ξ. Определим

$$f^j(\xi) = \left(\sum_{i=1}^{n} c_i x_i^j\right) \Bigg/ \left(\sum_{i=1}^{n} b_i x_i^j\right)$$

для всех $x^j \in X$. В этом случае $f^j(\xi)$ будут дробно-линейными функциями ξ. Тогда если x^l – оптимально при $\xi = 0$, то $f^l(\xi)$ можно представить как

$$f^l(\xi) = \frac{d_l + h_l\xi}{q_l + m_l\xi}.$$

На любом допустимом решении x^j целевая функция будет иметь следующий вид:

$$f^j(\xi) = \frac{d_j + h_j\xi}{q_j + m_j\xi}; j = \overline{1,N}; j \neq l.$$

Рассмотрим функцию $\phi^j(\xi)$, которая определяется следующим образом:

$$\begin{gathered}\phi^j(\xi) = \frac{d_j + h_j\xi}{q_j + m_j\xi} - \frac{d_l + h_l\xi}{q_l + m_l\xi} = \\ = \frac{d_j f_l + h_j f_l\xi + d_j m_l + h_j m_l\xi^2 - f_j d_l - f_j h_l\xi - m_j d_l\xi - h_l m_j\xi^2}{(q_j + m_j\xi)(q_l + m_l\xi)}.\end{gathered} \tag{2.8}$$

В числителе выражения (2.8) стоит квадратичная функция ξ, в знаменателе – произведение линейных функций ξ, которое всегда положительно при $\xi > 0$. Поэтому знак функции $\phi^j(\xi)$ при $\xi > 0$ определяется квадратичной функцией в числителе.

Представим функцию $\phi^j(\xi)$ как

$$\phi^j(\xi) = \frac{\Psi_j(\xi)}{\eta_j(\xi)}; j = \overline{1,N}. \tag{2.9}$$

Решая квадратичное неравенство $\Psi_j(\xi) > 0$ определим интервал $\left[\xi_1^j, \xi_2^j\right]$, на котором $\Psi_j(\xi) > 0$.Выбирая $\xi = \min\limits_{j=1,N}\left\{\xi_1^j\right\}$, получим интервал $[0, \xi]$, который будет интервалом устойчивости для решения x^l.

Рассмотрим ситуацию, когда есть два допустимых решения $x^1 = (1,2); x^2 = (2,1)$:

$$a_i(\xi) = a_i + a_i\alpha_i\xi; b_i = b_i + b_i\beta_i\xi,$$

$$a_1 = 4; b_1 = 2; \alpha_1 = 2; \beta_1 = 1,$$

$$a_2 = 4; b_2 = 2; \alpha_2 = 2; \beta_2 = 1,$$

$$f^1(0) = \frac{4+6}{4} = 2.5,$$

$$f^2(0) = \frac{8+3}{5} = 2.2.$$

Таким образом, при $\xi = 0$ оптимальным будет решение x^1. Далее, рассчитав значения $f^1(\xi)$ и $f^2(\xi)$, получим

$$f^1(\xi) = \frac{10+17\xi}{4+6\xi}; f^2(\xi) = \frac{11+25\xi}{5+5\xi}.$$

Тогда, как следует из (2.9), знак разности $f^2(\xi) - f^1(\xi)$ будет зависеть от $\Psi(\xi) = 65\xi^2 - 31\xi - 14$.

Решая квадратичное неравенство $\Psi(\xi) \geq 0$ для всех $\xi > 0$, найдем $\xi \geq 0.74$. Следовательно, переход к оптимальному решению x^2 произойдет при $\xi > 0.74$ и, следовательно, интервал $[0, 0.74]$ – это интервал устойчивости для решения x^1.

В задаче (1.1)–(1.5) также может быть использован критерий рентабельности инвестиций, который можно определить как отношение прибыли к затратам на приобретение оборудования и производственной площади для предприятия:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} c_i x_i\right) \Big/ \left(\sum_{l=1}^{k} \gamma_l y_l + d \sum_{l=1}^{k} s_l y_l\right) \to \max. \tag{2.10}$$

Как уже отмечалось выше, каждое допустимое решение задачи (2.10), (1.2)–(1.5) задается векторами x^l и y^l. Пусть при $\xi = 0$ оптимальными будут векторы $x^f = \left(x_1^f, \ldots, x_n^f\right)$ и $y^f = \left(y_1^f, \ldots, y_k^f\right)$. Необходимо выяснить, существует ли уровень инфляции $\xi^* > 0$, такой, что при $\xi > \xi^*$ оптимальным станет другое допустимое решение $x^m = \left(x_1^m, \ldots, x_n^m\right)$ и $y^m = \left(y_1^m, \ldots, y_k^m\right)$. Иными словами, существует ли ξ^* такое, что для всех $\xi > \xi^*$ выполняется неравенство:

$$\begin{gathered}\left(\sum_{i=1}^{n} (c_i + c_i \alpha_i \xi) x_i^m\right) \Big/ \left(\sum_{l=1}^{k} (\gamma_l + \Theta_l \gamma_l \xi) y_l^m + (d + d\beta\xi) \sum_{l=1}^{k} s_l y_l^m\right) > \\ > \left(\sum_{i=1}^{n} (c_i + c_i \alpha_i \xi) x_i^f\right) \Big/ \left(\sum_{l=1}^{k} (\gamma_l + \Theta_l \gamma_l \xi) y_l^f + (d + d\beta\xi) \sum_{l=1}^{k} s_l y_l^f\right).\end{gathered} \tag{2.11}$$

Преобразуя выражение (2.11) путем переноса правой части неравенства влево и приводя дроби к общему знаменателю, получим дробное выражение следующего вида:

$$\frac{L(\xi)}{M(\xi)} > 0,$$

где $M(\xi)$ – произведение знаменателей дробей в выражении (2.11); $M(\xi)$ положительно для всех $\xi > 0$, так как является произведением положительных чисел.

Выражение $L(\xi)$ является квадратичной функцией ξ. Поэтому, решая квадратичное неравенство $L(\xi) > 0$ для значений $\xi > 0$, найдем ответ на вопрос о том, будет ли при некотором $\xi > 0$ переход на новое оптимальное решение x^m, y^m или нет.

Модель оценки эффективности проекта с учетом риска. 3.1. Количественная оценка риска доходности. Рассмотрим ситуацию, когда маржинальный доход от выпуска единицы продукции i задан случайной величиной:

$$C_{\mathrm{i}} = \begin{cases} \mathrm{C_i^1 - p_1} \\ \cdots \\ \mathrm{C_i^m - p_m} \end{cases}.$$

Здесь p_j – вероятность того, что маржинальный доход $\mathrm{C_i = C_i^j}$.

Тогда с учетом целочисленной модели Марковица [5] может быть сформулирована оптимизационная модель проекта создания производственного предприятия с ограничением на величину риска:

$$\sum_{I=1}^{n}\bar{C}_i x_i \to \max, \tag{3.1}$$

где $\bar{C}_i$ – математическое ожидание маржинального дохода от выпуска единицы продукции вида $i=\overline{1,n}$:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i r_i}{F_1}\le 1. \tag{3.2}$$

Здесь F_1 – максимальные суммарные затраты, связанные с выпуском конечной продукции; r_i – затраты, связанные с выпуском единицы продукции i:

$$\sum_{I=1}^{n}\left(\frac{x_i r_i}{F_1}\right)^2 \tau_i{}^2 + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i} cov_{ij}\frac{x_i r_i}{F_1}\frac{x_j r_j}{F_1}\le R_g, \tag{3.3}$$

где $\tau_i{}^2$ – дисперсия доходности продукции i; cov_{ij} – ковариация доходности продукции i и j; $(r_i x_i)/F_1$ – доля затрат на продукцию i в производственной программе x.

Левая часть формулы (3.3) – дисперсия маржинального дохода для производственной программы x, которая является количественной оценкой риска этой программы. Этот риск не должен быть выше допустимого значения R_g:

$$\sum_{i=1}^{n} t_{il}x_i \le y_l \tau_l, l=\overline{1,K}, \tag{3.4}$$

$$\sum_{l=1}^{K}\gamma_l y_l + d\sum_{l=1}^{K} S_l y_l \le F, l=\overline{1,K}, \tag{3.5}$$

$$x_i \le pt_i, i=\overline{1,n}, \tag{3.6}$$

$$x_i \in z^+; y_l \in z^+. \tag{3.7}$$

Здесь ограничения (3.4)–(3.7) совпадают с ограничениями (1.2)–(1.5) детерминированной модели (1.1)–(1.5).

Необходимо отметить, что в модели (3.1)–(3.7) в качестве критерия также может быть использован критерий минимизации риска доходности производственной программы x с ограничением снизу на величину математического ожидания доходности производственной программы x, заданной формулой (3.1).

3.2. Количественная оценка риска перепроизводства и риска упущенной выгоды. При оценке эффективности проекта создания производственного предприятия спрос на продукцию также может быть задан как случайная величина:

$$pt_i = \begin{cases} pt_i^1 - p_1 \\ \ldots \\ pt_i^m - p_m, \end{cases}$$

где

$$p_j \ge 0; \sum_{j=1}^{m} p_j = 1.$$

Выбирая то или иное значение спроса, необходимо учитывать потери, связанные с тем, что спрос может оказаться ниже или выше прогнозируемого. В первом случае речь идет о риске перепроизводства, во втором – о риске упущенной выгоды. Рассмотрим, каким образом могут быть оценены количественно эти риски.

Обозначим риск перепроизводства через R_n и будем его оценивать как математическое ожидание потерь в ситуации, когда спрос оказался выше, чем объем производства. Пусть x – объем выпуска продукции. Тогда для вида продукции i выбираем все значения $pt_i^l, l=\overline{1,m}$, для которых $x_i > pt_i^l$, и включим их в множество D_n^i. Далее вычислим математическое ожидание потерь при перепроизводстве продукции i по формуле:

$$R_n^i = \sum_{l \in D_n^i} \left(x_i - pt_i^l \right) b_i p_l, i = \overline{1, n}. \tag{3.8}$$

Здесь b_i — переменные издержки, связанные с выпуском единицы продукции i. Далее суммируем правые части формулы (3.8) по всем видам продукции. Получаем риск перепроизводства (для производственной программы x):

$$R_n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{l \in D_n^i} \left(x_i - pt_i^l \right) b_i p_l.$$

Риск упущенной выгоды будем оценивать как математическое ожидание потерь, связанных с тем, что спрос оказался выше, чем объем выпуска продукции, заданных производственной программой x. Для количественной оценки этого риска выберем все значения pt_i^l, для которых $x_i < pt_i^l, i = \overline{1, n}, l = \overline{1, m}$, и включим их в множество D_b^i. Далее вычисляем риск упущенной выгоды R_i^b для продукта вида i:

$$R_b^i = \sum\nolimits_{l \in D_b^i} \left(Pt_i^l - x_i \right) c_i p_l.$$

Здесь c_i — маржинальный доход от выпуска единицы продукции i. Далее, суммируя риск упущенной выгоды по всем видам продукции, получим риск упущенной выгоды R_b для производственной программы x:

$$R_b = \sum\nolimits_{i=1}^{n} \sum\nolimits_{l \in D_b^i} \left(Pt_i^l - x_i \right) c_i p_l.$$

3.3. Пример вычисления риска упущенной выгоды и риска перепроизводства. Пусть производственная программа $x = (5, 8, 4)$. Спрос на продукцию первого, второго и третьего вида задач задан как случайная величина: $pt_1 = 5$ с вероятностью $p_1 = 0.3$ и $pt_1 = 7$ с вероятностью $\mathrm{p}_2 = 0.7$; $pt_2 = 8$ с вероятностью $p_1 = 0.4$; $pt_2 = 6$ с вероятностью $p_2 = 0.6$; $pt_3 = 4$ с вероятностью $p_1 = 0.3$; $pt_3 = 3$ с вероятностью $p_2 = 0.2$ и $pt_3 = 6$ с вероятностью $p_3 = 0.5$. Далее будем предполагать, что производственные мощности позволяют выпускать продукцию в объеме $x_1 = 7$; $x_2 = 8$; $x_3 = 6$.

Выбирем в качестве производственной программы $x = (5, 8, 4)$ с учетом того, что $a_1 = 5; b_1 = 2; a_2 = 6; b_2 = 4; a_3 = 8; b_3 = 3$:

$$R_b^1 (7 - 5) \cdot 3 \cdot 0.7 = 4.2,$$

$$R_n^1 = (5 - 5) \cdot 2 \cdot 0.3 = 0,$$

$$R_b^2 = (8 - 8) \cdot 2 \cdot 0.4 = 0,$$

$$R_n^2 = (8 - 6) \cdot 0.6 \cdot 6 = 3.6,$$

$$R_b^3 = (6 - 4) \cdot 0.8 \cdot 5 = 5,$$

$$R_n^3 = (4 - 3) \cdot 0.2 \cdot 8 = 1.6.$$

Следовательно, для производственной программы $x = (5, 8, 4)$:

$$R_n = 5.2, \text{а}\, R_b = 9.2.$$

4. Многопериодные модели оценки эффективности проекта. Многопериодные модели оценки эффективности проекта позволяют более гибко учитывать изменение цен и затрат на выпускаемую продукцию, а также изменение спроса, стоимости оборудования и доходности производственной программы.

Рассмотрим следующую многопериодную модель:

$$\sum\nolimits_{t=1}^{T} \sum\nolimits_{i=1}^{n} a_i^t x_i^t - \sum\nolimits_{t=1}^{T} \sum\nolimits_{i=1}^{n} b_i^t x_i^t - \sum\nolimits_{t=1}^{T} z_{\text{пост}}^t \to \max, \tag{4.1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} t_{(il)} x_i^t \le \tau_l^t y^t e; l = \overline{1,k}; t = \overline{1,T}, \tag{4.2}$$

$$\sum_{e=1}^{k} \gamma e^t y^t e + d \sum_{e=1}^{k} S_e y^t e \le F^t; t = \overline{1,T}, \tag{4.3}$$

$$x_i^t \le p_{t_i^l}; i = \overline{1,n}; t = \overline{1,T}, \tag{4.4}$$

$$y_l^t \in z^+; x_i^t \in z^+; \ , i = \overline{1,n}; l = \overline{1,k}; t = \overline{1,T}. \tag{4.5}$$

В модели (4.1)–(4.5) использовались следующие обозначения: a_i^t – цена на продукцию i на периоде t; T – количество периодов времени; b_i^t – переменные издержки на единицу продукции i на периоде t; x_i^t – объем выпуска продукции i на периоде t; $z_{\text{пост}}^t$ – постоянные издержки на периоде времени t; τ_l^t – эффективное время работы оборудования l на периоде t; γ_l^t – цена аренды единицы оборудования l на периоде t; y_e^t – количество единиц оборудования l на периоде t; d^t – стоимость аренды квадратного метра производственной площади в период времени t; s_l – площадь, необходимая для размещения одной единицы оборудования l; pt_i^t –спрос на продукцию i на периоде t; F^t – объем финансирования на периоде t.

Продолжительность каждого периода постоянна и равна одному году, а в целевой функции a_i^t, b_i^t и $z_{\text{пост}}^t$ даны с учетом их изменения на каждом периоде. В этих условиях оптимизационная задача (4.1)–(4.5) решается для каждого периода t, и далее решение для интервала $[0,T]$ может быть представлено в виде объединения решений на всем периоде. В свою очередь оптимальное значение векторов x^t и y^t на каждом периоде может быть получено с помощью метода ветвей и границ, описание которого приведено в разд. 1 настоящей статьи. Аналогичным образом для каждого периода даются оценки устойчивости решения и рисков доходности производственной программы, перепроизводства и упущенной выгоды.

Ограничения на объем финансирования может быть задано на весь период времени [0,T]. Тогда ограничение на объем финансирования представляется также в следующем виде:

$$\sum_{t=1}^{T}\sum_{l=1}^{k} \gamma_l^t y_l^t + d \sum_{t=1}^{T}\sum_{l=1}^{k} s_l y_l^t \le F. \tag{4.6}$$

В этом случае финансирование аренды (покупки) оборудования и производственной площади выделяется на весь период $[0,T]$ в объеме F. В этой ситуации определяется не только решение задачи (4.1), (4.2), (4.4)–(4.6) в виде матриц $x = \left(x_i^t\right)$ и $\left(y_l^t\right), i = \overline{1,n}; t = \overline{1,T}; l = \overline{1,k}$, но и объем финансирования F^t на каждом периоде.

Заключение. Разработаны математические методы и модели оценки эффективности проектов, связанных с созданием производственных предприятий в условиях как детерминированного задания параметров этих моделей, так и с учетом неопределенности показателей спроса на выпускаемую продукцию, стоимости оборудования, прибыли от выпускаемой продукции.

Построены однопериодные и многопериодные модели оценки эффективности проектов, для их решения предложено использовать метод ветвей и границ, основанный на направленном переборе с итерационным вычислением верхних текущих и нижних оценок. Рассмотрены подходы к анализу устойчивости производственных программ при изменении исходных данных модели и критерия оптимальности модели, в том числе при линейном изменении параметров (спроса, цен на оборудование и на производственную площадь) в зависимости от какого-либо параметра, которым, в частности, может быть время или инфляция. Предложена методика количественной оценки рисков реализации производственных программ, приведена количественная оценка рисков доходности, перепроизводства и упущенной выгоды.

Разработанные методы и модели могут использоваться при принятии эффективных управленческих решений для производственных систем, а также при организации и реализации проектного управления на производственных предприятиях с учетом факторов риска и неопределенности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Brucker P., Jurisch B., Jurisch M.* Open Shop Problems with Unit Time Operations, ZOR // Methods and Models of Operations Research. 1993. V. 37. P. 59–73.
2. *Мищенко А.В., Сушков Б.Г.* Задача оптимального распределения ресурсов на сетевой модели при линейных ограничениях на время выполнения работ // ЖВМ и МФ. 1980. Т. 10. № 5.
3. *Мищенко А.В., Когаловский В.М.* Проблемы устойчивости задач производственного планирования в машиностроении // Экономика и мат. методы. 1992. № 3.

4. *Мищенко А.В.* Задача распределения транспортных средств по автобусным маршрутам при неточно заданной матрице корреспонденций пассажиропотока // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1992. № 2.
5. *Катюхина О.А., Мищенко А.В.* Динамические модели управления транспортными ресурсами на примере организации работы автобусного парка // Аудит и финансовый анализ. 2016. № 2. С. 156–167.
6. *Мищенко А.В.* Устойчивость решений в задаче перераспределения транспортных средств в случае экстренного закрытия движения на участке метрополитена // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1990. № 3.
7. *Косоруков Е.О., Фуругян М.Г.* Некоторые алгоритмы распределения ресурсов в многопроцессорных системах // Вестн. МГУ. Сер. 15. Вычисл. математика и кибернетика. 2009. № 4. С. 34–37.
8. *Фуругян М.Г.* Планирование вычислений в многопроцессорных АСУ реального времени с дополнительным ресурсом // АиТ. 2015. № 3.
9. *Косоруков Е.О., Фуругян М.Г.* Алгоритмы распределения ресурсов в многопроцессорных системах с нефиксированными параметрами // Некоторые алгоритмы планирования вычислений и организации контроля в системах реального времени. М.: ВЦ РАН, 2011. С. 40–51.
10. *Mironov A.A., Tsurkov V.I.* Transport-type Problems with a Criterion // АиТ. 1995. № 12. С. 109–118.
11. *Миронов А.А., Цурков В.И.* Наследственно минимаксные матрицы в моделях транспортного типа // Изв. РАН. ТиСУ. 1998. № 6. С. 104–121.
12. *Mironov A.A., Levkina TA., Tsurkov V.1.* Minimax Estimations of Expectates of Are Weights in Integer Networks with Fixed Node Degrees // Applied and Computational Mathematics. 2009. T. 8. № 2. C. 216–226.
13. *Mironov A.A., Tsurkov V.I.* Class of Distribution Problems with Minimax Criterion // Doklady Akademii Nauk. 1994. V. 336. № 1. P. 35–38.
14. *Tizik A.P., Tsurkov V.I.* Iterative Functional Modification Method for Solving a Transportation Problem // Automation and Remote Control. 2012. V. 73. № 1. P. 134–143.
15. *Mironov A.A., Tsurkov V.I.* Hereditarily Minimax Matrices in Models of Transportation Type // J. Computer and Systems Sciences International. 1998. V. 37. № 6. P. 927–944.
16. *Mironov A.A., Tsurkov V.I.* Minimax in Transportation Models with Integral Constraints. I // J. Computer and Systems Sciences International. 2003. V. 42. № 4. P. 562–574.
17. *Coffman E.G., Nozari A., Yannakakis M.* Optimal Scheduling of Products with Two Subassemblies on a Single Machine // Oper. Res. 1989. V. 37. P. 426–436.
18. *Данилин В.И.* Финансовое и операционное планирование в корпорации РАНХиГС. М., 2014.
19. *Мищенко А.В., Халиков М.А.* Распределение ограниченных ресурсов в задаче оптимизации производственной деятельности предприятия // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1991. № 6.
20. *Мищенко Л.В., Пилюгина А.В.* Динамические модели управления научно-производственными системами // Вестн. МГТУ им. Баумана. Сер. Приборостроение. 2019. № 2.
21. *Борисов И.А.* Методика сравнительного анализа и оптимального выбора варианта управления проектами // Альманах “Крым”. 2023. № 38. С. 1–13.
22. *Борисов И.А.* Кластеризация проектов в целях повышения эффективности процессов проектного управления в ФНС России // Экономика и управление: проблемы, решения. 2023. № 8. Т. 3. С. 153–160.