

УДК 629.7.05, 514.8

ПОСТРОЕНИЕ ГАРАНТИРУЮЩИХ ОБЛАСТЕЙ ПОСТОЯННЫХ ИНСТРУМЕНТАЛЬНЫХ ПОГРЕШНОСТЕЙ БЕСПЛАТФОРМЕННОЙ ИНЕРЦИАЛЬНОЙ НАВИГАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ

© 2025 г. В. М. Железнов, А. В. Козлов^{а, *}, А. Г. Кузнецов, А. В. Молчанов,
А. В. Фомичев^{б, **}

^аМГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

^бМосковский институт электромеханики и автоматики, Москва, Россия

*e-mail: a.kozlov@navlab.ru

**e-mail: a.fomichev@aomiea.ru

Поступила в редакцию 03.05.2024 г.

После доработки 26.12.2024 г.

Принята к публикации 24.02.2025 г.

Бесплатформенные инерциальные навигационные системы входят в состав систем управления различных подвижных объектов. От их точности зависят возможности автономной навигации объекта и, в значительной мере, архитектура его системы управления. Одним из основных факторов, влияющих на точность навигационной системы, являются инструментальные погрешности ее чувствительных элементов. При этом навигационные ошибки зависят не только от абсолютных величин инструментальных погрешностей, но и от сочетания компонент инструментальных погрешностей и траектории движения объекта.

Рассмотрен метод, позволяющий для постоянных инструментальных погрешностей найти область в пространстве инструментальных погрешностей, для любой точки которой позиционные ошибки бесплатформенной инерциальной навигационной системы гарантированно находятся в заданном допуске. Этот же метод выявляет наиболее существенные источники навигационных ошибок.

Ключевые слова: бесплатформенная инерциальная навигационная система (БИНС), инструментальные погрешности, навигационные погрешности, гарантирующие оценки

DOI: 10.31857/S0002338825020076, EDN: ASBPPEM

GUARANTEENG DOMAINS OF SINS INSTRUMENTAL ERRORS

V. M. Zheleznov, A. V. Kozlov^{а, *}, A. G. Kuznetsov, A. V. Molchanov, A. V. Fomichev^{б, **}

^аLomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

^бMoscow Institute of Electromechanics and Automatics, Moscow, Russia

*e-mail: a.kozlov@navlab.ru

**e-mail: a.fomichev@aomiea.ru

Strapdown inertial navigation systems are one of the most important elements of the control systems for various vehicles. Navigation errors depend on both inertial navigation system instrumental errors and the trajectory of the object. In this article we described a domain in the space of constant instrumental errors, ensuring that the radial position error is less than some tolerance for a given set of trajectories. The same approach enables finding the most significant error sources.

Keywords: strapdown inertial navigation system, instrumental errors, guaranteeing domain of constant instrumental errors

Введение. Назначение допусков на инструментальные погрешности является одним из важных этапов разработки бесплатформенной инерциальной навигационной системы (БИНС). Эти допуски должны обеспечивать нахождение погрешностей выходных параметров БИНС

в заданных диапазонах при маневрировании, характерном для объекта, для которого БИНС предназначена.

Из теории ошибок [1, 2] и опыта эксплуатации БИНС следует, что порядки различных групп ошибок выходных параметров БИНС взаимосвязаны. Например, мильной (1850 м) погрешности по координатам за час соответствуют ошибки по скорости порядка 2 м/с, по вертикали – 1.45×10^{-4} рад = 30" и по курсу – $5.8-8.7 \times 10^{-4}$ рад = 2–3'. Из этого следует, что класс точности БИНС можно соотнести с позиционными навигационными ошибками: если они оказываются в некотором диапазоне, то из этого сразу вытекают оценки порядка остальных ошибок. Поэтому далее считается, что задан допуск на круговую позиционную погрешность, а отвечающие ему допуски на инструментальные погрешности требуется определить.

Известно, что в большинстве практических задач ошибки БИНС описываются линейными дифференциальными уравнениями ошибок [1, 2]. Из линейности уравнений следует, что изменение допуска позиционной погрешности приводит к пропорциональному изменению допусков на инструментальные погрешности. Поэтому достаточно решить задачу для некоторого фиксированного допуска, отвечающего характерным погрешностям БИНС стандартной точности, например мильной.

Существует несколько подходов к решению этой задачи. Прямой, но не оптимальный, путь состоит в моделировании позиционных ошибок, соответствующих решениям уравнений ошибок для различных сочетаний инструментальных погрешностей, ошибок начальных условий и наборов траекторий. Здесь и далее под траекторией понимается зависимость от времени фазового вектора системы уравнений, описывающей навигационную задачу, который включает в себя параметры, характеризующие положение, скорость и ориентацию БИНС относительно выбранного опорного трехгранника.

Этот подход позволяет легко оценить порядок величин, но не эффективен из-за необходимости перебора большого числа всевозможных сочетаний инструментальных погрешностей и начальных условий. Большое число параметров модели инструментальных ошибок делает этот перебор практически невозможным из-за известного явления “проклятия размерности” [3], когда повышение размерности некоторой модели ведет к экспоненциальному росту числа экспериментов, необходимых для получения статистически достоверных выводов. Например, при стандартной модели погрешностей БИНС с 21 параметром, варьируя траекторию только по начальному румбу (север, восток, юг, запад), перебор всего лишь трех значений каждого из параметров потребует проведения $3^{21} \times 4 \approx 40$ млрд численных экспериментов, что недопустимо велико даже для современных ЭВМ, и при этом он не покрывает даже малой доли реальной вариативности траекторий самолета и сочетаний инструментальных погрешностей. При этом позиционные ошибки БИНС существенно зависят именно от сочетания, а не только абсолютных величин, инструментальных погрешностей и траектории движения. Поэтому любой перебор не гарантирует, что при каком-то другом сочетании позиционные ошибки не выйдут за допуск. Детали этих утверждений раскрыты ниже.

Решение дисперсионного уравнения [4], отвечающего системе уравнений ошибок БИНС и описывающего изменение ковариационной матрицы системы, называется ковариационным анализом и позволяет обойти прямой перебор. Начальными условиями для ковариационной матрицы служат начальные дисперсии и корреляции компонент вектора состояния системы уравнений ошибок. Его численное интегрирование дает среднеквадратическое отклонение (СКО) произвольной линейной комбинации компонент вектора состояния системы уравнений ошибок (в том числе – отдельных его компонент) в любой момент времени и для любой заданной траектории. Для анализа влияния инструментальных погрешностей система уравнений ошибок дополняется формирующими уравнениями для параметров модели инструментальных погрешностей.

Дисперсионное уравнение описывает усредненное поведение ошибок и обеспечивает лишь оценки порядков величин. Однако из теории вероятностей, например неравенства Чебышёва, известно, что вне зависимости от закона распределения существенные отклонения от СКО маловероятны. Поэтому СКО, полученные из решения дисперсионного уравнения, дают достаточно точные оценки порядка навигационных ошибок, но, как и моделирование перебором, не исключают существования сочетаний инструментальных погрешностей, приводящих к существенно большему позиционным ошибкам.

Если БИНС в эксплуатации подтверждает заявленные точности, то оценки соответствующих инструментальных ошибок можно получить при комплексной обработке информации (КОИ) БИНС и эталонного средства, например спутниковой навигационной системы. Однако данные оценки будут косвенными и зависят в том числе от их наблюдаемости [4] на конкретных траекториях. Корректность косвенных оценок инструментальных ошибок, полученных

этим способом, можно проверить подстановкой в уравнения ошибок БИНС и проверкой того, что навигационные ошибки для них действительно оказываются в допуске.

Наконец, можно поставить задачу о нахождении гарантирующих допусков на инструментальные погрешности, которые для заданного набора траекторий обеспечивают нахождение навигационных ошибок в допуске с единичной вероятностью. Естественно, что гарантирующие допуски оказываются жестче статистических оценок, полученных из перебора реализаций или ковариационного анализа. Для построения гарантирующей области можно использовать либо различные мажорирующие оценки, либо пытаться построить гарантирующую область максимально точно.

Последняя задача и является предметом настоящего исследования, что отличает его от моделирования в реализациях, ковариационного анализа и мажорирования. Задача решается на априорно выбранном наборе из 30–40 реальных траекторий полета. Опыт решения показал, что при выборе других наборов полетов результаты отличаются несущественно, а значит, исходный набор будет достаточно репрезентативным.

1. Математическая модель инструментальных погрешностей и система уравнений ошибок. Принимается следующая стандартная модель инструментальных погрешностей [1, 2, 4]:

$$\Delta f_z = \Delta f_z^0 + \Gamma f'_z, \Gamma = \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & 0 & 0 \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & \Gamma_{23} \\ \Gamma_{31} & 0 & \Gamma_{33} \end{bmatrix},$$

$$v_z = v_z^0 + \Theta \omega'_z, \Theta = \begin{bmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} & \Theta_{13} \\ \Theta_{21} & \Theta_{22} & \Theta_{23} \\ \Theta_{31} & \Theta_{32} & \Theta_{33} \end{bmatrix}. \quad (1.1)$$

Здесь $\Delta f_z, v_z$ – трехмерные векторы приведенных (суммарных) погрешностей акселерометров и датчиков угловой скорости (ДУС), которые часто называют гироскопами; $\Delta f_z^0, v_z^0$ – трехмерные векторы смещений нулевых сигналов акселерометров и ДУС соответственно; $\Gamma_{ii}, \Theta_{ii}, i = 1, 2, 3$, – погрешности масштабных коэффициентов акселерометров и ДУС; $\Gamma_{ij}, \Theta_{ij}, i = 1, 2, 3, i \neq j$, – погрешности ортогональности осей чувствительности (перекосы) акселерометров и ДУС. Частичное заполнение матрицы Γ объясняется тем, что приборные оси z блока чувствительных элементов связаны с осью одного из акселерометров и плоскостью пары акселерометров. Этот прием применяется во избежание избыточности числа параметров модели инструментальных погрешностей и, как следствие, их ненаблюдаемости; штрихом «'» здесь и далее отмечаются параметры, измеряемые или вычисляемые БИНС; f'_z – трехмерный вектор проекции внешней удельной силы, измеренный блоком акселерометров в приборных осях БИНС; ω'_z – трехмерный вектор измеренных проекций абсолютной угловой скорости приборного трехгранника БИНС в собственных осях. Параметры $\Delta f_z^0, v_z^0, \Gamma, \Theta$, считаются постоянными и обычно называются систематическими погрешностями.

Кроме описанных параметров в модель инструментальных погрешностей также добавляются шумовые (случайные) составляющие погрешностей. Их влияние на ошибки БИНС тоже может быть описано дисперсионным уравнением, однако в данной статье, посвященной анализу постоянных инструментальных ошибок, они не рассматриваются и в модель не включены.

Уравнения ошибок БИНС для горизонтальных каналов, соответствующие принятой модели инструментальных ошибок, в географическом трехграннике с относительно свободной ориентацией в азимуте, наиболее распространенной в околоземной инерциальной навигации, имеют следующий вид [1, 2, 4]:

$$\Delta \dot{r}_1 = \delta V_1 + \beta_3 V'_2,$$

$$\Delta \dot{r}_2 = \delta V_2 - \beta_3 V'_1,$$

$$\delta \dot{V}_1 = -g\alpha_2 + 2u'_3 \delta V_2 + V'_2 v_3 + \Delta f_1,$$

$$\delta \dot{V}_2 = g\alpha_1 - 2u'_3 \delta V_1 - V'_1 v_3 + \Delta f_2, \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}_1 &= -\frac{\delta V_2}{R_2} - u'_3 \frac{\Delta r_1}{R_1} + \omega'_3 \alpha_2 - u'_2 \beta_3 + v_1, \\ \dot{\alpha}_2 &= \frac{\delta V_1}{R_1} - u'_3 \frac{\Delta r_2}{R_2} - \omega'_3 \alpha_1 + u'_1 \beta_3 + v_2, \\ \dot{\beta}_3 &= \omega'_1 \frac{\Delta r_1}{R_1} + \omega'_2 \frac{\Delta r_2}{R_2} + \omega'_2 \alpha_1 - \omega'_1 \alpha_2 + v_3.\end{aligned}$$

Здесь V'_i – проекции скорости объекта на оси модельного географического трехгранника, u'_i – проекции угловой скорости Земли на оси этого трехгранника, g – номинальное значение модуля удельной силы тяжести, R_i – радиусы кривизны сечений поверхности земного эллипсоида, ω'_i – проекции абсолютной угловой скорости модельного географического трехгранника на собственные оси, $[v_1 \ v_2 \ v_3]^T = -C' v_z$, где v_z вычисляется по формуле (1.1), $[\Delta f_1 \ \Delta f_2 \ \Delta f_3]^T = C' \Delta f_z$, где Δf_z вычисляется по формуле (1.1), C' – вычисленная БИНС матрица ориентации приборного трехгранника БИНС относительно модельного географического:

$$C' = \begin{bmatrix} \sin \psi'_g \cos \vartheta' & \cos \psi'_g \sin \gamma' - \sin \psi'_g \sin \vartheta' \cos \gamma' & \cos \psi'_g \cos \gamma' + \sin \psi'_g \sin \vartheta' \\ \cos \psi'_g \cos \vartheta' & -\sin \psi'_g \sin \gamma' - \cos \psi'_g \sin \vartheta' \cos \gamma' & -\sin \psi'_g \cos \gamma' + \cos \psi'_g \sin \vartheta' \\ \sin \vartheta' & \cos \gamma' \cos \vartheta' & -\sin \gamma' \cos \vartheta' \end{bmatrix},$$

где $\psi'_g, \vartheta', \gamma'$ – вычисленные БИНС углы гироскопического курса, тангажа и крена.

Вектор состояния уравнений ошибок включает в себя переменные: $\Delta r_1, \Delta r_2$ – ошибки определения местоположения в горизонтальной плоскости в осях модельного географического трехгранника с относительно свободной ориентацией в азимуте [1, 2]; $\delta V_1, \delta V_2$ – динамические ошибки [1, 2] определения горизонтальных составляющих относительной скорости в этих же осях; α_1, α_2 – динамические ошибки построения приборной вертикали в тех же осях, β_3 – азимутальная кинематическая ошибка [1, 2].

Уравнения ошибок замыкаются при помощи формирующих уравнений для параметров модели (1.1) инструментальных погрешностей БИНС. Для постоянных параметров

$$\Delta f_{zi}^0 = 0, \dot{v}_{zi}^0 = 0, \dot{\Theta}_{ij} = 0, \dot{\Gamma}_{ij} = 0. \quad (1.3)$$

Ошибки вертикального канала БИНС в значительной мере определяются внешней корректирующей информацией о высоте и слабо взаимосвязаны с ошибками горизонтальных каналов. Поэтому ошибки вертикального канала БИНС и внешнего корректора принимаются здесь нулевыми.

При моделировании необходимо учесть, что инструментальные погрешности БИНС связаны с ошибками начальной выставки. В идеальном случае постоянных инструментальных погрешностей и отсутствии возмущений, действующих в процессе выставки, известны [4] следующие соотношения:

$$\alpha_1(0) = -\frac{\Delta f_2}{g}, \alpha_2(0) = \frac{\Delta f_1}{g}, \beta_3(0) = \frac{v_1}{u \cos \varphi} + \frac{\Delta f_1}{g} \operatorname{tg} \varphi, \quad (1.4)$$

где Δf_i – проекции приведенных смещений нулевых сигналов на оси географического трехгранника; v_1 – проекция приведенного дрейфа на первую ось географического трехгранника; φ – широта места выставки; u – модуль угловой скорости Земли; g – модуль силы тяжести. В начальный момент времени географический трехгранник с полусвободной азимутальной ориентацией обычно ориентирован по сторонам света. Таким образом, можно считать, что в формуле (1.4) индекс 1 – это направление на восток, 2 – направление на север в плоскости местного горизонта. Все приведенные ниже результаты получены для системы уравнений ошибок (1.2) с начальными условиями (1.4).

Следует отметить, что в реальности ошибки начальной выставки БИНС в азимуте (1.4) могут содержать существенные случайные составляющие, если длительность начальной выставки невелика (5–20 мин). Однако поскольку в приведенной выше постановке задачи стохастические составляющие погрешностей инерциальных датчиков не рассматриваются, они исключены и в начальных условиях (1.4). Вместе с тем описанная далее методика позволяет включить случайные ошибки начальной выставки в вектор состояния и исследовать задачу с их учетом. Такое исследование выходит за рамки поставленной задачи в настоящей работе.

2. Решение системы уравнений ошибок и гарантирующее множество. Система уравнений ошибок (1.2) с формирующими уравнениями (1.3) допускает следующее векторно-матричное представление:

$$\dot{x} = Ax, \quad (2.1)$$

где A – матрица системы, а фазовый вектор x разбивается на компоненты, соответствующие навигационным и инструментальным ошибкам:

$$x = [y^T, z^T]^T, \quad y = [\Delta r_1, \Delta r_2, \delta V_1, \delta V_2, \alpha_1, \alpha_2, \beta_3]^T, \quad z = [v_i, \Delta f_i, \Gamma_{ij}, \Theta_{ij}]^T.$$

Моделирование показывает, что для траекторий, выбранных для исследования, численное интегрирование системы (2.1) простейшим методом Эйлера

$$x_{i+1} = [E + A(t_i)\Delta t]x_i = \Phi_{i+1,i}x_i \quad (2.2)$$

оказывается достаточно точным для такта Δt порядка секунды и менее. Далее номер такта i удобно называть моментом времени.

С учетом нулевой правой части формирующих уравнений для инструментальных погрешностей переходная матрица системы (2.2) равна

$$\Phi_{i+1,i} = \begin{bmatrix} \Phi_{i+1,i}^1 & \Phi_{i+1,i}^2 \\ 0 & E \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

Применяя две последовательные итерации в системе (2.2), можно получить рекуррентную формулу для элементов переходной матрицы:

$$\Phi_{i,i-2}^1 = \Phi_{i,i-1}^1 \Phi_{i-1,i-2}^1, \quad \Phi_{i,i-2}^2 = \Phi_{i,i-1}^1 \Phi_{i-1,i-2}^2 + \Phi_{i,i-1}^2,$$

позволяющую вычислить значение переходной матрицы $\Phi_{i,0}$ на любом шаге и связать текущее значение фазового вектора x_i с начальным значением x_0 :

$$x_i = \Phi_{i,0}x_0 = \begin{bmatrix} \Phi_i^1 & \Phi_i^2 \\ 0 & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}.$$

Начальное значение фазового вектора (1.2) связано с инструментальными погрешностями формулами (1.4), что допускает матричную запись:

$$y_0 = Bz_0 = \begin{bmatrix} \underbrace{0}_{4 \times 6} & \underbrace{0}_{4 \times 15} \\ \underbrace{B_1}_{3 \times 6} & \underbrace{0}_{3 \times 15} \end{bmatrix} z_0,$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -c'_{21}/g & -c'_{22}/g & -c'_{23}/g \\ 0 & 0 & 0 & c'_{11}/g & c'_{12}/g & c'_{13}/g \\ \frac{c'_{11}}{u \cos \varphi} & \frac{c'_{12}}{u \cos \varphi} & \frac{c'_{13}}{u \cos \varphi} & \frac{c'_{11} \operatorname{tg} \varphi}{g} & \frac{c'_{12} \operatorname{tg} \varphi}{g} & \frac{c'_{13} \operatorname{tg} \varphi}{g} \end{bmatrix}.$$

Таким образом, в предположениях (1.4) текущее значение фазового вектора системы уравнений ошибок (1.2) связано с вектором инструментальных погрешностей формулой

$$y_i = (\Phi_i^2 + \Phi_i^1 B)z_0. \quad (2.4)$$

Выражение (2.4) задает линейное отображение из пространства инструментальных погрешностей в фазовое пространство системы уравнений ошибок. Первые два уравнения образуют подсистему:

$$\Delta r_i = \begin{bmatrix} \Delta r_{1i} \\ \Delta r_{2i} \end{bmatrix} = \underbrace{F_i}_{2 \times 21} z_0, \quad (2.5)$$

связывающую позиционные ошибки с инструментальными погрешностями.

Линейное преобразование (2.5) отображает 21-мерное пространство инструментальных ошибок z_0 в двумерное пространство позиционных погрешностей. Поскольку $\dim \Delta r_i = 2 < \dim z_0$ то для любого i отображение (2.5) имеет ненулевое ядро $z_i^- = \ker F_i$, причем $\dim z_i^- \geq 19$, и равенство достигается при $\text{rank } F_i = 2$ [5]. Итак, для любого i существует линейное подпространство $z_i^- \in z_0$: $\Delta r_i = F_i z_i^- \equiv 0$. Другими словами, для любого набора инструментальных погрешностей (сколь угодно больших!) из z_i^- позиционные погрешности будут тождественно нулевыми. Пространство z_0 раскладывается в прямую сумму $z_0 = z_i^- \oplus z_i^+$, где z_i^+ — линейное подпространство z_0 , отображаемое в ненулевые позиционные погрешности. В ситуации общего положения $\text{rank } F_i = 2$ и $\dim z_i^+ = 2$.

Важно отметить, что установленный результат сохраняется при любой модификации модели инструментальных погрешностей (1.1), если $\dim z_0 > 2$. При этом случай двух и менее инструментальных погрешностей $\dim z_0 \leq 2$ не представляет практического интереса, поскольку навигационные системы имеют две тройки датчиков, каждый из которых может иметь погрешности измерений. При модификации модели (1.1) $\dim z_0$ изменится, однако представление $z_0 = z_i^- \oplus z_i^+$ и равенство $\dim z_i^+ = 2$ останутся верными. Например, для редуцированной модели, в которой учитываются только смещения нулевых сигналов, т.е. $\Gamma_{ij} = \Theta_{ij} = 0$:

$$z_0 = \left[v_i^0, \Delta f_i^0 \right]^T, \dim z_0 = 6.$$

Известно, что влияние некоторых групп инструментальных погрешностей зависит от траектории. Например, погрешности масштабных коэффициентов датчиков практически не влияют на ошибки БИНС на неподвижном или малоподвижном относительно Земли основании. Это часто используется для редукции (упрощения) модели инструментальных погрешностей, когда из вектора состояния исключаются второстепенные компоненты. Иногда складывается противоположная ситуация, когда модель приходится расширять. В качестве примера можно привести дрейфы микромеханических ДУС, зависящие от перегрузки. Поэтому далее считается, что $\dim z_0 = m$, где число m зависит от принятой модели инструментальных погрешностей.

Погрешность положения будем характеризовать евклидовой нормой:

$$\|\Delta r_i\| = \sqrt{\Delta r_{1i}^2 + \Delta r_{2i}^2},$$

выражающей круговую ошибку. Пусть R_i — допуск на круговую ошибку на момент времени i (в частности, для фиксированного допуска $R_i = R = \text{const}$). Кругу $\|\Delta r_i\| = R_i$ в пространстве координат соответствует некоторый эллипс в плоскости z_i^+ пространства инструментальных погрешностей, что следует из линейности отображения (2.5). Если отображение (2.5) имеет неполный ранг, то эллипс вырождается в отрезок или пустое множество, но эта ситуация имеет практически нулевую вероятность и не будет рассматриваться.

Итак, для любого i и R_i прообраз множества $\|\Delta r_i\| \leq R_i$ в пространстве инструментальных ошибок z_0 является внутренностью некоторого эллиптического цилиндра Z_i с двумерным поперечным сечением и $m - 2$ мерной осью. Заметим, что матрица преобразования (2.5) зависит от i и направления оси цилиндра и главных полуосей эллипса в сечении будут зависеть от i . Область, гарантирующая нахождение круговой ошибки в допуске на всем интервале времени $i = 1, n$, представляет собой пересечение Z цилиндров Z_i , построенных для всех моментов времени i :

$$Z = \bigcap_{i=1}^n Z_i. \quad (2.6)$$

3. Особые направления в пространстве инструментальных ошибок и гарантирующее множество. Инструментальные погрешности и навигационные ошибки БИНС имеют существенно разные порядки величин. Поэтому для более удобного представления установленных выше результатов и дальнейшей работы с ними удобно перейти к безразмерным величинам, имеющим один порядок. Зафиксируем момент времени i , допуск R и введем масштабы линейного размера R^* и времени T^* :

$$R^* = a, T^* = \sqrt{\frac{a}{g_e}},$$

где a — экваториальный радиус Земли; g_e — значение удельной силы тяжести на экваторе. Заметим, что величина T^* отличается от периода Шулера — известной постоянной теории инерциальной навигации — множителем 2π , не существенным с точки зрения масштабирования.

Безразмерные инструментальные погрешности κ запишем как

$$\kappa = Dz_0, D = \text{diag} \left[T^*, T^*, T^*, \frac{T^{*2}}{R^*}, \frac{T^{*2}}{R^*}, \frac{T^{*2}}{R^*}, 1, \dots, 1 \right]. \quad (3.1)$$

Это масштабирование позволяет добиться совпадения порядков всех инструментальных погрешностей. Введем также безразмерные позиционные погрешности

$$\Delta \rho_i = \frac{\Delta r_i}{R^*} \quad (3.2)$$

в радианной мере. Из формул (2.5), (3.1) и (3.2) следует, что

$$\Delta \rho_i = \frac{1}{R^*} F_i D^{-1} \kappa = N_i \kappa,$$

а условие пребывания погрешностей в допуске записывается в виде

$$\|\Delta \rho_i\| \leq \frac{R}{R^*} = \rho^*.$$

Из линейной алгебры [5] известно, что любая действительная матрица A представима в виде сингулярного разложения

$$\underset{m \times n}{A} = \underset{m \times m}{U} \underset{m \times n}{S} \underset{n \times n}{V^T}, \quad (3.3)$$

где U и V – ортогональные матрицы (квадратные матрицы, удовлетворяющие свойству $U^T U = E, V^T V = E$), не изменяющие норму векторов, а S – матрица, у которой на главной диагонали базисного минора расположены положительные величины, называемые сингулярными числами. За счет подобающей нумерации базисных векторов сингулярные числа на диагонали выстраиваются в порядке убывания.

Столбцы ортогональных матриц U и V образуют ортонормированные базисы $\{q_k\}$ и $\{e_k\}$ в пространствах R^m и R^n соответственно:

$$U = [q_1, \dots, q_m], V = [e_1, \dots, e_n],$$

причем базисные векторы связаны формулами

$$Ae_k = \begin{cases} s_k q_k, & k \leq r, r \leq \min\{m, n\}, \\ 0, & k > r. \end{cases} \quad (3.4)$$

Этому отвечает следующая матрица S в преобразовании (3.3):

$$S = \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \Sigma = \text{diag}[s_1, \dots, s_r], s_1 \geq \dots \geq s_r,$$

где нулями в матрице S обозначены блоки соответствующей размерности. Для матрицы максимального ранга нулевые блоки частично или полностью отсутствуют.

Сингулярные числа характеризуют минимальные и максимальные растяжения, осуществляемые оператором A . Покажем это. Разложим вектор x по базису e_k : $x = x^1 e_1 + \dots + x^n e_n$ и с учетом (3.4) получим

$$Ax = A \sum_{k=1}^n x^k e_k = \sum_{k=1}^r x^k s_k q_k.$$

Поскольку базис $\{q_k\}$ ортонормированный, имеем

$$Ax^2 = \sum_{k=1}^r (x^k)^2 s_k^2. \quad (3.5)$$

Находя минимум (3.5) на сфере $x^2 = (x^1)^2 + \dots + (x^n)^2 = 1$, получаем, что максимальное сингулярное число s_1 характеризует максимальное растяжение оператора A :

$$\max_{x=1} Ax = s_1.$$

Можно показать [5], что базис $\{e_k\}$ образован собственными векторами матрицы $A^T A$:

$$A^T A e_k = s_k^2 e_k,$$

где s_k^2 – квадраты сингулярных чисел.

Применим установленные результаты к анализу максимальной круговой ошибки положения. Для этой задачи получим $A = N_i$ и

$$N_i = U_i S_i V_i^T, \quad (3.6)$$

где

$$U_i = \begin{bmatrix} u_{11}^i & u_{12}^i \\ u_{21}^i & u_{22}^i \end{bmatrix}, \quad \underline{S}_i = \begin{bmatrix} s_1^i & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & s_2^i & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{V}_i = [v_1, \dots, v_m].$$

Ввиду ортогональности матрицы U_i условие нахождения позиционных погрешностей в допуске $\|\Delta \rho_i\| \leq R/R^*$ эквивалентно условию $\|U_i^T \Delta \rho_i\| \leq R/R^*$. Границей прообраза множества $\|U_i^T \Delta \rho_i\| = \|S_i V_i^T \kappa_i\| = \rho^*$ в пространстве инструментальных ошибок κ будет цилиндр:

$$\kappa_i^* = \rho^* \left(\frac{v_1^i}{s_1^i} \cos p + \frac{v_2^i}{s_2^i} \sin p + C_3 v_3^i + \dots + C_m v_m^i \right),$$

где p, C_i – произвольные параметры, причем линейное пространство, отвечающее всевозможным комбинациям $C_3 v_3^i + \dots + C_m v_m^i$, определяет ось цилиндра размерности $m - 2$. В этом нетрудно убедиться подстановкой κ_i в $S_i V_i^T \kappa_i$. Векторы $\{v_i\}$, из которых построены столбцы матрицы V_i , образуют ортонормированный базис, поэтому

$$\|S_i V_i^T \kappa_i^*\| = \rho^* \|v_1 \cos p + v_2 \sin p\| = \rho^*.$$

Итак, построен конструктивный способ нахождения оси цилиндра, его сечения и направления v_1 в пространстве κ , соответствующего максимальной круговой ошибке. Матрица N_i находится численно из приведенных выше формул, после чего для нее определяются сингулярные числа и особые направления. Численные алгоритмы сингулярного разложения реализованы во многих вычислительных пакетах. Особенностью задачи является большая размерность пространства инструментальных погрешностей, затрудняющая визуализацию результатов. Гарантирующая область в пространстве инструментальных ошибок допускает наглядное представление только для трехмерной модели инструментальных погрешностей.

4. Пример. Приведем соответствующую иллюстрацию. Редуцируем модель инструментальных погрешностей (1.1), оставив в ней только три дрейфа гироскопов:

$$\Delta f_z = \Delta f_z' + \Gamma f = 0, \Gamma = 0, \Delta f_z^0 = 0, v_z = v_z^0 = \text{const}.$$

Моделирование на траектории, зарегистрированной для маневренного самолета, приводит к гарантирующему множеству в пространстве дрейфов, представленному на рис. 1.

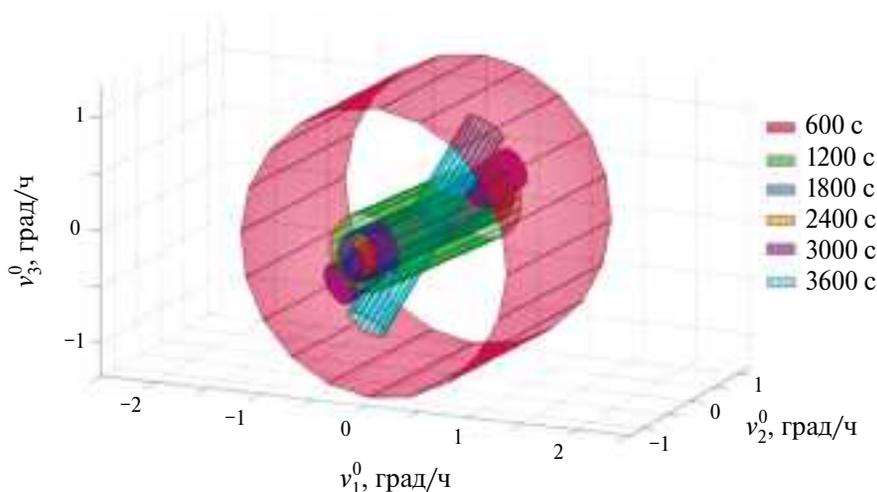


Рис. 1. Гарантирующая область в пространстве дрейфов, образованная пересечением цилиндров.

Из рис. 1 видно, что с ростом времени характерный размер поперечного сечения цилиндра уменьшается, а ось меняет направление. Эволюция цилиндра существенно зависит от траектории движения.

Приведенная картина качественно сохраняется для любой размерности пространства инструментальных ошибок, однако при размерности больше трех уже не допускает столь наглядной визуализации. Соответствующие цилиндры строятся численно, а их пересечение может быть найдено, например, методом Монте-Карло и затем спроектировано на плоскости пространства инструментальных ошибок (рис. 2).

Однако при большой размерности пространства инструментальных ошибок число таких плоскостей также оказывается достаточно большим, и формирование массивов точек, и проверка попадания точек в гарантирующее множество требуют значительных вычислительных ресурсов. Таким образом, возможно практически точное построение гарантирующей области численными методами. Однако техническая реализация вычислений и визуализация результатов при большой размерности модели инструментальных погрешностей является довольно сложной задачей.

Один из способов обойти описанные сложности состоит в нахождении более простого подмножества гарантирующей области. Например, в пересечение цилиндров вписывается некоторый шар. Однако при этом надо иметь в виду, что объем отсекаемой области в многомерном случае может быть существенно больше объема шара [6].

При большой размерности соотношения объемов геометрических фигур плохо соотносятся с интуитивными представлениями, известными для трехмерного и плоского случаев. Например, объем шара с радиусом 0.5, вписанного в единичный n – мерный куб (для которого объем равен единице, а диагональ равна \sqrt{n}), будет

$$V = \frac{\pi^{n/2}}{(n/2)\Gamma(n/2)} 2^{-n},$$

что для $n = 21$ составляет всего $6.65 \cdot 10^{-9}$, и, таким образом, вписанный шар занимает лишь малую часть объема куба. Аналогичный эффект наблюдается и при вписывании шара в гарантирующее множество, образованное пересечением цилиндров.

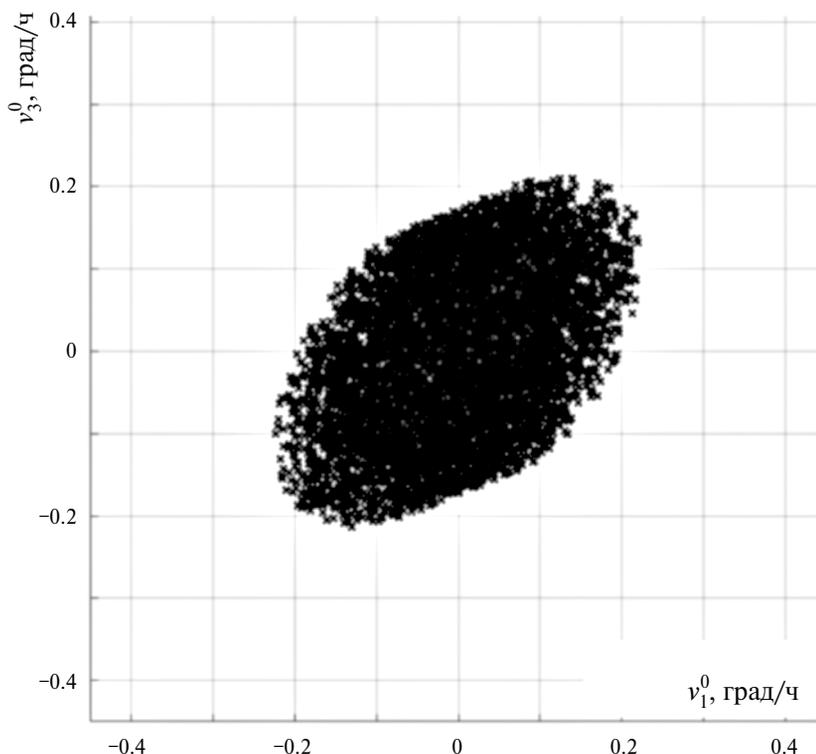


Рис. 2. Проекция пересечения цилиндров на плоскость $v_{z_1}^0, v_{z_3}^0$.

Тем не менее оценим радиус сферы и вычислим точку на сфере, в которой она касается гарантирующей области и максимизирует круговую позиционную погрешность. Для оценки была выбрана одна из траекторий маневренного самолета. Вычисления показывают, что безразмерный радиус сферы равен 1.1×10^{-5} , а точка, максимизирующая круговую ошибку на момент $t = 3600$ с, после возвращения к размерным величинам приведена в табл. 1. В ней использованы внесистемные единицы, принятые в навигационных задачах, поскольку те же величины в единицах СИ малы и потому не наглядны. Тот же набор ошибок, но с обращенными знаками, также максимизирует ошибку положения, однако ее знак изменится на противоположный.

Из таблицы следует важный вывод о том, что наихудший набор инструментальных погрешностей, приводящий к выходу на границу допуска, состоит из достаточно малых инструментальных ошибок. В частности, этим могут объясняться наблюдаемые на практике эпизодические выходы навигационных погрешностей за допуск на отдельных траекториях.

На Рис. 3 представлены результаты моделирования, подтверждающие, что к моменту $t = 3600$ с круговая позиционная погрешность для представленных в табл. 1 инструментальных ошибок выходит на границу допуска, принятого равным 2 км.

Качественно картина сохраняется и для других похожих траекторий. Радиус сферы может меняться в несколько раз, однако его порядок не меняется. В табл. 2 приведены результаты вычислений для нескольких траекторий.

Таблица 1. Наихудшее сочетание инструментальных погрешностей для расчетной траектории

$v_{z_1}^0 = -3.4 \times 10^{-4} / \text{ч}$	$\Theta_{12} = 9.4 \times 10^{-2}''$	$\Theta_{33} = 4.5 \times 10^{-6}$
$v_{z_2}^0 = -6.1 \times 10^{-6} / \text{ч}$	$\Theta_{13} = -7.6 \times 10^{-1}''$	$\Gamma_{11} = 1.7 \times 10^{-8}$
$v_{z_3}^0 = 3.6 \times 10^4 / \text{ч}$	$\Theta_{21} = 6.2 \times 10^{-2}''$	$\Gamma_{21} = -1.6 \times 10^{-3}''$
$\Delta f_{z_1}^0 = 4.1 \times 10^{-6} \text{ М/с}^2$	$\Theta_{22} = -4.6 \times 10^{-6}$	$\Gamma_{22} = -2.8 \times 10^{-8}$
$\Delta f_{z_2}^0 = -6.2 \times 10^{-7} \text{ М/с}^2$	$\Theta_{23} = -1.5 \times 10^{-1}''$	$\Gamma_{23} = -7.5 \times 10^{-5}''$
$\Delta f_{z_3}^0 = 3.2 \times 10^{-6} \text{ М/с}^2$	$\Theta_{31} = -7.0 \times 10^{-1}''$	$\Gamma_{31} = 6.5 \times 10^{-3}''$
$\Theta_{11} = -7.7 \times 10^{-6}$	$\Theta_{32} = -8.7 \times 10^{-2}''$	$\Gamma_{33} = 1.8 \times 10^{-9}$

Таблица 2. Радиусы безразмерной сферы для 10 реализаций

Номер реализации	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Радиус $\cdot 10^{-5}$	1.5	3.2	1.2	2.8	4.1	1.4	2.2	1.8	1.6	3.6

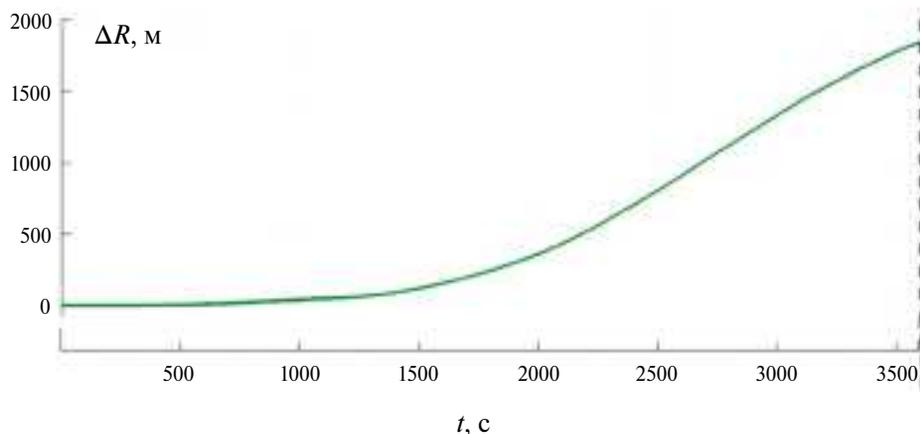


Рис. 3. Зависимость круговой позиционной ошибки от времени.

Гарантирующие области для инструментальных погрешностей по множеству реализаций представляют собой пересечение всех цилиндров, построенных для каждой из реализаций и для каждого момента времени. Однако эта вычислительная процедура требует больших ресурсов, и для ее упрощения цилиндры могут строиться с достаточно большим тактом, например порядка нескольких минут.

Отметим также, что задача допускает следующие модификации. В настоящей работе был изучен круговой допуск на позиционную погрешность. Вместо него можно рассматривать другие формы допустимой области в пространстве позиционных ошибок, например, задавать допуски на каждую погрешность по широте и долготе. В этом случае ошибки координат будут локализованы не в круге, а в квадрате. Те же рассуждения, что привели к области в пространстве инструментальных погрешностей в виде пересечения эллиптических цилиндров привели бы к пересечению цилиндров с сечениями в форме параллелограммов. Это следует из того, что образом квадрата при линейном отображении служит параллелограмм.

Кроме того, в пересечение допустимых областей в пространстве инструментальных погрешностей можно вписывать не шар, а куб или прямоугольный параллелепипед. Это делает допуски на погрешности отдельных датчиков независимыми и одинаковыми. Поэтому с практической точки зрения такой вариант представляет интерес. В этом случае задача сводится к линейной оптимизации с ограничениями и является предметом дальнейших исследований. Отсекаемый объем допустимой области при этом может оказаться как меньше, так и больше, чем для шара.

Также можно добавить допуски на ошибки скорости и ориентации, хотя они и взаимосвязаны по порядкам величин с позиционными погрешностями. Однако это существенно усложнит построение гарантирующей области, поскольку каждый допуск на навигационные ошибки породит свой прообраз в пространстве инструментальных погрешностей. Построение гарантирующей области в этом случае ищется как пересечение всех прообразов, что с учетом большой размерности задачи и проблем с визуализацией результатов существенно повышает сложность.

Заключение. Разработан метод построения области в пространстве постоянных параметров модели инструментальных погрешностей БИНС, гарантирующей нахождение позиционных ошибок в круговом допуске для любой заданной траектории движения. Установлено, что для любого момента времени кругу на горизонтальной плоскости с радиусом, равным допуску на позиционные погрешности, соответствует некоторый эллиптический цилиндр в пространстве инструментальных ошибок. Ось цилиндра образована набором инструментальных ошибок, не влияющих на позиционные погрешности для данного момента времени. Поперечное сечение цилиндра, представляющее собой двумерный эллипс, состоит из направлений в пространстве инструментальных ошибок, влияющих на позиционные ошибки. Одно из направлений на эллипсе максимизирует позиционные погрешности.

Для построения цилиндра используется сингулярное разложение линейного оператора, отображающего инструментальные ошибки на позиционные погрешности, которое строится по переходной матрице системы уравнений ошибок. Гарантирующая область представляет собой пересечение всех цилиндров, построенных для всех моментов времени, предшествующих рассматриваемому. Это множество имеет достаточно сложную форму, и ввиду большой размерности пространства инструментальных погрешностей существуют определенные проблемы с его визуализацией. Вписывание сферы в пересечение цилиндров приводит к потере значительной части гарантирующей области, но позволяет найти наихудшие направления в пространстве инструментальных погрешностей, отвечающие точке касания сферы и гарантирующей области, максимизирующие позиционные ошибки БИНС.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Голован А.А., Парусников Н.А. Математические основы навигационных систем. Ч. I. Математические модели инерциальной навигации. 3-е изд., испр. и доп. М.: МАКС Пресс, 2011. 136 с.
2. Вавилова Н.Б., Голован А.А., Парусников Н.А. Математические основы инерциальных навигационных систем. М.: Изд-во МГУ, 2020. 164 с.
3. Беллман Р. Процессы регулирования с адаптацией. М.: Наука. 1964. 360 с.
4. Голован А.А., Парусников Н.А. Математические основы навигационных систем. Ч. II. Приложения методов оптимального оценивания к задачам навигации. 2-е изд., испр. и доп. М.: МАКС Пресс, 2012. 172 с.
5. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М.: Книга по требованию, 2012. 667 с.
6. Зорич В.А. Многомерная геометрия, функции очень многих переменных и вероятность // Теория вероятностей и ее применения. 2014. Т. 59. Вып. 3. С. 436–451.