

## ПОСТРОЕНИЕ И СТАБИЛИЗАЦИЯ ТРАЕКТОРИЙ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ДВИЖЕНИЯ КВАДРОКОПТЕРА

© 2025 г. А. Е. Голубев<sup>а,\*\*</sup>, А. А. Хорошева<sup>б,\*\*\*</sup>, С. А. Васенин<sup>б,\*</sup>

<sup>а</sup>МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

<sup>б</sup>МФТИ, Москва, Россия

\*e-mail: stepan\_vasenin@mail.ru

\*\*e-mail: v-argolu@hotmail.com

\*\*\*e-mail: khoroshevaann@gmail.com

Поступила в редакцию 16.11.2024 г.

После доработки 08.01.2025 г.

Принята к публикации 24.02.2025 г.

Рассматривается задача стабилизации программных траекторий пространственного движения квадрокоптера как твердого тела. Для синтеза стабилизирующего управления используется метод линеаризации обратной связью по состоянию. Программная траектория строится для трех координат пространственного движения центра масс квадрокоптера и его вращательного движения по углу рысканья на основе полиномов третьего порядка, зависящих от времени, с учетом ограничений на координаты, скорости и ускорения в течение всего процесса движения. Работоспособность предложенного закона управления проверена при помощи численного моделирования и экспериментально на квадрокоптере Parrot Mambo с помощью пакета MATLAB/Simulink.

*Ключевые слова:* линеаризация обратной связью по состоянию, программная траектория, стабилизация, управление механическими системами, квадрокоптеры

DOI: 10.31857/S0002338825020083, EDN: ASFXJL

## QUADCOPTER SPATIAL MOTION TRAJECTORIES CONSTRUCTION AND TRACKING

A. E. Golubev<sup>а,\*</sup>, A. A. Khorosheva<sup>б,\*\*</sup>, S. A. Vasenin<sup>б,\*\*\*</sup>

<sup>а</sup>Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

<sup>б</sup>Moscow Institute of Physics and Technology, Moscow, Russia

\*e-mail: v-argolu@hotmail.com

\*\*e-mail: khoroshevaann@gmail.com

\*\*\*e-mail: stepan\_vasenin@mail.ru

The problem of reference trajectories tracking for spatial motion of a quadcopter as a rigid body is considered. The state feedback linearization approach is used for synthesis of stabilizing control. The reference trajectory is constructed for three coordinates of the spatial motion of the quadcopter's center of mass and its rotational motion along the yaw angle based on third-order polynomials depending on time, taking into account constraints on the coordinates, velocities and accelerations during the entire process of motion. The performance of the proposed control law is verified numerically and experimentally on the Parrot Mambo quadcopter model using the MATLAB/Simulink software.

*Keywords:* state feedback linearization, reference trajectory tracking, control of mechanical systems, quadcopter control

**Введение.** В настоящее время большое количество публикаций (см., например, [1–25]) посвящено исследованиям в области разработки алгоритмов автоматического управления движением квадрокоптеров. Для большинства задач необходима автономность движения летательного аппарата, и требуется реализация заданных траекторий движения, например при картографировании, наблюдении за объектом и т.д.

Известен ряд подходов, применяемых для решения задач автоматического управления движением квадрокоптеров. Наиболее популярны методы, основанные на использовании линеаризации модели движения: PD (пропорционально-дифференцирующий), PID (пропорционально-интегрально-дифференцирующий) [25], LQG (линейно-квадратичный гауссовский) [20], LQR (линейно-квадратичный) [8, 22] и  $H_\infty$ -регуляторы. В [20] анализируются методы оптимального управления, которые основаны на LQG-регуляторе.

Среди нелинейных методов управления движением квадрокоптеров наиболее известны линеаризация обратной связью [5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23], бэкстеппинг [1, 4, 6, 16] и методы на основе прогнозирующей модели [3, 14, 18]. Еще одним подходом к решению задач управления движением квадрокоптеров является применение скользящих режимов [2, 4, 16], которые позволяют осуществлять синтез управляющих воздействий в условиях неточностей моделирования.

В данной работе исследуется задача построения и стабилизации программных движений квадрокоптера в пространстве на базе нелинейной модели движения. Для синтеза стабилизирующих законов управления используется метод линеаризации обратной связью по состоянию. Программная траектория аппарата задается для трех координат поступательного движения центра масс квадрокоптера и его вращательного движения по углу рысканья при помощи полиномов третьего порядка от независимой переменной и строится с учетом допустимых максимальных по модулю значений соответствующих координат, скоростей и ускорений.

**1. Постановка задачи.** Рассматривается задача управления пространственным движением квадрокоптера. Динамика поступательного и вращательного движения летательного аппарата как твердого тела имеет следующий вид [10, 23]:

$$\ddot{\xi} = \frac{F}{m} \begin{pmatrix} \sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi \sin \theta \\ \cos \varphi \sin \psi \sin \theta - \cos \psi \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad (1.1)$$

$$\ddot{z} = -g + \frac{F}{m} \cos \varphi \cos \theta, \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= C \omega, \\ I \dot{\omega} &= M - \omega \times I \omega, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где  $\xi = (x, y)^T$  и  $z$  – координаты центра масс квадрокоптера в инерциальной системе координат  $Oxyz$ ;  $\varphi, \theta, \psi$  – углы крена, тангажа и рысканья [10] соответственно,  $\eta = (\varphi, \theta, \psi)^T$ ;  $m$  – масса квадрокоптера;  $g$  – ускорение свободного падения;  $F$  – сила тяги, создаваемая винтами аппарата;  $M = (M_x, M_y, M_z)^T$  – вектор крутящих моментов относительно осей связанной неинерциальной системы координат  $O_B x_B y_B z_B$ ;  $\omega = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)^T$  – вектор угловых скоростей в неинерциальной системе координат  $O_B x_B y_B z_B$ ;  $I = \text{diag}(I_x, I_y, I_z)$  – диагональная матрица моментов инерции относительно осей неинерциальной системы координат  $O_B x_B y_B z_B$ ; знак умножения  $\times$  использован для обозначения векторного произведения соответствующих векторов;

$$C(\eta) = \begin{pmatrix} 1 & \sin \varphi \tan \theta & \cos \varphi \tan \theta \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi \sec \theta & \cos \varphi \sec \theta \end{pmatrix}.$$

Отметим, что используемые в работе угловые координаты  $\eta = (\varphi, \theta, \psi)^T$  отвечают следующей матрице перехода из инерциальной системы координат  $Oxyz$  в неинерциальную связанную с аппаратом систему координат  $O_B x_B y_B z_B$  [10]:

$$\begin{aligned} R(\eta) &= \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \theta & \cos \psi \sin \varphi \sin \theta - \cos \varphi \sin \psi & \sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi \sin \theta \\ \cos \theta \sin \psi & \cos \varphi \cos \psi + \sin \varphi \sin \psi \sin \theta & \cos \varphi \sin \psi \sin \theta - \cos \psi \sin \varphi \\ -\sin \theta & \cos \theta \sin \varphi & \cos \varphi \cos \theta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Будем считать, что сила тяги  $F$  и вектор крутящих моментов  $M$  являются функциями угловых скоростей вращения винтов  $\omega_i, i = 1, 4$ , и имеют следующий вид [10, 23]:

$$\begin{pmatrix} F \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & l & 0 & -l \\ -l & 0 & l & 0 \\ b/k & -b/k & b/k & -b/k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1^2 \\ \omega_2^2 \\ \omega_3^2 \\ \omega_4^2 \end{pmatrix},$$

где  $k$  – положительная постоянная;  $b$  – коэффициент аэродинамического сопротивления вращению винта;  $l$  – расстояние от центра масс квадрокоптера до оси вращения винтов аппарата. Моменты инерции вращения винтов полагаются равными нулю.

В качестве управляющих воздействий далее рассмотрим  $u = (F, M_x, M_y, M_z)^T$ . Введем новые управляющие функции, зависящие от моментов:

$$(\tilde{M}_x, \tilde{M}_y, \tilde{M}_z)^T = \tilde{M} = \dot{C}\omega + CI^{-1}(M - \omega \times I\omega),$$

и перепишем уравнения вращательного движения (1.3) аппарата в следующем виде:

$$\dot{\eta} = \tilde{M}. \quad (1.4)$$

Для удобства также используем обозначения:  $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z, x_4 = \psi$ . Покажем, что задача построения и стабилизации произвольной 12-мерной программной траектории  $\xi = \xi_r(t), z = z_r(t), \eta = \eta_r(t), t \geq 0$ , пространственного движения квадрокоптера может быть сведена к задаче построения и стабилизации соответствующей 4-мерной программной траектории  $x_i = x_{ir}(t), i = 1, 4, t \geq 0$ , по переменным  $x_i$ .

**2. Уравнения динамики отслеживания программных траекторий движения квадрокоптера.** Зафиксируем сначала произвольную программную траекторию  $\xi = (x_1, x_2)^T = (x_{1r}(t), x_{2r}(t))^T$ ,  $z = x_3 = x_{3r}(t), \psi = x_4 = x_{4r}(t), t \geq 0$ , движения центра масс аппарата в горизонтальной и вертикальной плоскостях, а также вращательного движения по углу рысканья [21]. Определим переменные  $\chi_i = x_i - x_{ir}(t), i = 1, 4$ , соответствующих ошибок отслеживания программных траекторий.

Покажем, что система, описывающая динамику переменных  $\chi_i, i = \overline{1, 4}$ , ошибок отслеживания программных траекторий, может быть представлена как совокупность подсистем:

$$\chi_i^{(r_i)} = v_i, i = \overline{1, 4}, \quad (2.1)$$

где  $r_i$  – порядок производной по времени,  $r_1 = r_2 = 4, r_3 = r_4 = 2, v = (v_1, v_2, v_3, v_4)^T$  – вектор вспомогательных управляющих переменных, определяемых далее.

В силу соотношений (1.2) и (1.4) динамика ошибок  $\chi_3$  и  $\chi_4$  запишется как

$$\ddot{\chi}_3 = v_3, \quad (2.2)$$

$$\ddot{\chi}_4 = v_4, \quad (2.3)$$

где

$$v_3 = -g + \frac{F}{m} \cos \varphi \cos \theta - \ddot{x}_{3r}(t), v_4 = \tilde{M}_z - \ddot{x}_{4r}(t). \quad (2.4)$$

Тогда управления  $F$  и  $\tilde{M}_z$  можно выразить через переменные  $v_3, v_4$  следующим образом:

$$F = \frac{m}{\cos \varphi \cos \theta} (g + \ddot{x}_{3r}(t) + v_3), \quad (2.5)$$

$$\tilde{M}_z = v_4 + \ddot{x}_{4r}(t). \quad (2.6)$$

Подставив выражение для силы тяги (2.5) в соотношение (1.1), получим уравнение ошибки отслеживания траектории движения центра масс аппарата в горизонтальной плоскости:

$$\begin{pmatrix} \ddot{\chi}_1 \\ \ddot{\chi}_2 \end{pmatrix} = (g + \ddot{x}_{3r}(t) + v_3) \begin{pmatrix} \tan \varphi \sin \psi \sec \theta + \cos \psi \tan \theta \\ \sin \psi \tan \theta - \cos \psi \tan \varphi \sec \theta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \ddot{x}_{1r}(t) \\ \ddot{x}_{2r}(t) \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

Тогда, дважды продифференцировав по времени динамическую систему (2.7), с учетом формул (1.4), (2.6) получим

$$\begin{pmatrix} \chi_1^{(4)} \\ \chi_2^{(4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

где

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x_{1r}^{(4)}(t) \\ x_{2r}^{(4)}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} + (g + \ddot{x}_{3r}(t) + v_3) \sec \theta \begin{pmatrix} \sin \psi & \cos \psi \\ -\cos \psi & \sin \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sec^2 \varphi & \tan \varphi \tan \theta \\ 0 & \sec \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{M}_x \\ \tilde{M}_y \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

– вид функций  $f_i$ ,  $i = 1, 2$ , указан в Приложении.

Отметим, что, в частности, при  $x_{ir}(t) \equiv 0$ ,  $i = 1, 4$ , соотношения

$$\chi_1 = x, \dot{\chi}_1 = \dot{x}, \ddot{\chi}_1 = \ddot{x} = \phi_1(\varphi, \theta, \psi, v_3), \ddot{\chi}_1 = \ddot{x} = \phi_2(\varphi, \dot{\varphi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}, v_3, \dot{v}_3), \quad (2.10)$$

$$\chi_2 = y, \dot{\chi}_2 = \dot{y}, \ddot{\chi}_2 = \ddot{y} = \phi_3(\varphi, \theta, \psi, v_3), \ddot{\chi}_2 = \ddot{y} = \phi_4(\varphi, \dot{\varphi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}, v_3, \dot{v}_3),$$

$$\chi_3 = z, \dot{\chi}_3 = \dot{z}, \chi_4 = \psi, \dot{\chi}_4 = \dot{\psi}, v_3 = v_3, \dot{v}_3 = \dot{v}_3,$$

где функции  $\phi_1, \phi_3$  задаются правыми частями равенств (2.7), а функции  $\phi_2, \phi_4$  представляют собой результат дифференцирования выражения (2.7) по времени, можно рассмотреть как невырожденную замену переменных состояния динамической системы (1.1), (1.2), (1.4), дополненной равенствами  $\ddot{z} = \dot{v}_3$ ,  $z^{(4)} = \dot{v}_3$ . Якобиан замены переменных (2.10) имеет вид

$$J = -(g + v_3) \frac{1}{\cos^4 \varphi} \frac{1}{\cos^5 \theta}.$$

Таким образом, при  $v_3 \neq -g$  условие  $J \neq 0$  выполняется во всех точках множества:

$$\mathbb{R}_-^{14} = \{x, y, z, \varphi, \theta, \psi, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{\varphi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}, v_3, \dot{v}_3\} \setminus \left\{ \varphi = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{\pi}{2} + \pi m, m \in \mathbb{Z} \right\},$$

соотношения (2.10) задают диффеоморфизм из  $\mathbb{R}_-^{14}$  в  $\mathbb{R}^{14} = \{x, y, z, \psi, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{\psi}, \ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}, \dot{v}_3, \dot{v}_3\}$  и динамическая система (1.1), (1.2), (1.4), формально дополненная равенствами  $\ddot{z} = \dot{v}_3$ ,  $z^{(4)} = \dot{v}_3$ , эквивалентна [26] системе (2.1). Переменные  $x, y, z, \psi$  являются плоским выходом динамической системы (1.1), (1.2), (1.4) а сама система – дифференциально плоской [26], так как в силу равенств (2.10) переменные состояния  $x, y, z, \varphi, \theta, \psi, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{\varphi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}$  системы (1.1), (1.2), (1.4) могут быть представлены как функции переменных  $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z, x_4 = \psi$  и их производных соответствующих порядков. Следовательно, любая программная траектория  $\xi = \xi_r(t)$ ,  $z = z_r(t)$ ,  $\eta = \eta_r(t)$ ,  $t \geq 0$ , пространственного движения квадрокоптера, удовлетворяющая условию  $J \neq 0$ , задается функциями  $x_i = x_{ir}(t)$ ,  $i = 1, 4$ ,  $t \geq 0$ .

**3. Построение программной траектории.** Для построения программной траектории  $x_i = x_{ir}(t)$ ,  $i = \overline{1, 4}$ ,  $t \in [0, T]$ , пространственного движения летательного аппарата воспользуемся результатами, полученными в [27]. В частности, рассмотрим, например, программные траектории, удовлетворяющие следующим начальным и конечным условиям на переменные состояния  $x_i, \dot{x}_i$ ,  $i = 1, 4$ , системы (1.1), (1.2), (1.4):

$$x_i(0) = x_{0i}, \dot{x}_i(0) = \dot{x}_{0i} = 0, x_i(T) = x_{*i}, \dot{x}_i(T) = \dot{x}_{*i} = 0, i = \overline{1, 4},$$

а также ограничениям

$$|x_i(t)| \leq B_i, |\dot{x}_i(t)| \leq N_i, |\ddot{x}_i(t)| \leq Q_i$$

при всех  $t \in [0, T]$ , где  $B_i, N_i, Q_i$ ,  $i = \overline{1, 4}$ , – некоторые заданные положительные числа. Дополнительно потребуем, чтобы искомая программная траектория соответствовала условиям  $\ddot{x}_i(0) = 0$  и  $\ddot{x}_i(T) = 0$ ,  $i = 1, 4$ . Будем полагать, что в постановке задачи время движения  $T$  не задано.

Для синтеза программной траектории из начальной точки  $(x_{01}, 0, x_{02}, 0, x_{03}, 0, x_{04}, 0)$  в конечную точку  $(x_{*1}, 0, x_{*2}, 0, x_{*3}, 0, x_{*4}, 0)$  в фазовом пространстве  $(x, \dot{x}, y, \dot{y}, z, \dot{z}, \psi, \dot{\psi})$  используем дополнительные промежуточные точки с координатами  $(\tilde{x}_{j1}, \dot{\tilde{x}}_{j1}, \tilde{x}_{j2}, \dot{\tilde{x}}_{j2}, \tilde{x}_{j3}, \dot{\tilde{x}}_{j3}, \tilde{x}_{j4}, \dot{\tilde{x}}_{j4})$ ,  $j = \overline{1, 4}$ , (рис. 1), где значения  $\tilde{x}_{ji}$ ,  $\dot{\tilde{x}}_{ji}$ ,  $j = \overline{1, 4}$ ,  $i = \overline{1, 4}$ , удовлетворяют условиям  $\dot{\tilde{x}}_{2i} = \dot{\tilde{x}}_{3i}$  и следующим соотношениям [27]:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_{1i} &= \frac{\dot{\tilde{x}}_{2i}}{\varepsilon_1}, \tilde{x}_{1i} = \frac{\tilde{x}_{2i} + (\varepsilon_1 - 1)(1 + 2\varepsilon_1)x_{0i}}{\varepsilon_1(2\varepsilon_1 - 1)}, \\ \dot{\tilde{x}}_{4i} &= \frac{\dot{\tilde{x}}_{2i}}{\varepsilon_2}, \tilde{x}_{4i} = \frac{\tilde{x}_{3i} + (\varepsilon_2 - 1)(1 + 2\varepsilon_2)x_{*i}}{\varepsilon_2(2\varepsilon_2 - 1)}, \\ \tilde{x}_{2i} &= \frac{T_1(2\varepsilon_1 - 1)x_{*i} + (3T_3 + T_5(2\varepsilon_2 - 1))x_{0i}}{T_1(2\varepsilon_1 - 1) + 3T_3 + T_5(2\varepsilon_2 - 1)}, \\ \tilde{x}_{3i} &= \frac{(T_1(2\varepsilon_1 - 1) + 3T_3)x_{*i} + T_5(2\varepsilon_2 - 1)x_{0i}}{T_1(2\varepsilon_1 - 1) + 3T_3 + T_5(2\varepsilon_2 - 1)}, \\ \dot{\tilde{x}}_{2i} &= \frac{3(x_{*i} - x_{0i})}{T_1(2\varepsilon_1 - 1) + 3T_3 + T_5(2\varepsilon_2 - 1)}. \end{aligned}$$

Здесь  $T_1$  – время движения в фазовом пространстве  $(x, \dot{x}, y, \dot{y}, z, \dot{z}, \psi, \dot{\psi})$  из точки с координатами  $(x_{*1}, 0, x_{*2}, 0, x_{*3}, 0, x_{*4}, 0)$  в точку  $(\tilde{x}_{11}, \dot{\tilde{x}}_{11}, \tilde{x}_{12}, \dot{\tilde{x}}_{12}, \tilde{x}_{13}, \dot{\tilde{x}}_{13}, \tilde{x}_{14}, \dot{\tilde{x}}_{14})$ ,  $T_3$  – время движения из точки с координатами  $(\tilde{x}_{21}, \dot{\tilde{x}}_{21}, \tilde{x}_{22}, \dot{\tilde{x}}_{22}, \tilde{x}_{23}, \dot{\tilde{x}}_{23}, \tilde{x}_{24}, \dot{\tilde{x}}_{24})$  в точку  $(\tilde{x}_{31}, \dot{\tilde{x}}_{31}, \tilde{x}_{32}, \dot{\tilde{x}}_{32}, \tilde{x}_{33}, \dot{\tilde{x}}_{33}, \tilde{x}_{34}, \dot{\tilde{x}}_{34})$ ,  $T_5$  – время движения из точки с координатами  $(\tilde{x}_{41}, \dot{\tilde{x}}_{41}, \tilde{x}_{42}, \dot{\tilde{x}}_{42}, \tilde{x}_{43}, \dot{\tilde{x}}_{43}, \tilde{x}_{44}, \dot{\tilde{x}}_{44})$  в точку  $(x_{*1}, 0, x_{*2}, 0, x_{*3}, 0, x_{*4}, 0)$ ,  $\varepsilon_1 > 1$ ,  $\varepsilon_2 > 1$  – свободные параметры, определяющие соотношения между значениями скоростей  $\dot{\tilde{x}}_{1i}$ ,  $\dot{\tilde{x}}_{2i}$  и  $\dot{\tilde{x}}_{4i}$  соответственно.

Программная траектория  $x_i = x_{ir}(t)$ ,  $i = \overline{1, 4}$ ,  $t \in [0, T]$ , запишется покомпонентно [27] как

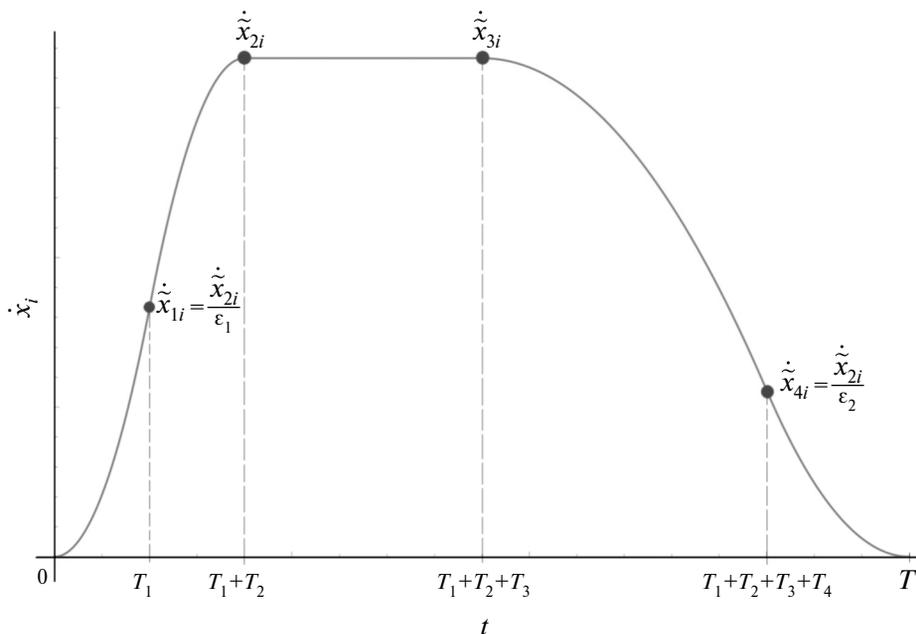


Рис. 1. Схематичное представление программной траектории по координате  $\dot{x}_i$  (сплошная линия), включая дополнительные промежуточные точки.

$$x_i = x_{ir}(t) = p_i(t) = \left\{ p_{ji}(t), t \in \left[ \sum_{k=0}^{j-1} T_k, \sum_{k=0}^j T_k \right], j = \overline{1,5}, i = \overline{1,4}, \right. \quad (3.1)$$

где  $T = \varepsilon_1 T_1 + T_3 + \varepsilon_2 T_5$ ,  $T_2 = (\varepsilon_1 - 1)T_1$ ,  $T_4 = (\varepsilon_2 - 1)T_5$ ,  $T_0 = 0$ ; многочлены  $p_{ji}(t)$  имеют вид

$$p_{ji}(t) = \tilde{x}_{j-1,i} + \dot{\tilde{x}}_{j-1,i} \left( t - \sum_{k=0}^{j-1} T_k \right) + c_{1ij} \left( t - \sum_{k=0}^{j-1} T_k \right)^2 + c_{2ij} \left( t - \sum_{k=0}^{j-1} T_k \right)^3, j = \overline{1,5}, i = \overline{1,4}.$$

Здесь  $\tilde{x}_{0i} = x_{0i}$ ,  $\dot{\tilde{x}}_{0i} = \dot{x}_{0i}$ , коэффициенты  $c_{1ij}$ ,  $c_{2ij}$  следующие [27]:

$$c_{1ij} = -\left( (2\dot{\tilde{x}}_{j-1,i} + \dot{\tilde{x}}_{ji})T_j + 3(\tilde{x}_{j-1,i} - \tilde{x}_{ji}) \right) / T_j^2,$$

$$c_{2ij} = \left( (2\dot{\tilde{x}}_{j-1,i} + \dot{\tilde{x}}_{ji})T_j + 2(\tilde{x}_{j-1,i} - \tilde{x}_{ji}) \right) / T_j^3.$$

Далее, согласно работе [27], для выполнения ограничений  $|\dot{x}_i(t)| \leq N_i$  и  $|\ddot{x}_i(t)| \leq Q_i$  при всех  $t \in [0, T]$ ,  $i = \overline{1,4}$ , на значения первых и вторых производных по времени соответствующих функций (3.1) необходимо и достаточно, чтобы выбранные значения  $T_1$ ,  $T_3$ ,  $T_5$  и  $\varepsilon_1 > 1$ ,  $\varepsilon_2 > 1$  удовлетворяли следующим неравенствам:

$$\frac{3|x_{*i} - x_{0i}|}{T_1(2\varepsilon_1 - 1) + 3T_3 + T_5(2\varepsilon_2 - 1)} \leq N_i,$$

$$\frac{6|x_{*i} - x_{0i}|}{\varepsilon_1 T_1(T_1(2\varepsilon_1 - 1) + 3T_3 + T_5(2\varepsilon_2 - 1))} \leq Q_i,$$

$$\frac{6|x_{*i} - x_{0i}|}{\varepsilon_2 T_5(T_1(2\varepsilon_1 - 1) + 3T_3 + T_5(2\varepsilon_2 - 1))} \leq Q_i.$$

Дополнительно если выполнены условия  $\max\{|x_{0i}|, |x_{*i}|\} \leq B_i$ ,  $i = \overline{1,4}$ , то при всех  $t \in [0, T]$  справедливы оценки  $|x_i(t)| \leq B_i$ ,  $i = \overline{1,4}$ .

**4. Синтез стабилизирующего управления.** Заметим, что, при наличии неточностей линеаризации обратной связью (2.4), (2.9) динамики ошибок отслеживания программных траекторий система (2.1) примет вид

$$\dot{\chi}_i^{(r_i)} = v_i + \Delta_i, i = \overline{1,4}, \quad (4.1)$$

где  $\Delta_i$  – неточности компенсации, в общем случае представляющие собой на решениях системы некоторые непрерывные функции независимой переменной. Продифференцировав уравнения (4.1) по времени, получим

$$\dot{\chi}_i^{(r_i+1)} = \dot{v}_i + \dot{\Delta}_i, i = \overline{1,4}. \quad (4.2)$$

Будем полагать, что для неточностей компенсации выполняются условия  $\dot{\Delta}_i \equiv 0$ ,  $i = \overline{1,4}$ . Тогда уравнения (4.2) запишем как  $\dot{\chi}_i^{(r_i+1)} = \dot{v}_i$ ,  $i = \overline{1,4}$ , и выберем  $\dot{v}_i$  следующим образом:

$$\dot{v}_i = -k_{1i}\chi_i - k_{2i}\dot{\chi}_i - \dots - k_{r_i}\chi_i^{(r_i-1)} - k_{r_i+1,i}\chi_i^{(r_i)}, i = \overline{1,4}, \quad (4.3)$$

где  $k_{ji} > 0$ ,  $j = \overline{1, r_i+1}$ ,  $i = \overline{1,4}$ , – положительные коэффициенты усиления. Проинтегрировав равенства (4.3) по переменной  $t \geq 0$ , найдем

$$v_i = -k_{1i} \int_0^t \chi_i(s) ds - k_{2i} \chi_i - \dots - k_{r_i i} \chi_i^{(r_i-2)} - k_{r_i+1, i} \chi_i^{(r_i-1)}, i = \overline{1,4}. \quad (4.4)$$

Следовательно, замкнутая управлениями (4.4) система (4.1) имеет вид

$$\ddot{\chi}_3 + k_{33} \dot{\chi}_3 + k_{23} \chi_3 + k_{13} \chi_3 = 0, \ddot{\chi}_4 + k_{34} \dot{\chi}_4 + k_{24} \chi_4 + k_{14} \chi_4 = 0,$$

$$\begin{pmatrix} \chi_1^{(5)}(t) \\ \chi_2^{(5)}(t) \end{pmatrix} + C_5 \begin{pmatrix} \chi_1^{(4)}(t) \\ \chi_2^{(4)}(t) \end{pmatrix} + C_4 \begin{pmatrix} \ddot{\chi}_1(t) \\ \ddot{\chi}_2(t) \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} \dot{\chi}_1(t) \\ \dot{\chi}_2(t) \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \chi_1(t) \\ \chi_2(t) \end{pmatrix} + C_1 \begin{pmatrix} \chi_1(t) \\ \chi_2(t) \end{pmatrix} = 0,$$

где

$$C_j = \begin{pmatrix} k_{j1} & 0 \\ 0 & k_{j2} \end{pmatrix} > 0, j = \overline{1,5}.$$

Отметим, что коэффициенты усиления  $k_{ji} > 0$ ,  $j = \overline{1, r_i + 1}$ ,  $i = \overline{1,4}$ , выбираются так, чтобы положение равновесия  $\chi_i = 0$ ,  $\dot{\chi}_i = 0$ ,  $\ddot{\chi}_i = 0$ ,  $\ddot{\chi}_i = 0$ ,  $\chi_i^{(4)} = 0$ ,  $i = 1,2$ , и  $\chi_i = 0$ ,  $\dot{\chi}_i = 0$ ,  $\ddot{\chi}_i = 0$ ,  $i = 3,4$ , замкнутой системы было глобально асимптотически устойчиво.

Подставив управления (4.4) в выражения (2.5), (2.6) и (2.9), для управляющих переменных  $F$ ,  $\tilde{M}_x$ ,  $\tilde{M}_y$ ,  $\tilde{M}_z$  имеем

$$F = \frac{m}{\cos \theta \cos \varphi} \left( g + \ddot{x}_{3r}(t) - k_{13} \int_0^t \chi_3(s) ds - k_{23} \chi_3 - k_{33} \dot{\chi}_3 \right), \quad (4.5)$$

$$\tilde{M}_z = \ddot{x}_{4r}(t) - k_{14} \int_0^t \chi_4(s) ds - k_{24} \chi_4 - k_{34} \dot{\chi}_4, \quad (4.6)$$

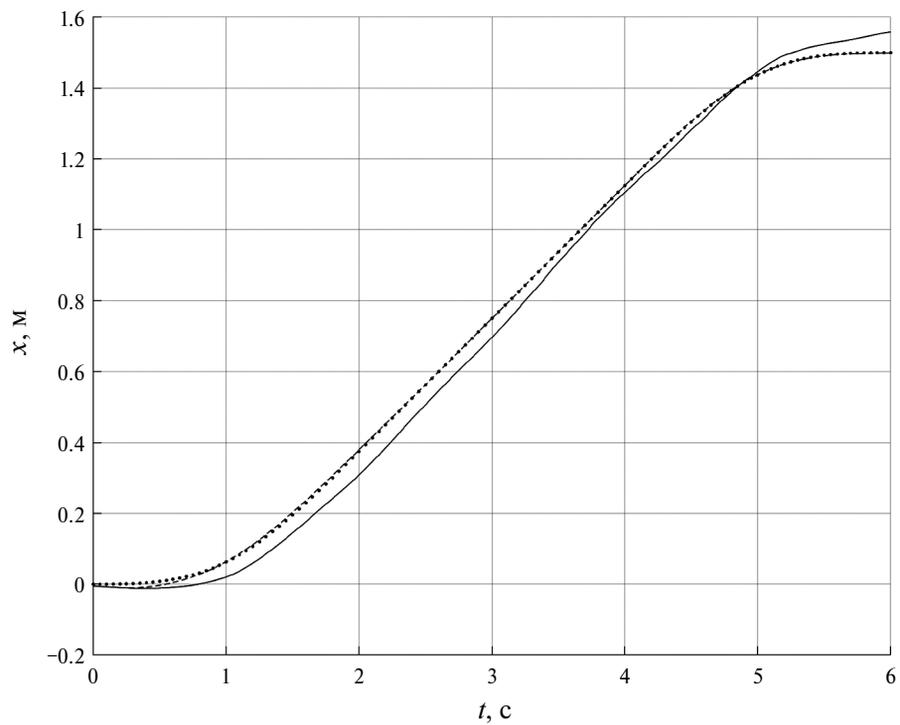
$$\begin{pmatrix} \tilde{M}_x \\ \tilde{M}_y \end{pmatrix} = G^{-1} \left( -\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{1r}^{(4)}(t) \\ x_{2r}^{(4)}(t) \end{pmatrix} - C_1 \int_0^t \begin{pmatrix} \chi_1(s) \\ \chi_2(s) \end{pmatrix} ds - C_2 \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix} - \right. \\ \left. - C_3 \begin{pmatrix} \dot{\chi}_1 \\ \dot{\chi}_2 \end{pmatrix} - C_4 \begin{pmatrix} \ddot{\chi}_1 \\ \ddot{\chi}_2 \end{pmatrix} - C_5 \begin{pmatrix} \ddot{\chi}_1 \\ \ddot{\chi}_2 \end{pmatrix} \right), \quad (4.7)$$

где

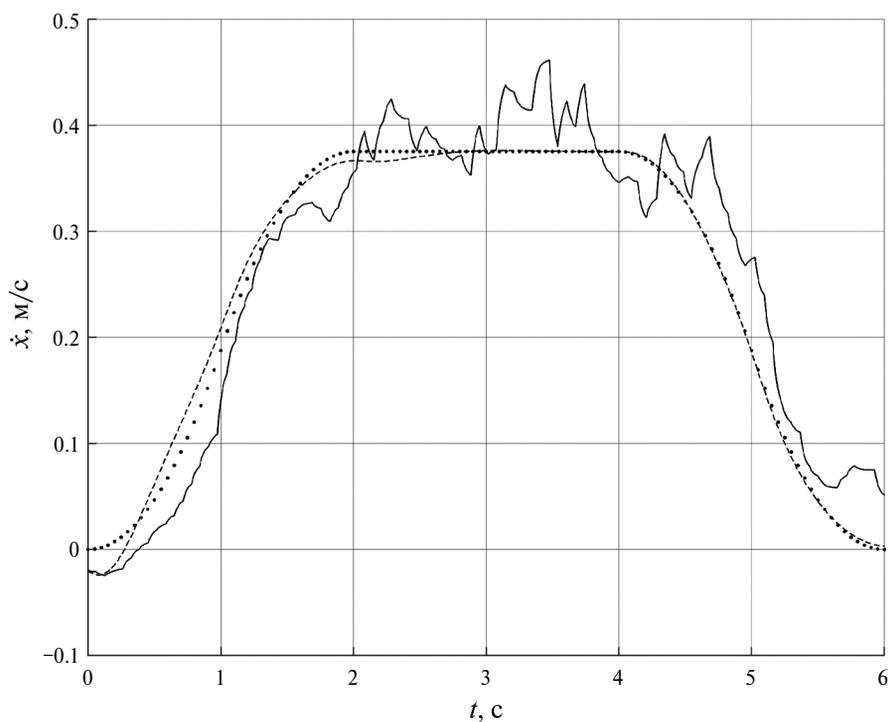
$$G = (g + \ddot{x}_{3r}(t) - k_{13} \int_0^t \chi_3(s) ds - k_{23} \chi_3 - k_{33} \dot{\chi}_3) \sec \theta \begin{pmatrix} \sin \psi & \cos \psi \\ -\cos \psi & \sin \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sec^2 \varphi & \tan \varphi \tan \theta \\ 0 & \sec \theta \end{pmatrix}.$$

Заметим, что, если условия  $\dot{\Delta}_i \equiv 0$ ,  $i = \overline{1,4}$ , не выполняются, но имеют место приближенные равенства  $\dot{\Delta}_i \approx 0$ ,  $i = 1,4$ , то работоспособность законов управления (4.5)–(4.7) может быть проверена, например, при помощи методов численного моделирования и эксперимента.

**5. Численное моделирование и результаты эксперимента.** Результаты численного моделирования и экспериментального полета квадрокоптера Parrot Mambo представлены на рис. 2–14, где показаны реальная и моделируемая траектория движения аппарата в пространстве при управлениях (4.5)–(4.7) для параметров модели движения, используемых в пакете Simulink Support Package for Parrot Minidrones. В ходе эксперимента на борту летательного аппарата регистрировались телеметрические данные, зафиксированные датчиками и исполнительными устройствами. На основе полученных данных были построены графики, отражающие эволюцию состояния системы в процессе полета. При построении программной



**Рис. 2.** Движение центра масс аппарата по координате  $x$ : программная траектория (пунктирная линия), стабилизация (штриховая линия) и эксперимент (сплошная линия).



**Рис. 3.** Скорость  $\dot{x}$  движения центра масс по координате  $x$ : программная траектория (пунктирная линия), стабилизация (штриховая линия) и эксперимент (сплошная линия).

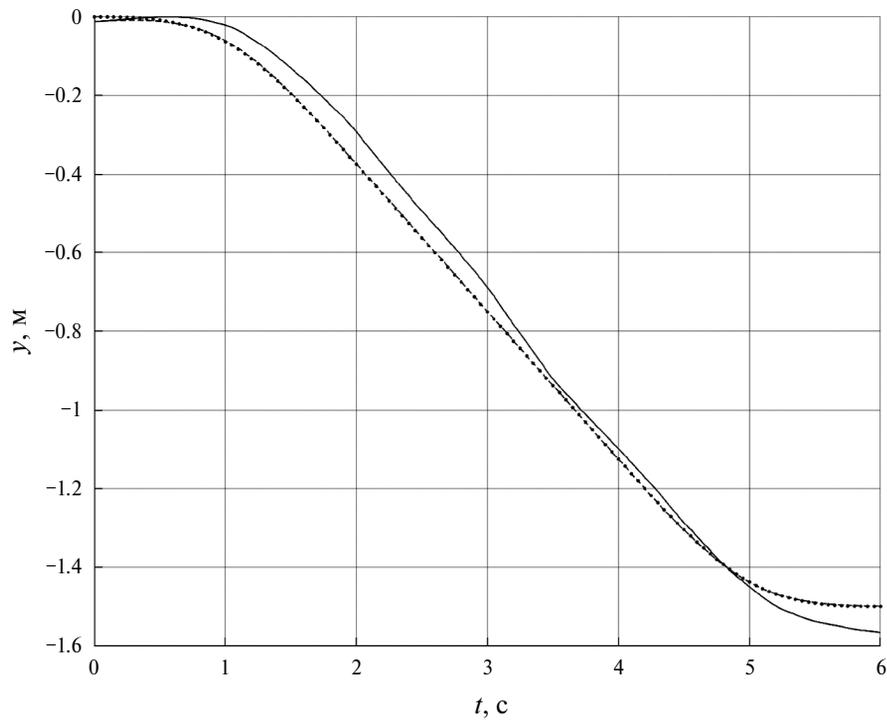


Рис. 4. Движение центра масс аппарата по координате  $y$ : программная траектория (пунктирная линия), стабилизация (штриховая линия) и эксперимент (сплошная линия).

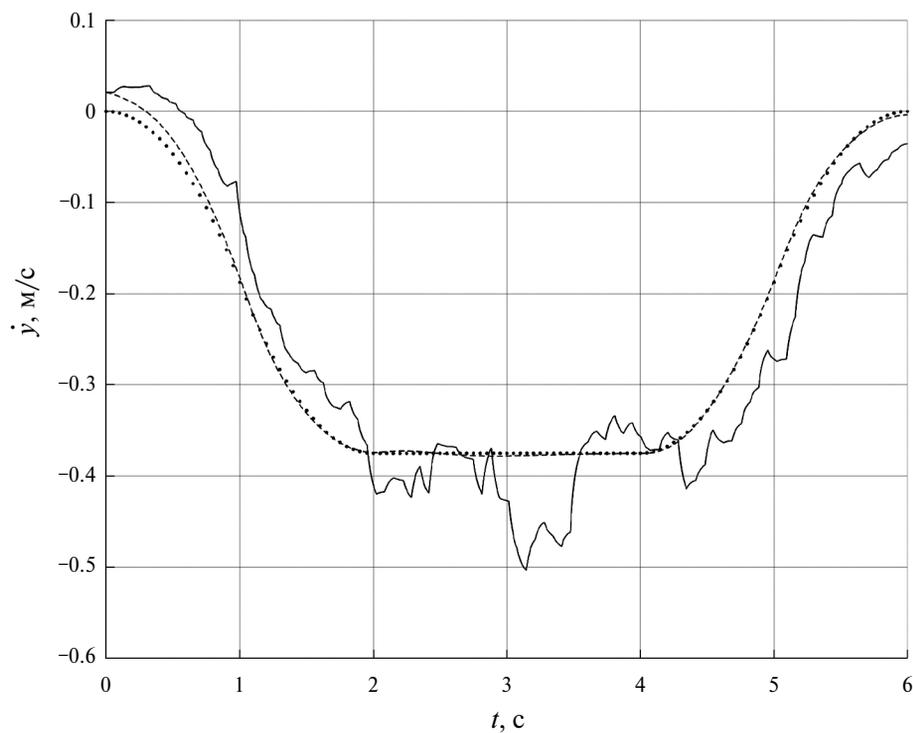
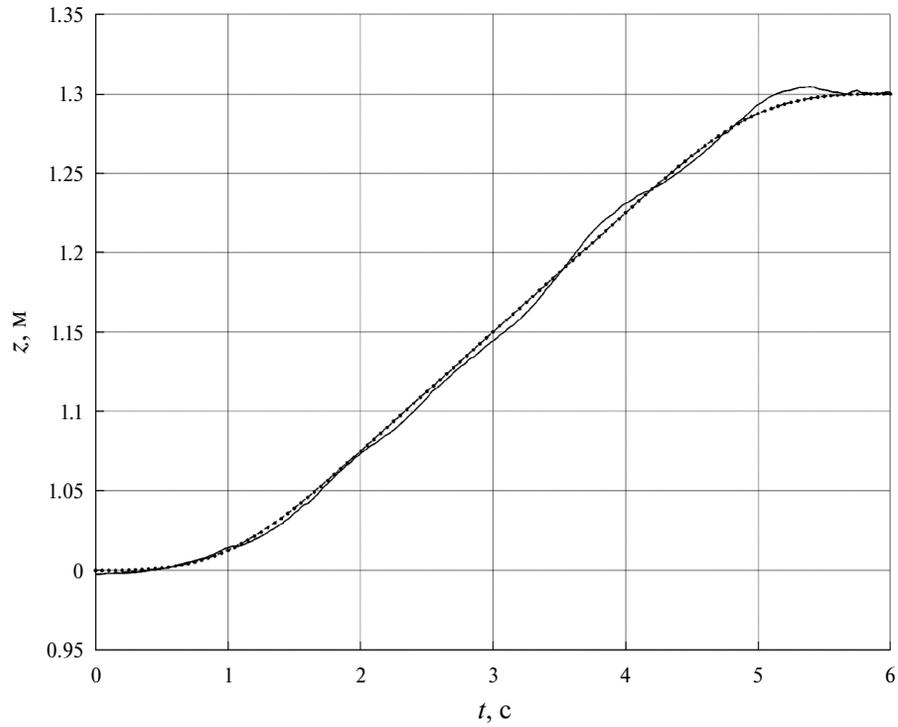
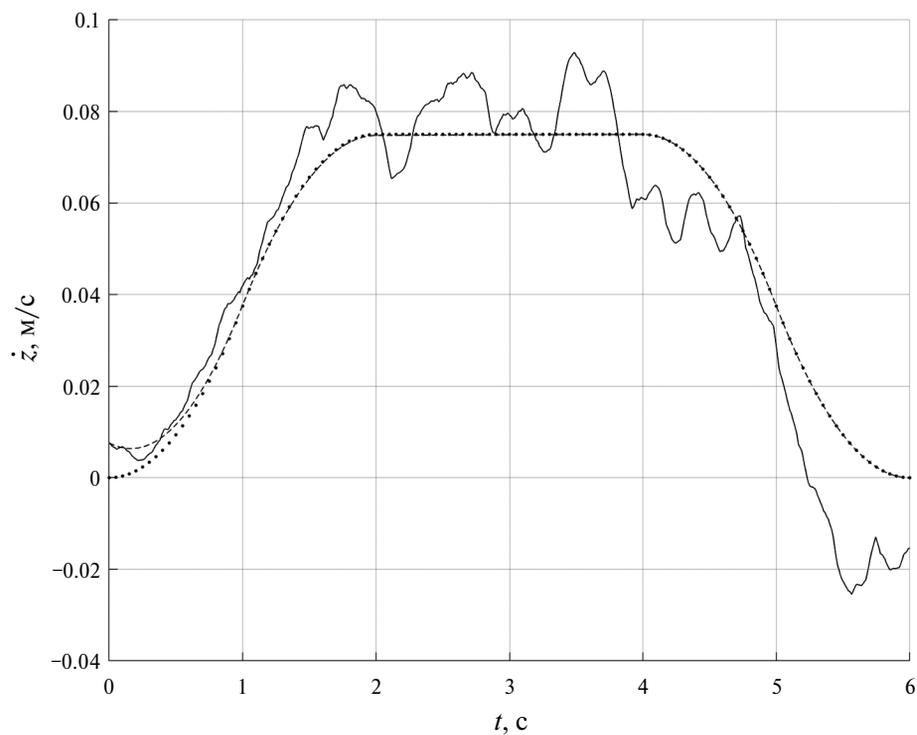


Рис. 5. Скорость  $\dot{y}$  движения центра масс по координате  $y$ : программная траектория (пунктирная линия), стабилизация (штриховая линия) и эксперимент (сплошная линия).



**Рис. 6.** Движение центра масс аппарата по координате  $z$ : программная траектория (пунктирная линия), стабилизация (штриховая линия) и эксперимент (сплошная линия).



**Рис. 7.** Скорость  $\dot{z}$  движения центра масс по координате  $z$ : программная траектория (пунктирная линия), стабилизация (штриховая линия) и эксперимент (сплошная линия).

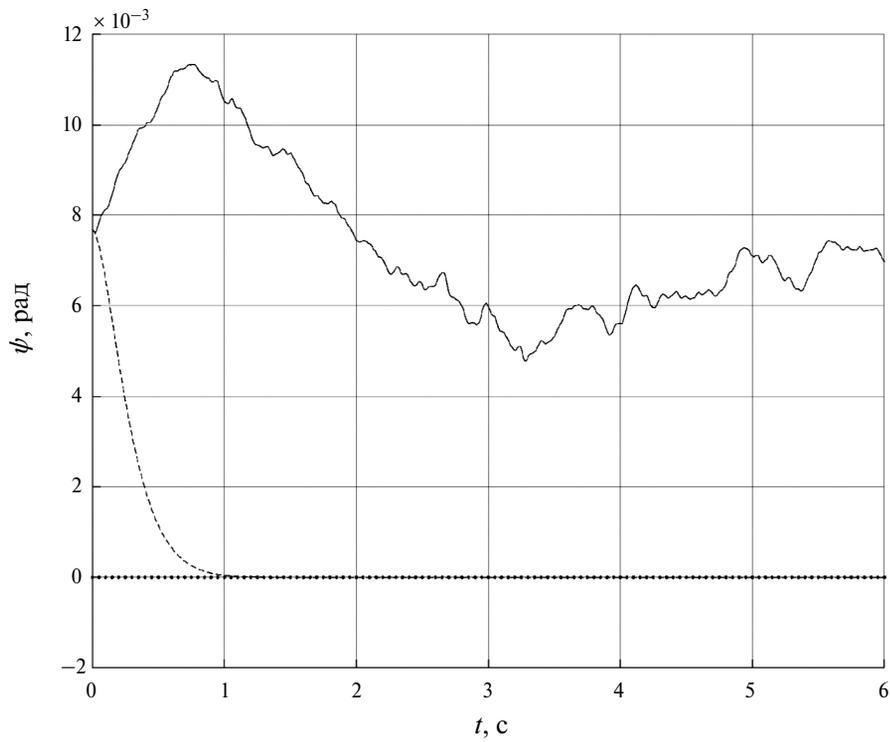


Рис. 8. Вращательное движение по углу рысканья  $\psi$ : программная траектория (пунктирная линия), стабилизация (штриховая линия) и эксперимент (сплошная линия).

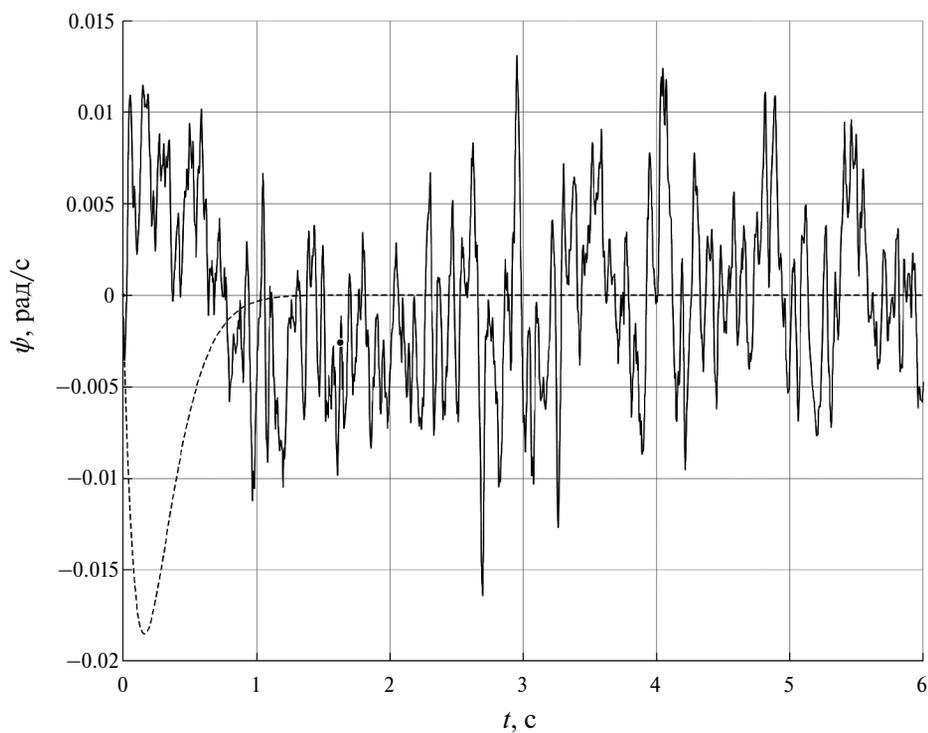


Рис. 9. Угловая скорость  $\dot{\psi}$ : программная траектория (пунктирная линия), стабилизация (штриховая линия) и эксперимент (сплошная линия).

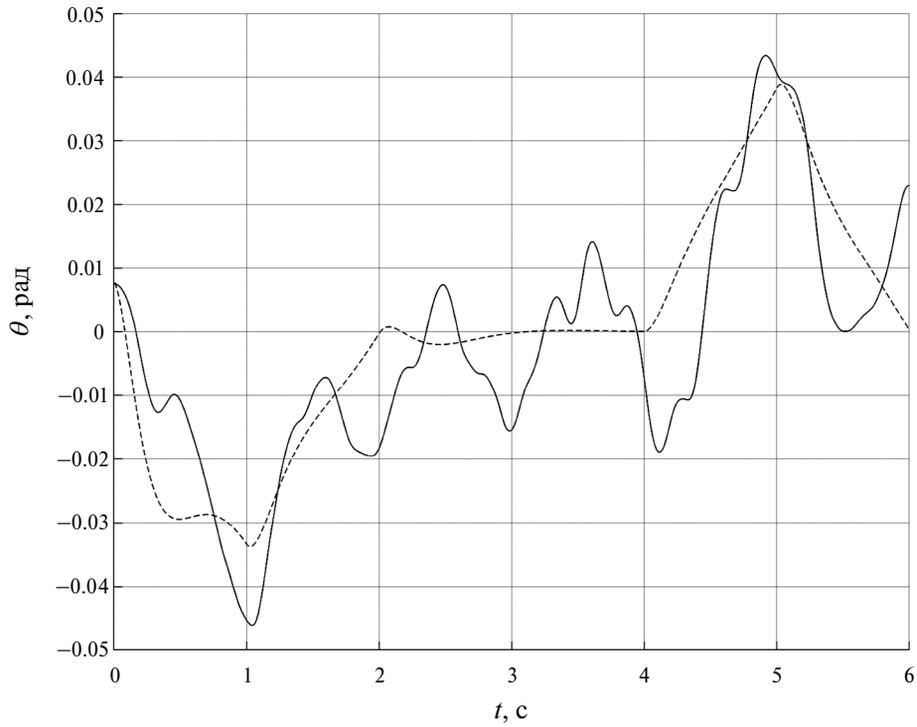


Рис. 10. Вращательное движение по углу тангажа  $\theta$ : стабилизация (штриховая линия) и эксперимент (сплошная линия).

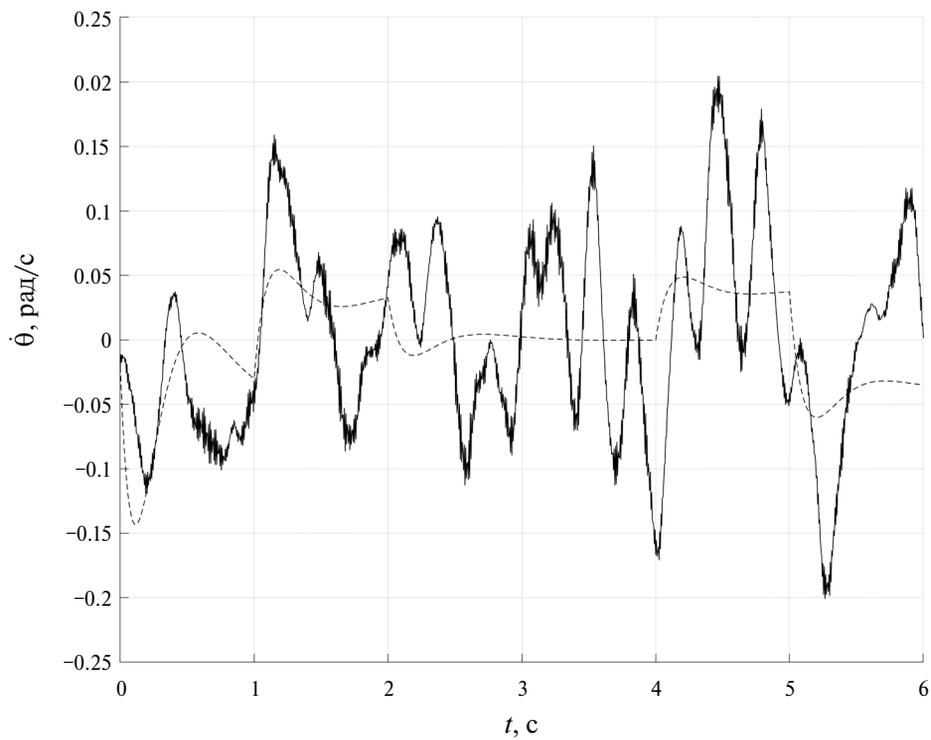


Рис. 11. Угловая скорость  $\dot{\theta}$ : стабилизация (штриховая линия) и эксперимент (сплошная линия).

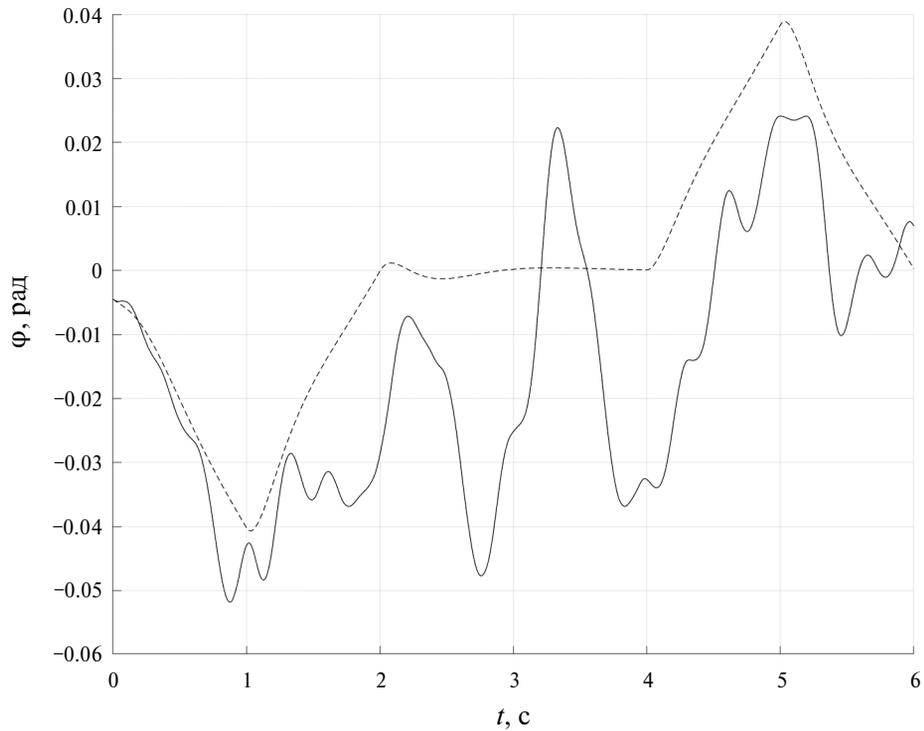


Рис. 12. Вращательное движение по углу крена  $\varphi$ : стабилизация (штриховая линия) и эксперимент (сплошная линия).

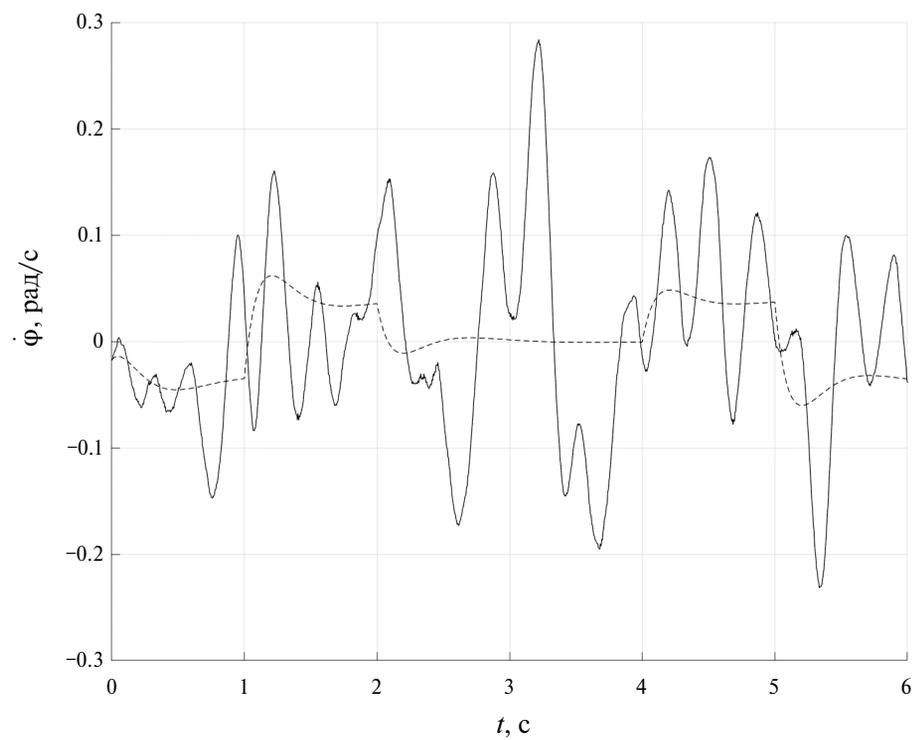
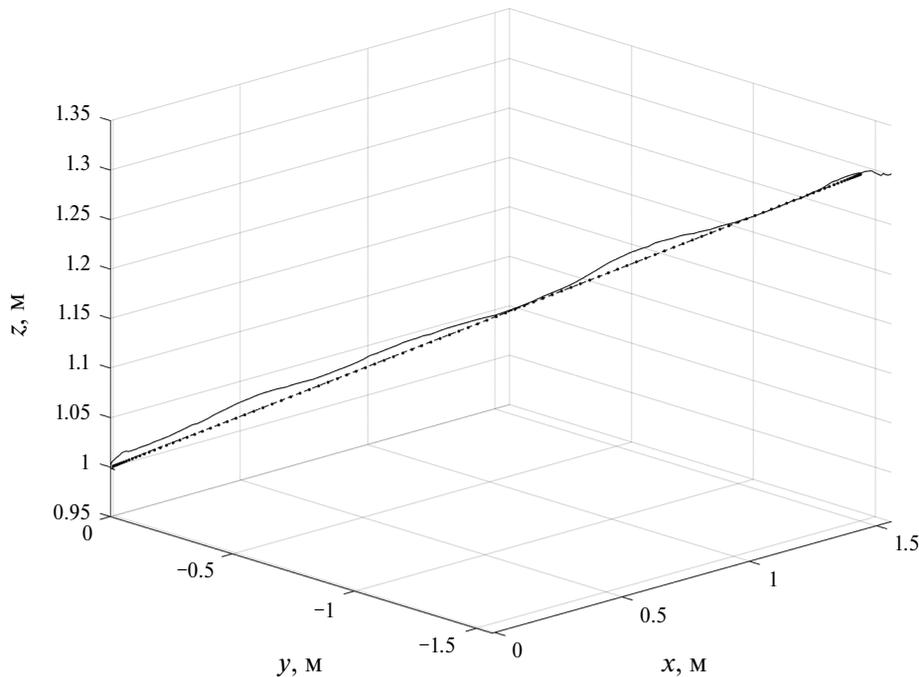


Рис. 13. Угловая скорость  $\dot{\varphi}$ : стабилизация (штриховая линия) и эксперимент (сплошная линия).



**Рис. 14.** Программная траектория движения центра масс аппарата в пространстве (пунктирная линия), стабилизация (штриховая линия) и эксперимент (сплошная линия).

траектории применялись следующие начальные значения соответствующих переменных состояния системы:  $x_1(0) = x_{01} = 0$ ,  $x_2(0) = x_{02} = 0$ ,  $x_3(0) = x_{03} = 1$ ,  $x_4(0) = x_{04} = 0$ ,  $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_{01} = 0$ ,  $\dot{x}_2(0) = \dot{x}_{02} = 0$ ,  $\dot{x}_3(0) = \dot{x}_{03} = 0$ ,  $\dot{x}_4(0) = \dot{x}_{04} = 0$  и конечные:  $x_1(T) = x_{*1} = 1.5$ ,  $x_2(T) = x_{*2} = -1.5$ ,  $x_3(T) = x_{*3} = 1.3$ ,  $x_4(T) = x_{*4} = 0$ ,  $\dot{x}_1(T) = \dot{x}_{*1} = 0$ ,  $\dot{x}_2(T) = \dot{x}_{*2} = 0$ ,  $\dot{x}_3(T) = \dot{x}_{*3} = 0$ ,  $\dot{x}_4(T) = \dot{x}_{*4} = 0$ , а также были выбраны значения параметров  $T = 6$ ,  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 2$ ,  $T_1 = T_5 = 1$ ,  $B_1 = B_2 = 1.5$ ,  $B_3 = 1.3$ ,  $N_1 = Q_1 = N_2 = Q_2 = 0.375$ ,  $N_3 = Q_3 = 0.075$ . В процессе численного моделирования стабилизации построенной программной траектории и эксперимента (без учета неточностей измерений) в обратных связях (4.5)–(4.7) рассматривались следующие значения коэффициентов усиления:  $k_{11} = k_{12} = 604.66176$ ,  $k_{21} = k_{22} = 839.808$ ,  $k_{31} = k_{32} = 466.56$ ,  $k_{41} = k_{42} = 129.6$ ,  $k_{51} = k_{52} = 18$ ,  $k_{13} = 10.648$ ,  $k_{23} = 14.52$ ,  $k_{33} = 6.6$ ,  $k_{14} = 0$ ,  $k_{24} = 40$ ,  $k_{34} = 12$  и отклонения начальных значений от программных:  $\Delta x_1(0) = -0.0050266720$ ,  $\Delta x_2(0) = -0.011548175$ ,  $\Delta x_3(0) = -0.00243449$ ,  $\Delta x_4(0) = 0.0076834871$ ,  $\Delta \dot{x}_1(0) = -0.020051740$ ,  $\Delta \dot{x}_2(0) = 0.021199794$ ,  $\Delta \dot{x}_3(0) = -0.0075910636$ ,  $\Delta \dot{x}_4(0) = -0.00117621$ . Отметим, что при численном моделировании стабилизации полагалось, что для соотношений (4.1) имеют место тождества  $\Delta_i(t) \equiv 0$ ,  $i = 1, 4$ .

**Заключение.** Рассмотрено решение задачи отслеживания траекторий пространственного движения квадрокоптера как твердого тела. Показано, что нелинейная динамическая система, описывающая движение аппарата в пространстве, является дифференциально плоской [26] с плоским выходом, состоящим из трех декартовых координат поступательного движения центра масс квадрокоптера и угла рысканья. Этот факт позволяет переформулировать [26] задачу построения и стабилизации произвольной 12-мерной траектории пространственного движения квадрокоптера как эквивалентную задачу построения и стабилизации соответствующей 4-мерной траектории по переменным плоского выхода. Далее, программная траектория движения аппарата строится для трех координат поступательного движения центра масс квадрокоптера и его вращательного движения по углу рысканья с помощью полиномов третьего порядка от времени с учетом заданных ограничений на координаты, скорости и ускорения на основе результатов работы [27]. Предлагается базовый сценарий аналитического построения траектории движения аппарата для нулевых значений скоростей и ускорений по соответствующим координатам в начале и конце движения. Отметим, что результаты, полученные в [27], могут быть применены при построении программных траекторий движения и для ненулевых начальных и конечных значений скоростей и ускорений.

Синтез стабилизирующего управления осуществлен с помощью метода линеаризации обратной связью по состоянию. Работоспособность полученных законов управления проверена численно, а также экспериментально на квадрокоптере Parrot Mambo с применением пакета MATLAB/Simulink. Заметим, что использованные при построении программных траекторий движения аппарата в пространстве многочлены (3.1) третьего порядка от независимой переменной не позволяют явным образом задать программные изменения всех переменных состояния аппарата как функции времени. Учитываются только начальные и конечные значения координат  $(x, y, z)$  центра масс квадрокоптера в инерциальной системе отсчета, линейных скоростей  $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$  и ускорений  $(\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})$ , а также угла рысканья  $\psi$  и угловой скорости  $\dot{\psi}$ . При этом значения угловых координат тангажа  $\theta$ , крена  $\varphi$  и соответствующие угловые скорости  $\dot{\theta}$ ,  $\dot{\varphi}$  определяются неявно в силу соотношений (2.10). Поэтому при построении программных траекторий пространственного движения квадрокоптера в общем случае представляется целесообразным применение полиномов от независимой переменной более высоких порядков, чем третий [24].

### ПРИЛОЖЕНИЕ

Функции  $f_i$ ,  $i = 1, 2$ , в формуле (2.9) имеют следующий вид:

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \ddot{a}c d + 2\dot{a}c\dot{d} + 2a\dot{d}\dot{c} + a\ddot{c} + 2a\dot{d}\dot{c} + a\ddot{c},$$

$$a = g + \ddot{x}_{3r}(t) + v_3, \dot{a} = \dot{\ddot{x}}_{3r}(t) + \dot{v}_3, \ddot{a} = \ddot{x}_{3r}^{(4)}(t) + \ddot{v}_3,$$

$$c = \begin{pmatrix} \tan \varphi \sec \theta \\ \tan \theta \end{pmatrix}, \dot{c} = \sec^2 \theta \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \sec^2 \varphi \cos \theta + \dot{\theta} \tan \varphi \sin \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix},$$

$$\ddot{c} = \frac{2\dot{\theta} \sin \theta}{\cos^3 \varphi} \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \sec^2 \varphi \cos \theta + \dot{\theta} \tan \varphi \sin \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} +$$

$$+ \sec^2 \theta \begin{pmatrix} 2\dot{\varphi}^2 \cos \theta \sin \varphi \sec^3 \varphi + \dot{\theta}^2 \tan \varphi \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$d = \begin{pmatrix} \sin \psi & \cos \psi \\ -\cos \psi & \sin \psi \end{pmatrix}, \dot{d} = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi \\ \sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix} \dot{\psi},$$

$$\ddot{d} = \begin{pmatrix} -\sin \psi & -\cos \psi \\ \cos \psi & -\sin \psi \end{pmatrix} \dot{\psi}^2 + \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi \\ \sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix} (\ddot{x}_{4r}(t) + v_4).$$

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Madani T., Benallegue A. Backstepping Control for a Quadrotor Helicopter // IEEE/RSJ International Conf. on Intelligent Robots and Systems. Beijing, 2006. P. 3255–3260.
2. Xu R., Ozguner U. Sliding Mode Control of a Quadrotor Helicopter // Proc. 45th IEEE Conf. on Decision and Control. San Diego, 2006. P. 4957–4962.
3. Tartaglione G., D'Amato E., Ariola M., SalvoRossi P., Johansen T.A. Model Predictive Control for a Multi-body Slung-load System // Robot. Autonomous Syst. 2007. V. 92. P. 1–11.
4. Adigbli P., Grand C., Mouret J.-B., Doncieux S. Nonlinear Attitude and Position Control of a Micro Quadrotor using Sliding Mode and Backstepping Techniques // 3rd US–European Competition and Workshop on Micro Air Vehicle Systems (MAV07) & European Micro Air Vehicle Conf. and Flight Competition (EMAV2007). Toulouse. France, 2007.
5. Fang Z., Zhi Z., Jun L., Jian W. Feedback Linearization and Continuous Sliding Mode Control for a Quadrotor UAV // 27th Chinese Control Conf. Kunming. China, 2008. P. 349–353.
6. Das A., Lewis F., Subbarao K. Backstepping Approach for Controlling a Quadrotor Using Lagrange Form Dynamics // J. Intell. Robot. Syst. 2009. V. 56. P. 127–151.

7. Lee D., Jin Kim H., Sastry S. Feedback Linearization vs. Adaptive Sliding Mode Control for Aquadrotor Helicopter // International J. of Control, Automation and Systems. 2009. V. 7 (3). P. 419–428.
8. Jafari H., Zareh M., Roshanian J., Nikkhah A. An Optimal Guidance Law Applied to Quadrotor Using LQR Method // Transactions of the Japan Society for Aeronautical and Space Sciences. 2010. V. 53 (179). P. 32 – 39.
9. Zhou Q.-L., Zhang Y., Rabbath C.-A., Theilliol D. Design of Feedback Linearization Control and Reconfigurable Control Allocation with Application to a Quadrotor UAV // Conf. on Control and Fault-Tolerant Systems. Nice. France, 2010. P. 371–376.
10. Luukkonen T. Modelling and Control of Quadcopter. 2011. [https://sal.aalto.fi/publications/pdf\\_files/eluu11\\_public.pdf](https://sal.aalto.fi/publications/pdf_files/eluu11_public.pdf)
11. Mukherjee P., Waslander S. Direct Adaptive Feedback Linearization for Quadrotor Control // Control Conf., American Institute of Aeronautics and Astronautics. Minneapolis. Minnesota, 2012. <https://doi.org/10.2514/6.2012-4917>
12. Пыркин А.А., Мальцева Т.А., Лабадин Д.В., Суров М.О., Бобцов А.А. Синтез системы управления квадрокоптером с использованием упрощенной математической модели // Изв. вузов. Приборостроение. 2013. Т. 56. № 4. С. 47–51.
13. Ghandour J., Aberkane S., Ponsart J.-C. Feedback Linearization approach for Standard and Fault Tolerant Control: Application to a Quadrotor UAV Testbed // J. of Physics Conference Series. 2014. V. 570 (8) P. 082003.
14. Gavilan F., Vazquez R., Camacho E. F. An Iterative Model Predictive Control Algorithm for UAV Guidance // IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems. 2015. V. 51. P. 2406–2419.
15. Park J., Kim Y., Kim S. Landing Site Searching and Selection Algorithm Development Using Vision System and its Application to Quadrotor // IEEE Transactions on Control Systems Technology. 2015. V. 23 (2). P. 488–503.
16. Dolatabadi S.H., Yazdanpanah M.J. MIMO Sliding Mode and Backstepping Control for a Quadrotor UAV // 23rd Iranian Conf. on Electrical Engineering (ICEE). Tehran. Iran, 2015. P. 994–999.
17. Choi Y.-C., Ahn H.-S. Nonlinear Control of Quadrotor for Point Tracking: Actual Implementation and Experimental Tests // IEEE/ASME Transactions on Mechatronics. 2015. V. 20 (3). P. 1179–1192.
18. Yao P., Wang H., Ji H. Multi-UAVs Tracking Target in Urban Environment by Model Predictive Control and Improved Grey Wolf Optimizer // Aerosp. Sci. Technol. 2016. V. 55. P. 131–143.
19. Глазков Т.В., Голубев А.Е. Отслеживание программного изменения углового положения квадрокоптера // Математика и математическое моделирование. 2017. № 5. С. 14–28.
20. Kurak S., Hodzic M. Control and Estimation of a Quadcopter Dynamical Model // Periodicals of Engineering and Natural Sciences. 2018. V. 6(1). P. 63–75.
21. Glazkov T.V., Golubev A.E., Gorbunov A.V., Krishchenko A.P. Control of Quadcopter Motion in the Horizontal Plane // AIP Conference Proceedings. 2019. V. 2116. P. 380003-1–380003-4.
22. Setyawan G.E., Kurniawan W., Gaol A.C.L. Linear Quadratic Regulator Controller (LQR) for AR. Drone's Safe Landing // Intern. Conf. on Sustainable Information Engineering and Technology (SIET). Lombok, Indonesia, 2019. P. 228–233.
23. Glazkov T.V., Golubev A.E. Using Simulink Support Package for Parrot Minidrones in Nonlinear Control Education // AIP Conference Proceedings. 2019. V. 2195. P. 020007-1–020007-7.
24. Golubev A.E., Nay Thway, Gorbunov A.V., Krishchenko A.P., Utkina N.V. Construction of Quadrocopter Programmed Motion in a Flat Labyrinth // AIP Conference Proceedings. 2019. V. 2116. P. 380004-11–380004-4.
25. Sahrir N.H., Basri A. Modelling and Manual Tuning PID Control of Quadcopter // Control, Instrumentation and Mechatronics: Theory and Practice. Lecture Notes in Electrical Engineering. V. 921. Singapore: Springer, 2022. [https://doi.org/10.1007/978-981-19-3923-5\\_30](https://doi.org/10.1007/978-981-19-3923-5_30)
26. Fliess M., Lévine J., Martin P., Rouchon P. A Lie-Backlund Approach to Equivalence and Flatness of Nonlinear Systems // IEEE Trans. Autom. Control. 1999. V. 44 (5). P. 922–937.
27. Голубев А.Е. Построение программных движений механических систем с учетом ограничений при помощи многочленов третьего порядка // Изв. РАН. ТиСУ. 2021. № 2. С. 126–137.