

УДК 531.38

## ПЕРЕШАГИВАНИЕ МНОГОНОГИМ ИНСЕКТОМОРФНЫМ РОБОТОМ ПРЕПЯТСТВИЙ МАКСИМАЛЬНОЙ ШИРИНЫ

© 2025 г. Ю. Ф. Голубев\*, В. В. Корянов\*\*

*ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия*

*\*e-mail: golubev@keldysh.ru*

*\*\*e-mail: korianov@keldysh.ru*

Поступила в редакцию 09.11.2024 г.

После доработки 06.12.2024 г.

Принята к публикации 24.02.2025 г.

Решена задача о максимальной ширине зоны, запрещенной для наступания, которую  $n$ -ногий робот может преодолеть в режиме статической устойчивости. Для шестиногого и четырехногого роботов указаны следовые последовательности постановки ног робота, обеспечивающие достижение значения максимальной ширины зоны. Приведены результаты компьютерного моделирования.

*Ключевые слова:* шагающий робот, преодоление препятствий, компьютерное моделирование

DOI: 10.31857/S0002338825020106, EDN: ASSOLV

## STEPPING OVER OBSTACLES OF MAXIMUM WIDTH BY A MULTI-LEGGED INSECTOMORPHIC ROBOT

Yu. F. Golubev\*, V. V. Koryanov\*\*

*Keldysh Institute of Applied Mathematics, RAS, Moscow, Russia*

*\*e-mail: golubev@keldysh.ru*

*\*\*e-mail: korianov@keldysh.ru*

The problem of the maximum width of the zone forbidden for stepping, which an  $n$ -legged robot can overcome in the static stability mode, is solved. For the six-legged and four-legged robots, the footprints sequences of the robot's feet placement that ensure the achievement of the value of the maximum zone width are specified. The results of computer simulation are given.

*Keywords:* walking robot, overcoming obstacles, computer simulation

**Введение.** Исследуется возможность преодоления невысоких препятствий на равнине, образованных областями, непригодными для опоры ног шагающего аппарата. Это могут быть, например, глубокие расщелины, рвы, ручьи, лужи, траншеи, заболоченные участки, россыпи камней и пр. Непрерывность колеи колесных вездеходов разнообразных конструкций накладывает ограничения как на саму возможность проезда, так и на возможность не ухудшить состояние окружающей среды после их деятельности [1]. Шагающие машины оставляют на местности сравнительно небольшие дискретные следы, что дает возможность игнорировать некоторые препятствия, перешагивая через них.

Ниже рассматривается вопрос о преодолении невысокого и весьма протяженного препятствия, обойти которое представляется проблематичным. В таком случае робот должен применить свою способность дотянуться до точек опоры на противоположной стороне препятствия [2]. Если это окажется возможным, то у робота возникает шанс пройти над препятствием, не обязательно соблюдая при этом регулярность походки.

В данной работе изучаются методы перелезания шагающим роботом через запрещенные для наступания протяженные зоны в режиме статической устойчивости. Преодоление препятствий с помощью прыжков [3], а также с использованием предметов окружающей среды не рассматривается. Переправа робота по брусу была уже исследована ранее [4]. Вместе с тем сам по себе поиск подходящего предмета для переправы может вызывать затруднение, а кроме

того, применение подобного рода опор может создавать дополнительные помехи, например вибрации и колебания, неизбежно возникающие при движении [5].

В статье приводится решение задачи о максимальной ширине зоны, запрещенной для наступания, которую  $n$ -ногий симметричный шагающий робот с прямоугольным шасси может преодолеть в режиме статической устойчивости. Дана не улучшаемая аналитическая оценка сверху максимальной ширины преодолимой зоны [6]. В частности, для шестиногого робота при возможности его движения “след в след” максимально допустимая ширина преодолимой зоны препятствия есть сумма половины длины корпуса и предельного значения полушага робота. При полудлине корпуса шестиногого робота, превышающей полный предельный шаг, указанная максимальная ширина зоны сохраняет постоянное значение, равное с точностью до запаса статической устойчивости трем предельным полушагам. Разработаны методы построения следового расписания, обеспечивающие достижение максимальной ширины зоны препятствия как для шестиногого, так и для четырехногого роботов. Соответствующие алгоритмы были отработаны на программном комплексе “Универсальный механизм” [7] с учетом полной динамики шестиногого робота. Представленные результаты компьютерного моделирования свидетельствуют о реализуемости разработанных алгоритмов.

**1. Постановка задачи.** Следуя работе [8], будем иметь в виду изолированные препятствия, расположенные на равнинной горизонтальной местности, для преодоления которых достаточно через них перешагнуть. Препятствие называется изолированным [2], если его можно заключить в область между двумя вертикальными плоскостями таким образом, что вне этой области в достаточно большой ее окрестности отсутствуют точки, запрещенные для наступания. На опорной поверхности указанные плоскости выделяют полосу, называемую зоной препятствия, внутри которой помещать следовые точки нельзя. Ширина  $d$  зоны зависит от соотношения размеров препятствия и несущих свойств опорной поверхности.

Пусть шасси шагающего робота имеет форму прямоугольного параллелепипеда, а ноги имеют инсектоморфную структуру [2]. Точки подвеса одинаковых двухзвенных весомых ног расположены на боковых сторонах шасси симметрично относительно продольной и поперечной вертикальных строительных плоскостей корпуса, содержащих его центр. Тогда число ног робота  $n = 2k$  – четное. Предполагается, что  $k > 1$ . Длина боковых сторон корпуса больше его ширины. Робот подходит к препятствию передней или задней стороной. При перешагивании через препятствие робот сохраняет направление продольной оси корпуса перпендикулярным границам зоны препятствия. Возникает задача о нахождении максимально возможной ширины зоны препятствия, которое робот может преодолеть. Требуется также указать логическую последовательность постановки ног (следовое расписание), позволяющую аппарату безопасно перешагнуть через такую зону.

Пусть  $O_1\xi\eta\zeta$  – неподвижная (абсолютная) декартова система координат. Плоскость  $O_1\xi\eta$  горизонтальна. Ось  $O_1\xi$  направлена перпендикулярно зоне препятствия, ось  $O_1\zeta$  – вертикально вверх. Ось  $O_1\eta$  дополняет систему координат  $O_1\xi\eta\zeta$  до правой тройки. Начало  $O_1$  расположим со стороны подхода робота к препятствию, так что  $\xi = \xi_m$  – уравнение фронтальной границы зоны препятствия, а  $\xi = \xi_M$  – уравнение ее тыльной границы,  $\xi_m$  и  $\xi_M$  – постоянные, причем  $0 < \xi_m < \xi_M$ .

Декартову правоориентированную систему координат  $Oxyz$  жестко свяжем с корпусом аппарата так, чтобы ее начало  $O$  совпало с центром шасси, плоскость  $Oxy$  содержала точки подвеса всех ног, ось  $Ox$  была ориентирована вдоль продольной оси шасси по скорости его движения, ось  $Oy$  была направлена в сторону точек подвеса ног, расположенных с левой стороны корпуса по ходу его движения.

Ногам, расположенным справа (если смотреть вперед в направлении движения) от продольной плоскости симметрии шасси, припишем, начиная с задних ног, последовательные нечетные номера, а ногам, расположенным слева от указанной плоскости, – последовательные четные. Пусть  $x_{2j}, y_{2j}, z_{2j} = 0$  – относительные координаты точек подвеса ног левой стороны, а  $x_{2j-1}, y_{2j-1}, z_{2j-1} = 0$  – относительные координаты точек подвеса ног правой стороны ( $j = 1, k$ ). Потребуем, чтобы  $y_i = (-1)^i b$ ,  $b > 0$ ,  $i = 1, n$ . Геометрически это означает, что точки подвеса ног расположены на прямых, лежащих в плоскости  $Oxy$  симметрично относительно плоскости  $Oxz$  и равно отстоят от оси  $Ox$  на расстояние  $b$ . Кроме того, предположим, что  $x_{2j-1} = x_{2j} = a[j - (k + 1) / 2]$ . Величины  $a, b$  постоянны и определяют габариты корпуса аппарата, так что  $(k - 1)a$  – длина корпуса и  $2b$  – его ширина. Будем считать, что корпус шагающего аппарата движется поступательно, сохраняя в любой момент времени сонаправленную взаимную ориентацию осей координат  $O_1\xi\eta\zeta$  и  $Oxyz$ .

Положения  $(x_i^f, y_i^f, z_i^f)$  стоп ног относительно корпуса определяются соотношениями [4]

$$\begin{aligned}
 q_{xi} &= x_i^f - x_i = -[(-1)^i l_1 \sin \beta_i - l_2 \sin(\beta_i + \gamma_i)] \sin \alpha_i, \\
 q_{yi} &= y_i^f - y_i = [(-1)^i l_1 \sin \beta_i - l_2 \sin(\beta_i + \gamma_i)] \cos \alpha_i, \\
 q_{zi} &= z_i^f - z_i = (-1)^{i+1} l_1 \cos \beta_i + l_2 \cos(\beta_i + \gamma_i), \quad i = \overline{1, n},
 \end{aligned}
 \tag{1.1}$$

где  $l_1$  – длина бедра;  $l_2$  – длина голени;  $\beta_i$  – угол между бедром и осью  $Oz$ ;  $\gamma_i$  – угол между бедром и голенью;  $\alpha$  – угол поворота плоскости ноги вокруг оси, проходящей через точку подвеса ноги параллельно оси  $Oz$ . Непростая зависимость правых частей (1.1) от индекса  $i$  обусловлена требованием, чтобы углы, определяющие положение стопы в осях  $Oxyz$  для разных сторон робота, отсчитывались единообразно в положительном направлении, если смотреть со стороны положительного направления осей  $Ox$  и  $Oz$  (рис. 1, а и б).

Обозначим через  $(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)$  абсолютные координаты точки  $O$ . Тогда абсолютные координаты стоп ног примут вид

$$\xi_i^f = \xi_0 + x_i + q_{xi}, \quad \eta_i^f = \eta_0 + y_i + q_{yi}, \quad \zeta_i^f = \zeta_0 + z_i + q_{zi}.
 \tag{1.2}$$

Из формул (1.1) видно, что положение стопы, при котором  $\xi_i^f = \xi_0 + x_i$  и  $\eta_i^f = \eta_0 + y_i$ , называется особым. Во избежание неприятностей, связанных с вырождением уравнений (1.1), потребуем, чтобы при перешагивании через зону препятствия было выполнено ограничение

$$\left| \eta_i^f - \eta_0 \right| \geq c' > b, \quad i = \overline{1, n},
 \tag{1.3}$$

где  $c'$  – постоянная. В дальнейшем предполагается, что точки опоры ног каждой из сторон принадлежат соответственно левой и правой прямолинейным следовым колеям, параллельным боковым сторонам корпуса.

В процессе движения какие-то ноги опираются о грунт, а какие-то находятся в состоянии переноса. Грунт может быть неровным. Вертикальные проекции точек опоры на плоскость  $O_1\xi\eta$  образуют плоский выпуклый опорный многоугольник  $\mathcal{D}$  как минимальное множество точек на плоскости  $O_1\xi\eta$ , содержащее проекции всех точек опоры робота. Позиция робота называется статически устойчивой [4], если его центр масс, рассчитанный с учетом массивности корпуса и всех ног, проектируется строго внутрь опорного многоугольника  $\mathcal{D}$ :

$$C_{\xi\eta} \in (\mathcal{D} \setminus \partial\mathcal{D}),
 \tag{1.4}$$

где  $C_{\xi\eta}$  – проекция центра масс аппарата (с учетом всех его ног) на плоскость  $O_1\xi\eta$ ,  $\partial\mathcal{D}$  – граница множества  $\mathcal{D}$ .

При движении по равнинной и в среднем горизонтальной местности естественным представляется положение корпуса, когда плоскости  $O_1\xi\eta$  и  $Oxy$  параллельны. Пусть это ограничение удовлетворено. Приняв во внимание неравенства (1.3) и условие сонаправленности осей координат, заключаем, что тогда для выполнения условия статической устойчивости необходимо, чтобы в число вершин опорного многоугольника входили опорные точки ног каждой из сторон [2].

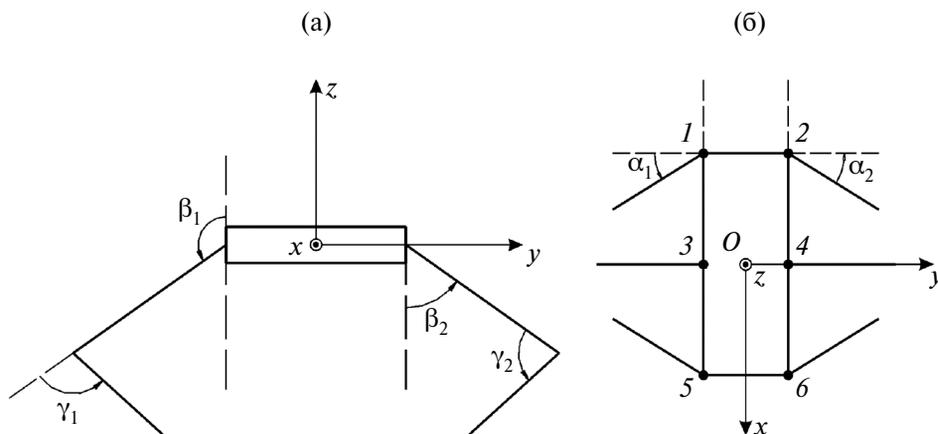


Рис. 1. Угловые координаты робота: а – вид спереди, б – вид сверху.

Зону препятствия  $\mathcal{Z}$  можно выразить формулой

$$\mathcal{Z} = \{(\xi, \eta) : \xi_m < \xi < \xi_M\}, \quad d = \xi_M - \xi_m, \quad (1.5)$$

так что

$$(\xi_i^f, \eta_i^f) \notin \mathcal{Z}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (1.6)$$

Рассмотрим ситуацию, когда робот вплотную подошел к передней границе  $\xi_m$  зоны препятствия и должен переправиться на другую сторону зоны. Это означает, что вначале переправы будет выполнено  $\xi_0 + a(k-1)/2 \leq \xi_m$ , а в конце переправы должно быть выполнено  $\xi_M \leq \xi_0 - a(1-k)/2$ . Из множества  $\mathcal{G}$  всех последовательностей постановки ног и движений корпуса требуется указать последовательность, которая позволит роботу достичь

$$\max_{\mathcal{G}}(d) \quad (1.7)$$

при выполнении условий (1.3), (1.4) и (1.6).

**2. Запас статической устойчивости.** Оценим величину отклонения центра масс шагающего робота от центра масс его корпуса. В дальнейшем предполагается, что вертикальная проекция центра масс корпуса вместе с шасси попадает в центр шасси. Координата  $\xi_c$  центра масс робота определяется формулой

$$\xi_c = \frac{1}{M} \left( m_0 \xi_0 + m \sum_{i=1}^n \xi_{ci} \right) = \xi_0 + \frac{m}{M} \sum_{i=1}^n (\xi_{ci} - \xi_0),$$

где  $m_0$  – масса корпуса;  $m$  – масса одной ноги;  $M = m_0 + mn$  – масса всего аппарата;  $\xi_{ci}$  – координаты центров масс ног. Следовательно, в соответствии с формулами (1.2) при симметричном расположении точек подвеса ног получим

$$\xi_c = \xi_0 + \frac{m}{M} \sum_{i=1}^n (x_i + q_{xi}^c) = \xi_0 + \frac{m}{M} \sum_{i=1}^n q_{xi}^c, \quad (2.1)$$

где  $q_{xi}^c$  – координаты центров масс ног относительно их точек подвеса.

Для планирования перешагивания через запрещенные зоны в режиме статической устойчивости необходимо оценивать положение центра масс робота относительно критической границы опорного многоугольника, в окрестности которой устойчивость шагающего аппарата может быть нарушена. Как показывает формула (2.1), положение центра масс аппарата отклоняется от центра корпуса в некоторых пределах, зависящих от конструктивных особенностей ног и их положений относительно корпуса. По положению центра шасси можно надежно судить о критичности положения центра масс аппарата, если эти пределы гарантированно ограничивают область возможных положений центра масс аппарата и достаточно близки по  $x$ -координате. Близость указанных пределов в критических для потери статической устойчивости случаях с заданной точностью  $\varepsilon$  обеспечивается посредством надлежащей балансировки позы аппарата.

**Определение 1.** Позу аппарата назовем продольно  $\varepsilon$ -сбалансированной, если выполнено неравенство

$$\left| \sum_{i=1}^n q_{xi}^c \right| \leq \varepsilon \frac{M}{m}. \quad (2.2)$$

Например, для шестиногого аппарата любая поза, удовлетворяющая соотношениям

$$q_{x1} = q_{x2} = -q_{x5} = -q_{x6}, \quad q_{x3} = q_{x4} = 0, \quad (2.3)$$

является абсолютно продольно  $\varepsilon$ -сбалансированной для любого  $\varepsilon$  и любой массы ног. Еще один пример абсолютно продольно  $\varepsilon$ -сбалансированной позы доставляется равенствами

$$q_{x3} = q_{x4} = -q_{x5} = -q_{x6}, \quad q_{x1} = q_{x2} = 0.$$

Другой пример выглядит так:

$$q_{x1} = q_{x2} = -q_{x3} = -q_{x4}, \quad q_{x5} = q_{x6} = 0.$$

Формула (2.2) представляет собой условие, при выполнении которого для оценки возможности сохранения продольной статической устойчивости можно пользоваться критерием близости вертикальной проекции центра шасси к границе опорного многоугольника при заданном запасе статической устойчивости  $\varepsilon$ .

**О п р е д е л е н и е 2.** Движение робота считается продольно статически устойчивым с запасом  $\varepsilon$ , если в любой момент времени выполнено условие

$$\{(\xi, \eta_0) : \xi_0 - \varepsilon \leq \xi \leq \xi_0 + \varepsilon\} \in \mathcal{D}. \quad (2.4)$$

Которое означает, что  $\xi$ -проекция центра шасси попадает внутрь опорного многоугольника вместе со своей  $\varepsilon$ -окрестностью. Ясно, что критерий будет физически осмысленным для достаточно малых  $\varepsilon$ . Например, он имеет геометрический смысл при значениях  $\varepsilon$ , не превышающих продольный размер опорного многоугольника в любой момент времени. При использовании критерия (2.4) предполагается, что  $\xi_c$ -координата центра масс робота из-за движения ног может оказаться в любой точке отрезка  $[\xi_0 - \varepsilon, \xi_0 + \varepsilon]$ , но заранее неизвестно в какой.

Можно сказать, что при значительной массе ног формула (2.2) определяет меру симметричности позы аппарата, при которой критерий (2.4) надежно работает. Или, например, насколько масса отдельной ноги должна быть меньше суммарной массы всего аппарата, чтобы критерий (2.4) можно было использовать при любых положениях ног относительно их точек подвеса.

В предположении, что звенья  $l_1$  и  $l_2$  однородны, координаты центров масс ног относительно их точек подвеса даются выражениями

$$\begin{aligned} q_{xi}^c &= x_i^c - x_i = \frac{1}{2} \left[ (-1)^{i+1} l_1 \sin \beta_i \sin \alpha_i + \frac{m_2}{m} q_{xi} \right], \\ q_{yi}^c &= y_i^c - y_i = \frac{1}{2} \left[ (-1)^i l_1 \sin \beta_i \cos \alpha_i + \frac{m_2}{m} q_{yi} \right], \\ q_{zi}^c &= z_i^c - z_i = \frac{1}{2} \left[ (-1)^{i+1} l_1 \cos \beta_i + \frac{m_2}{m} q_{zi} \right], \quad i = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где  $m = m_1 + m_2$  – масса ноги;  $m_1$  – масса бедра;  $m_2$  – масса голени. Если для ног с точками подвеса, симметричными относительно плоскости  $Oxz$ , принять

$$\alpha_{2j-1} = -\alpha_{2j}, \quad \beta_{2j-1} = \pi - \beta_{2j}, \quad \gamma_{2j-1} = \pi - \gamma_{2j}, \quad j = \overline{1, k},$$

то соответствующая пара ног расположится симметрично относительно плоскости  $Oxz$ , а центр масс такой пары будет иметь координаты

$$\begin{aligned} x_{2j-1,2j}^c &= \frac{1}{2} \left( l_1 \sin \beta_{2j-1} \sin \alpha_{2j-1} + \frac{m_2}{m} q_{x(2j-1)} \right), \quad y_{2j-1,2j}^c = 0, \\ z_{2j-1,2j}^c &= \frac{1}{2} \left( l_1 \cos \beta_{2j-1} + \frac{m_2}{m} q_{z(2j-1)} \right), \quad j = \overline{1, k}. \end{aligned}$$

Симметричное расположение ног правой и левой сторон робота относительно плоскости  $Oxz$  характерно для различных вариантов походки “галоп”, часто используемой для преодоления препятствий. С точки зрения статической устойчивости интерес представляет величина  $x_{2j-1,2j}^c$ , которую преобразуем следующим образом:

$$\begin{aligned} x_{2j-1,2j}^c &= \frac{1}{2} \left( \chi_{2j-1} + \frac{m_2}{m} \right) q_{x(2j-1)}, \\ \chi_{2j-1} &= \frac{l_1 \sin \beta_{2j-1}}{l_1 \sin \beta_{2j-1} + l_2 \sin(\beta_{2j-1} + \gamma_{2j-1})}, \quad j = \overline{1, k}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где параметр  $\chi_{2j-1}$  есть отношение модуля проекции бедра на плоскость  $Oxy$  к расстоянию между стопой и осью вращения ноги.

Если передние и задние ноги сбалансированы относительно середины корпуса:

$$q_{x(2j-1)} = q_{x(2j)} = -q_{x[2(k-j)+1]} = q_{x[2(k-j+1)]}, \quad j = \overline{1, \lfloor (k+1)/2 \rfloor - 1}, \quad k > 2,$$

где символом  $\lfloor \dots \rfloor$  обозначена целая часть числа по недостатку, то при нечетном  $k$  из формулы (2.1) следует

$$\xi_c = \xi_0 + \frac{m}{M} \left( \chi_k + \frac{m_2}{m} \right) q_{xk}.$$

Требование надежности статической устойчивости, когда передняя граница опорного многоугольника образована средними ногами и принадлежит прямой  $\xi = \xi_m$ , запишем в виде

$$\xi_m - \xi_c = \xi_m - \xi_0 - \frac{m}{M} \left( \chi_k + \frac{m_2}{m} \right) (\xi_m - \xi_0) \geq \varepsilon_0.$$

Откуда

$$\xi_m - \xi_0 \geq \left[ 1 - \frac{m}{M} \left( \chi_k + \frac{m_2}{m} \right) \right]^{-1} \varepsilon_0.$$

Последнее неравенство будет гарантированно выполнено, если потребовать

$$\xi_m - \xi_0 \geq \varepsilon = \lambda \varepsilon_0, \quad \lambda = \left[ 1 - \frac{m}{M} \left( \frac{l_1}{c} + \frac{m_2}{m} \right) \right]^{-1} > 1, \quad (2.7)$$

поскольку  $\max \chi_k = l_1 / c$ , где  $c$  – расстояние от следовой колеи до проекции точки подвеса ноги на горизонтальную плоскость. Как и следовало ожидать, для центра корпуса запас статической устойчивости должен быть больше, чем запас для расчетного центра масс всего робота.

**3. Максимальная ширина зоны препятствия.** Длину абсолютного шага отдельной ноги будем оценивать как расстояние между ее последовательными точками опоры в неподвижной системе координат  $O_1 \xi \eta \zeta$ . Из (1.2) видим, что указанное расстояние зависит от перемещения корпуса и от перемещения стопы относительно корпуса. Расстояние между последовательными точками опоры в координатах  $Oxyz$ , связанных с корпусом, будем называть длиной относительного шага. Возможное положение стопы относительно точки подвеса соответствующей ноги определено формулами (1.1) и (1.3) и описывается соотношениями

$$q_{xi}^2 + q_{yi}^2 + q_{zi}^2 = \rho_i^2 = l_1^2 + l_2^2 + (-1)^{i+1} 2l_1 l_2 \cos \gamma_i, \quad (-1)^i q_{yi} > c = c' - b > 0. \quad (3.1)$$

В координатных осях  $Oxyz$  при фиксированном значении  $\gamma_i$  возможные положения  $i$ -й стопы принадлежат соответствующему сферическому сегменту, отсеченному плоскостью  $(-1)^i y = c'$  от сферы радиуса  $\rho_i$  с началом в точке подвеса  $i$ -й ноги.

Из формул (3.1) и (1.1) следует, что проекция  $i$ -й стопы на ось  $Ox$  может быть выражена формулой

$$x_{xi}^f = x_i + q_{xi} = x_i \pm L_{xi}, \quad L_{xi} = \sqrt{\rho_i^2 - q_{yi}^2 - q_{zi}^2}, \quad (3.2)$$

где выбор знака зависит от значения угла  $\alpha_i$ . Рассмотрим случай, когда шагающий аппарат преодолевает препятствие, двигаясь в положительном направлении оси  $Ox$ . Тогда вопрос о возможности опоры  $i$ -й стопы о какую-либо точку на грунте с абсциссой  $\xi$  связан с анализом справедливости включения

$$(\xi - \xi_0 - x_i) \in [-L_i, L_i], \quad L_i = \max_{\gamma_i, q_{yi}, q_{zi}} L_{xi}. \quad (3.3)$$

Если включение (3.3) справедливо, то указанную точку можно оставить в качестве предположительно возможной точки опоры. Если же это включение не выполнено, то на такую точку в данный момент опереться не получится.

В соответствии с выбором системы координат  $Oxyz$  имеем  $q_{zi} = \zeta_i^f - \zeta_0$ . Если  $\zeta_i^f$  – высота предполагаемой точки опоры, то тогда  $|q_{zi}|$  характеризует клиренс аппарата, т.е. свободный просвет между корпусом и опорной поверхностью, которым шагающий аппарат может управлять в определенных пределах. Пусть опорная поверхность задана формулой  $\zeta = F(\xi, \eta)$ . Обозначим через

$$\bar{\zeta}_0 = \max_{\xi, \eta \in \mathcal{E}} F(\xi, \eta) + \delta$$

$\zeta$ -координату центра шасси, допустимую с точки зрения безопасности движения, где постоянная  $\delta$  учитывает минимально безопасную величину клиренса,  $\mathcal{E}$  – ограниченная область плоскости  $O\xi\eta$ , содержащая следовые колеи, на которых планируются положения точек

опоры робота. Ясно, что чем меньше эта область, тем аккуратнее будет выбран параметр  $\bar{\xi}_0$ . Из формул (3.2) и (3.1) найдем

$$\mathcal{L}(\xi_f, \eta^*) = \sqrt{(l_1 + l_2)^2 - c^2 - [\bar{\xi}_0 - F(\xi_f, \eta^*)]^2}, \quad \eta^* = \eta_0 + (-1)^i(b + c). \quad (3.4)$$

Это означает, что максимальная величина  $\mathcal{L}(\xi_f, \eta^*)$  выноса опорной стопы в направлении оси  $Ox$  зависит от координат точки предполагаемой опоры и достигается, когда нога предельно выпрямлена:

$$(-1)^{i+1} \cos \gamma_i = 1 \rightarrow \gamma_i = \frac{\pi}{2} [1 + (-1)^i] \rightarrow \max_{\gamma_i} \rho_i = l = l_1 + l_2.$$

Предполагаемая точка опоры расположена на следовой колее, параллельной корпусу и отстоящей от него на предельно близкое допустимое расстояние  $c$ , а высота корпуса над предполагаемой точкой опоры настолько мала, насколько это соответствует допустимому пределу безопасного перемещения. Точное значение координаты  $\xi_f$  в формуле (3.4) для ноги с номером  $i$  можно найти из уравнения

$$\xi_f - \xi_0 - x_i = \pm \mathcal{L}(\xi_f, \eta^*) = \pm \sqrt{(l_1 + l_2)^2 - c^2 - [\bar{\xi}_0 - F(\xi_f, \eta^*)]^2},$$

и это будут абсолютные  $\xi$ -координаты предельных точек на опорной поверхности, до которых нога может дотянуться из заданного положения корпуса. Если же, наоборот, задать значение  $\xi_f$ , то тогда можно легко найти значение  $\xi_0$ , соответствующее положению корпуса, при котором в зависимости от знака перед радикалом эта точка окажется предельно достижимой либо спереди от соответствующей точки подвеса, либо позади нее.

Назовем передней границей опорного многоугольника отрезок прямой, образованный ближайшими к зоне препятствия двумя точками опоры ног, одна из которых находится с правой, а другая с левой стороны корпуса, если смотреть в направлении оси  $Ox$ . Обозначим  $\xi$ -координаты правой и левой точек опоры передней границы опорного многоугольника через  $\xi_r$  и  $\xi_l$  соответственно. Согласно принятым ограничениям на конфигурацию робота, обеспечивающим возможность выполнения шага максимальной длины для всех ног (см. формулу (3.4)), точка  $O$  проектируется в середину отрезка между следовыми колеями. Пусть прямая  $\eta = \eta_l = \eta_0 - b + c$  — следовая колея для левых ног робота, а  $\eta = \eta_r = \eta_0 + b - c$  — следовая колея для правых ног робота. Граница  $\xi_M$  достижима для передних ног, если на следовых колеях найдутся точки с координатой  $\xi_f$ , для которых выполнено неравенство

$$\xi_0 + a \frac{k-1}{2} + \mathcal{L}(\xi_f, \eta^*) \geq \xi_M, \quad (3.5)$$

причем равенство достигается, когда  $\xi_f = \xi_M$ . Обозначим

$$\mathcal{L}_M = \max(\mathcal{L}(\xi_M, \eta_l), \mathcal{L}(\xi_M, \eta_r)) \quad (3.6)$$

и учтем, что  $\xi_M = \xi_m + d$ . Равенство левой и правой частей формулы (3.5) для заданного значения  $\xi_0$  обеспечивается, когда  $d$  принимает предельно большое значение  $d = \bar{d}$ . Следовательно,

$$\xi_0 - \xi_m + a \frac{k-1}{2} + \mathcal{L}_M = \bar{d}(\xi_0). \quad (3.7)$$

Справедлива следующая лемма

**Лемма 1.** Максимум  $\Delta = \max_{\xi_0} \bar{d}$  ширины зоны препятствия, преодолемого рассматриваемым многоногим статически устойчивым роботом, достигается, если в момент постановки передних ног на линию  $\xi = \xi_M$  передняя граница опорного многоугольника удовлетворяет условию

$$(\xi_r, \xi_l) = \operatorname{argmin}_{\xi_r \leq \xi_m, \xi_l \leq \xi_m} \left( \xi_m - \frac{\xi_r + \xi_l}{2} \right). \quad (3.8)$$

**Доказательство.** Поскольку передняя граница опорного многоугольника линейна, то для выполнения условия статической устойчивости необходимо, чтобы было

$$\xi_c < \frac{\xi_r + \xi_l}{2} \leq \xi_m \rightarrow \xi_c - \xi_m < \frac{\xi_r + \xi_l}{2} - \xi_m \leq 0.$$

Отсюда ясно, что для возможности увеличения допустимой ширины препятствия (3.7) следует в конце переноса передних ног через зону препятствия выбирать точки опоры для передней границы опорного многоугольника так, чтобы было удовлетворено требование (3.8). Лемма 1 доказана.

**Теорема 1.** Максимальная ширина  $\Delta$  зоны препятствия, преодолимого рассматриваемым многоногим роботом, ограничена неравенством

$$\Delta \leq \max_{\xi_r \leq \xi_m, \xi_l \leq \xi_m} \frac{\xi_r + \xi_l}{2} - \xi_m - \frac{m}{M} \sum_{i=1}^n q_{xi}^c + a \frac{k-1}{2} + \mathcal{L}_M, \quad (3.9)$$

т.е. многоногий робот описанной выше конструкции в режиме статической устойчивости не может преодолеть зону препятствия, ширина которой на момент окончания переноса передних ног превосходит сумму половины длины корпуса робота и максимально возможного выноса стоп передних ног в направлении оси  $Ox$  за вычетом минимально достижимого расстояния от середины передней границы опорного многоугольника до переднего края зоны препятствия и  $x$ -координаты центра масс всех ног относительно корпуса робота.

**Доказательство.** До начала перешагивания через зону препятствия все точки опоры имеют  $\xi$ -координаты, меньшие  $\xi_m$ . Корпус робота ориентирован так, что ось  $Ox$  направлена к границе зоны  $\xi = \xi_m$  и перпендикулярна к ней. Ясно, что такое расположение корпуса позволяет наилучшим образом использовать его габариты для переправы через зону, потому что  $a(k-1) > b$ . Из формулы (3.7) следует, что

$$\xi_0 - \frac{\xi_r + \xi_l}{2} + \frac{\xi_r + \xi_l}{2} - \xi_m + a \frac{k-1}{2} + \mathcal{L}_M = \bar{d}(\xi_0). \quad (3.10)$$

Но, согласно формуле (2.1), найдем

$$\xi_0 < \frac{\xi_r + \xi_l}{2} - \frac{m}{M} \sum_{i=1}^n q_{xi}^c. \quad (3.11)$$

Поэтому

$$\xi_0 - \frac{\xi_r + \xi_l}{2} < -\frac{m}{M} \sum_{i=1}^n q_{xi}^c.$$

Кроме того, разность  $(\xi_r + \xi_l) / 2 - \xi_m$  не положительна, поскольку рассматривается этап, когда робот еще не перенес ноги через препятствие. Вместе с тем эта разность по модулю тем меньше, чем ближе расположены передние опорные точки к зоне препятствия. Теорема 1 доказана.

**Замечание 1.** Если в момент постановки передних ног робота на тыльную границу препятствия робота используется абсолютно сбалансированная поза, т.е.

$$\sum_{i=1}^n q_{xi}^c = 0,$$

то тогда ширина преодолимой зоны препятствия ограничена неравенством

$$\Delta \leq \max_{\xi_r \leq \xi_m, \xi_l \leq \xi_m} \frac{\xi_r + \xi_l}{2} - \xi_m + a \frac{k-1}{2} + \mathcal{L}_M.$$

Вместе с тем если число ног достаточно велико, например,  $n \geq 8$ , то без ущерба для статической устойчивости некоторую часть ног можно употребить с целью увеличения допустимой зоны препятствия, смещая суммарный относительный центр масс этих ног в направлении, противоположном оси  $Ox$ . Если число ног относительно невелико ( $n \leq 6$ ), то указанная возможность практически отсутствует, поэтому требование абсолютной сбалансированности следует ослабить, заменив его требованием  $\varepsilon$ -сбалансированности позы. В таком случае следует допустить, что в пределах  $\xi_0 - \varepsilon \leq \xi_c \leq \xi_0 + \varepsilon$  координата  $\xi_c$  центра масс робота может принимать любое значение. Полагая, что требование сохранения статической устойчивости имеет приоритетное значение во всех обстоятельствах движения робота, будем в дальнейшем пользоваться критерием (2.4), гарантирующим при условии  $\varepsilon$ -сбалансированности позы статическую устойчивость робота. В результате получим ограничение

$$\Delta \leq \max_{\xi_r \leq \xi_m, \xi_l \leq \xi_m} \frac{\xi_r + \xi_l}{2} - \xi_m - \varepsilon + a \frac{k-1}{2} + \mathcal{L}_M, \quad (3.12)$$

которым и будем пользоваться при анализе возможности преодоления запрещенных для наступания зон шестиногими и четырехногими аппаратами. Параметр  $\varepsilon$  в данном случае

характеризует меру неуверенности в оценке расположения центра масс ног относительно их точек подвеса.

**4. Следовое расписание.** Для того чтобы убедиться, что приведенные в предыдущем разделе оценки ширины предельно допустимой зоны препятствия являются не улучшаемыми, следует указать следовое расписание, при котором они превращаются в равенство. Прделаем это для шестиногих и четырехногих аппаратов. Процесс преодоления зоны препятствия начинается в тот момент, когда робот подошел вплотную к зоне препятствия.

4.1. Процесс преодоления препятствия шестиногим аппаратом.

**Лемма 2.** Для преодоления шестиногим аппаратом зоны препятствия максимальной ширины передние ноги следует переносить через препятствие одновременно.

**Доказательство.** Пусть передние ноги переносятся через препятствие последовательно. Тогда оставшаяся в опоре передняя нога будет ограничивать продвижение корпуса над зоной препятствия и тем самым будет мешать дотягиванию передних ног до точек опоры на границе  $\xi = \xi_M$  зоны. Лемма 2 доказана.

**Следствие 1.** При одновременном переносе передних ног через препятствие передняя граница опорного многоугольника формируется средними ногами.

**Следствие 2.** Перед перешагиванием через предельно широкую зону препятствия точки опоры передних ног следует ставить на фронтальную границу зоны  $\xi = \xi_m$ .

**Доказательство.** При переносе передних ног передняя граница опорного многоугольника формируется точками опоры средних ног, но эти точки опоры не могут располагаться впереди точек опоры передних ног. Вместе с тем при переносе передних ног проекция центра масс на горизонтальную плоскость не может выйти за пределы передней границы опорного многоугольника, образованной средними ногами. Следствие 2 доказано.

**Походка “след в след”** возникает, когда точки опоры соседних ног одной стороны для последовательных шагов совпадают. Для того чтобы походка “след в след” могла быть реализована при движении по всей поверхности  $\zeta = F(\xi, \eta)$ , должно быть выполнено общее конструктивное ограничение:

$$a \leq 2 \min_{\xi, \eta \in \mathcal{E}} \mathcal{L}(\xi, \eta). \quad (4.1)$$

Заметим, что в реальности, когда звенья ног имеют конкретные физические размеры, а планируемая точка опоры еще занята предыдущей ногой, походку “след в след”, строго говоря, практически реализовать невозможно без пересечения соседних ног одной стороны корпуса. Если все же необходимо применить такую походку, то планируемую точку опоры следует смещать по координате  $\eta$  в ту или другую сторону на расстояние, не меньшее, чем толщина голени. В дальнейшем для оценок максимальной допустимой ширины препятствия будем пользоваться формулой (4.1), считая, что указанная походка при незначительном боковом смещении планируемых точек опоры не окажет ощутимого влияния на эти оценки.

Пусть условие (4.1) нарушено. Тогда в области  $\mathcal{E}$ , где происходит движение аппарата, найдется такая точка поверхности, до которой последующая нога не сможет дотянуться, если на нее опирается соседняя предыдущая. Случай, когда точка опоры последующей ноги оказывается впереди предыдущей, в дальнейшем рассматриваться не будет в связи с тем, что тогда для работа рассматриваемой конструкции при переносе последующей ноги, очевидно, может возникнуть взаимное пересечение соседних ног, что недопустимо.

Походка “след в след” обладает набором интересных автотомодельных качеств, облегчающих анализ необходимых условий статической устойчивости движения шагающего аппарата (ША) в целом [2]. Вместе с тем ее совсем необязательно использовать повсеместно. Учитывая тот факт, что возможность постановки ног “след в след” рассматривается лишь с точки зрения преодоления зоны препятствия максимальной ширины, условие (4.1) можно ослабить:

$$a \leq a_e, \quad (4.2)$$

где

$$a_e = 2 \min \left( \min_{\xi, \eta_r \in \mathcal{E}} \mathcal{L}(\xi, \eta), \min_{\xi, \eta_l \in \mathcal{E}} \mathcal{L}(\xi, \eta) \right). \quad (4.3)$$

Другими словами, нас будет интересовать возможность организации движения «след в след» при расположении точек опоры на левой и правой следовых колесях. Ясно, что условие (4.2) является необходимым по отношению к условию (4.1).

Для простоты последующего анализа обратимся к варианту, когда движение происходит по ровной горизонтальной плоскости. В таком случае максимальные длины относительных шагов будут одинаковы для всех точек опоры и для всех ног. Обозначим через  $\mathcal{L}$  длину максимально возможного относительного полушага для этого случая. Тогда условие (4.3) можно переписать в виде

$$a_e = 2\mathcal{L}. \tag{4.4}$$

Представим половину длины корпуса  $a$  в виде

$$a = a_e + \sigma. \tag{4.5}$$

**Замечание 2.** Если  $\sigma \geq 0$ , взаимное пересечение соседних ног в точках, не совпадающих со стопами, отсутствует. При произвольном значении  $\sigma \in [-a_e, 0)$  точки подвеса соседних ног могут оказаться расположенными слишком близко, из-за чего будет существовать опасность взаимного пересечения звеньев соседних ног. Допустим, что найдется число  $\mu$ , такое, что  $0 < \mu < a_e$ , для которого неравенство  $\sigma \geq -\mu$  исключает возможность взаимного пересечения звеньев соседних ног.

**Определение 3.** *Стандартной позицией* (рис. 2) шестиногого робота перед препятствием назовем позицию, когда передний край корпуса расположен над линией  $\xi = \xi_m$ , точки опоры ног имеют координаты:

$$\begin{aligned} \xi_5 = \xi_6 = \xi_m, \quad \xi_3 = \xi_4 = \xi_m - a, \quad \xi_1 = \xi_2 = \xi_m - 2a, \\ \eta_1 = \eta_3 = \eta_5 = \eta_0 - b - c, \quad \eta_2 = \eta_4 = \eta_6 = \eta_0 + b + c. \end{aligned}$$

В этой позиции центр масс робота совпадает с серединой шасси и имеет координаты

$$\xi_c = \xi_0 = \xi_m - a, \quad \eta_0.$$

Реализуемость движения “след в след” позволяет уточнить неравенство (3.12).

**Теорема 2.** Пусть  $-a_e < -\mu \leq \sigma \leq 0$ ,  $\mu > 0$ . Тогда если применяется критерий (2.4), то максимальная ширина  $\Delta$  зоны препятствия, которую шестиногий робот может преодолеть при движении по плоскости, выражается равенством

$$\Delta = a_e + \sigma - \varepsilon + \mathcal{L}, \tag{4.6}$$

где  $\varepsilon$  – запас статической устойчивости.

**Доказательство.** Как было установлено выше, перед началом перешагивания через зону препятствия точки опоры передних ног должны располагаться на прямой  $\xi = \xi_m$ . Условие (4.2), которое при  $\sigma \leq 0$  очевидно будет выполнено, обеспечивает возможность постановки средних ног в точки опоры передних, когда корпус частично продвигается за фронтальную границу  $\xi = \xi_m$  зоны препятствия на расстояние, при котором будет выполнено  $\xi_0 = \xi_m - \varepsilon$ . После этого передние ноги следует переносить в точки опоры на тыльную границу  $\xi = \xi_M$ . В этом случае

$$\frac{\xi_r + \xi_l}{2} = \xi_m,$$

и правая часть формулы (3.12) превращается в правую часть формулы (4.6).

Покажем теперь, что существует следовое расписание, обеспечивающее преодоление зоны препятствия ширины (4.6) без нарушения статической устойчивости. Пусть робот находится

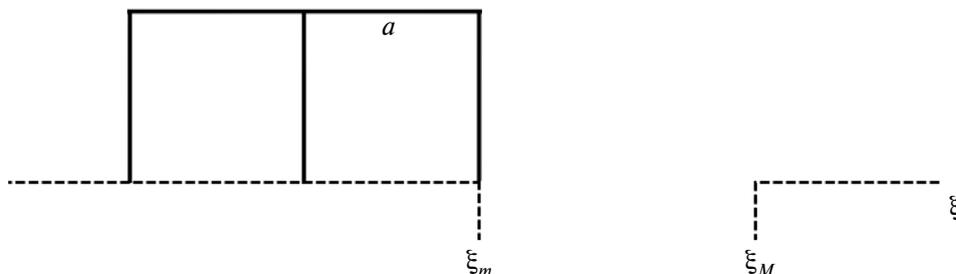


Рис. 2. Стандартная позиция ША перед препятствием.

в стандартной позиции перед препятствием в соответствии с определением 3. Прежде чем начать перенос передних ног, надо продвинуть корпус по направлению к линии  $\xi = \xi_M$  так, чтобы появилась возможность в том же направлении перенести задние ноги. Наиболее далеко корпус можно было бы продвинуть на расстояние максимального относительного полушага передних ног. Однако при этом проекция центра масс робота на горизонтальную плоскость должна все же находиться внутри опорного многоугольника, образованного передними и средними ногами, с заданным запасом  $\varepsilon$  статической устойчивости. Тогда передние ноги еще могут оставаться в опоре (рис. 3).

Теперь задние ноги могут одновременно сделать шаг величиной  $a - \mathcal{L} - \varepsilon$  (рис. 4). После этого точки опоры расположатся следующим образом:

$$\xi_1 = \xi_2 = \xi_m - a - \mathcal{L} - \varepsilon, \quad \xi_3 = \xi_4 = \xi_m - a, \quad \xi_5 = \xi_6 = \xi_m.$$

Затем стопы средних ног могут переместиться в точки опоры передних ног (рис. 5).

После этого все готово к началу переноса передних ног. Передние ноги переносятся одновременно с перемещением вперед корпуса так, чтобы к моменту окончания их переноса поза аппарата стала  $\varepsilon$ -сбалансированной и центр корпуса обеспечивал  $\varepsilon$ -запас передней статической устойчивости при опоре на средние и задние ноги. В полученной позиции задние ноги препятствуют дальнейшему продвижению корпуса вперед (рис. 6), но их нельзя переставить одновременно, так как центр корпуса робота не доходит до фронтальной границы  $\xi = \xi_m$ .

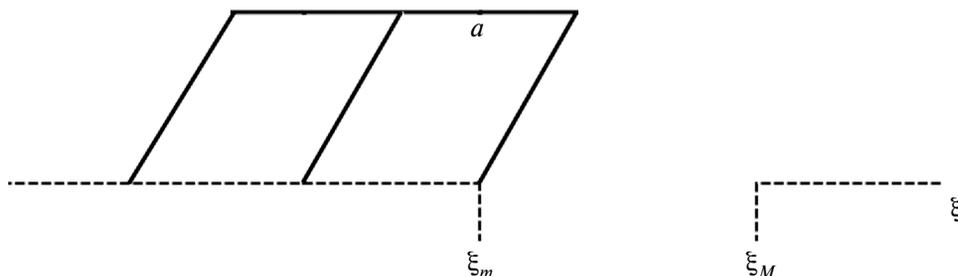


Рис. 3. Начальный этап.

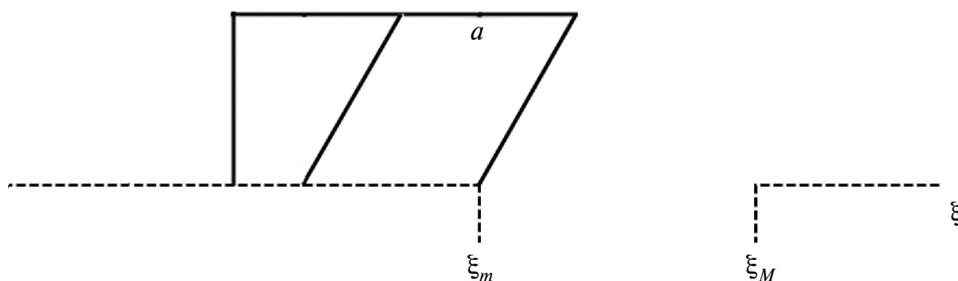


Рис. 4. Перенос задних ног.

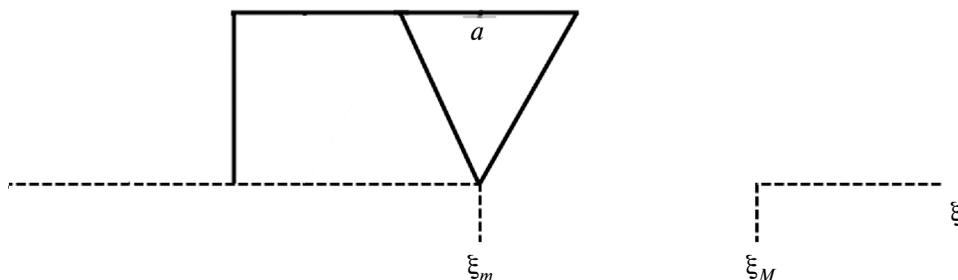


Рис. 5. Перенос средних ног.

Как только передние ноги встали на линию  $\xi = \xi_M$ , опорный многоугольник изменился, и можно начинать дальнейшее маневрирование. Например, можно немного отступить средними ногами назад, так чтобы центр корпуса попал внутрь опорного многоугольника, образованного передними и средними ногами, затем переместить стопы задних ног на расстояние  $\mathcal{L} + \varepsilon$  в сторону препятствия, вернуть средние ноги на передний край зоны препятствия и продвинуть корпус через препятствие на расстояние  $\mathcal{L} + \varepsilon$  (рис. 7). Точки опоры и центр корпуса будут иметь координаты

$$\xi_1 = \xi_2 = \xi_m - a, \quad \xi_3 = \xi_4 = \xi_m, \quad \xi_5 = \xi_6 = \xi_m + a + \mathcal{L} - \varepsilon = \xi_M, \quad \xi_0 = \xi_m + \mathcal{L}.$$

Затем задние ноги переносятся в точки опоры средних ног (рис 8). Корпус продвигается через препятствие на расстояние  $a - \mathcal{L} - \varepsilon$ , а средние ноги переносятся в точки опоры передних ног (рис. 9). Точки опоры и центр корпуса получают координаты

$$\xi_1 = \xi_2 = \xi_m, \quad \xi_3 = \xi_4 = \xi_M, \quad \xi_5 = \xi_6 = \xi_M, \quad \xi_0 = \xi_m + a - \varepsilon = \xi_M - \mathcal{L}.$$

Такой маневр возможен, поскольку в результате него расстояние между проекцией центра корпуса и задней границей препятствия оказывается равным  $\mathcal{L}$ . Полученная в итоге позиция робота симметрична относительно срединной плоскости препятствия позиции, соответствующей пятому шагу (рис. 8). Поэтому остается выполнить ряд очевидных шагов в обратном порядке с учетом указанной симметрии для завершения процесса перелога. Теорема 2 доказана.

Рассмотрим случай, когда движение “след в след” невозможно. Тогда справедлива теорема.

**Теорема 3.** Если применяется критерий (2.4) и  $\sigma > 0$ , то максимальная ширина зоны препятствия выражается формулой

$$\Delta = a_e + \mathcal{L} - \varepsilon, \quad \sigma \geq 0. \tag{4.7}$$

**Доказательство.** Преодоление зоны препятствия начинается из стандартной позиции. Корпус продвигается в направлении границы  $\xi = \xi_M$  на расстояние максимального относительного полушага передних ног. Потом сначала задние делают относительный шаг длиной

$$a - \sigma - \mathcal{L} - \varepsilon = \mathcal{L} - \varepsilon,$$

а затем средние ноги – максимальный относительный шаг в том же направлении, а стопы всех ног будут иметь координаты

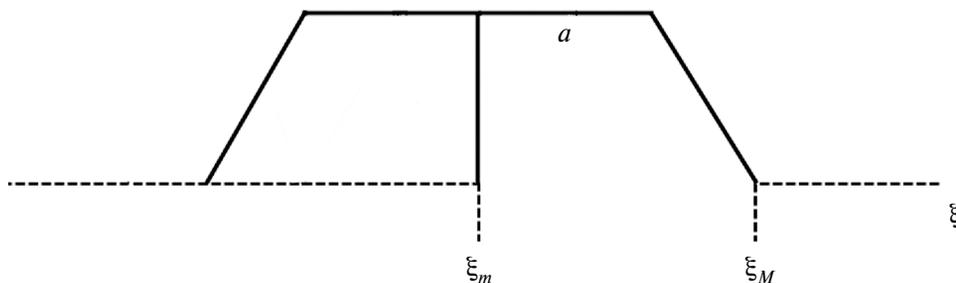


Рис. 6. Перенос передних ног с одновременным продвижением корпуса.

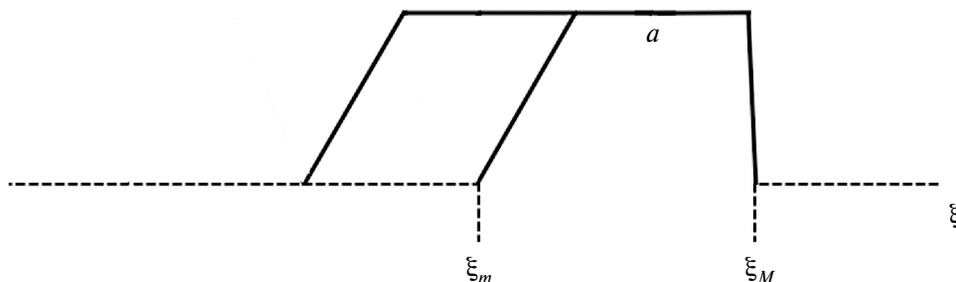


Рис. 7. Продвижение корпуса после постановки передних ног.

$$\xi_1 = \xi_2 = \xi_m - 2a + \mathcal{L} - \varepsilon, \quad \xi_3 = \xi_4 = \xi_m - \sigma, \quad \xi_5 = \xi_6 = \xi_m$$

соответственно (рис. 10).

Покажем, что если в полученной позе поднять передние ноги, то робот не сможет изменить переднюю границу опорного многоугольника, образованную средними ногами. Действительно, при поднятых передних ногах центр масс робота будет смещен относительно точек подвеса ног в сторону препятствия. Но смещение робота назад невозможно из-за того, что средние ноги, будучи в опоре, максимально вынесены вперед. Поэтому середина диагонали опорного многоугольника при поднятых передних ногах будет иметь координату  $\xi_d = \xi_m - \sigma - (a + \mathcal{L} + \varepsilon) / 2$ . Кроме того,  $\xi_0 = \xi_m - a + \mathcal{L}$ . Поэтому

$$\xi_0 - \xi_d = \frac{\mathcal{L} + \sigma + \varepsilon}{2} > 0.$$

С другой стороны, если перенести по очереди задние ноги на максимально возможный полшаг вперед, то середина диагонали сместится вперед и станет равной  $\xi'_d = \xi_m - (a + \varepsilon) / 2 - \sigma$ . Следовательно,

$$\xi_0 - \xi'_d = \frac{\sigma + \varepsilon}{2} > 0.$$

Другими словами, получается, что при поднятых передних ногах перенос средних ног без потери статической устойчивости невозможен, даже если любым образом менять положение точек опоры задних ног, и поэтому

$$\xi_3 = \xi_4 = \xi_m - \sigma = \operatorname{argmax}_{\xi_r \leq \xi_m, \xi_l \leq \xi_m} \frac{\xi_r + \xi_l}{2}.$$

Таким образом, при переносе передних ног передняя граница опорного многоугольника определяется точками опоры средних ног, имеющих координаты  $\xi_3 = \xi_4 = \xi_m - \sigma$ . Поэтому

$$\max_{\xi_r \leq \xi_m, \xi_l \leq \xi_m} \frac{\xi_r + \xi_l}{2} = \xi_m - \sigma,$$

и формула (3.12) дает

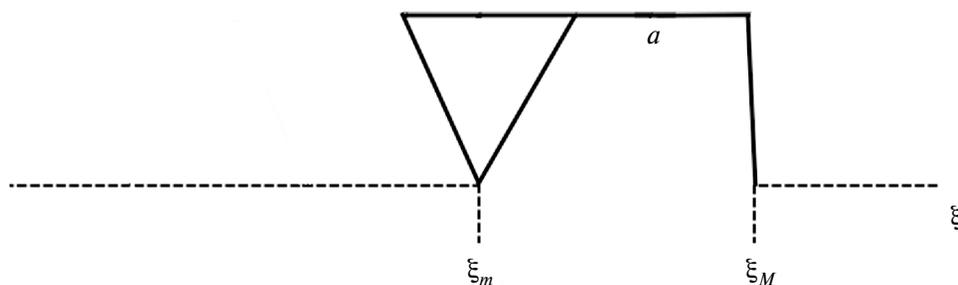


Рис. 8. Перенос задних ног.

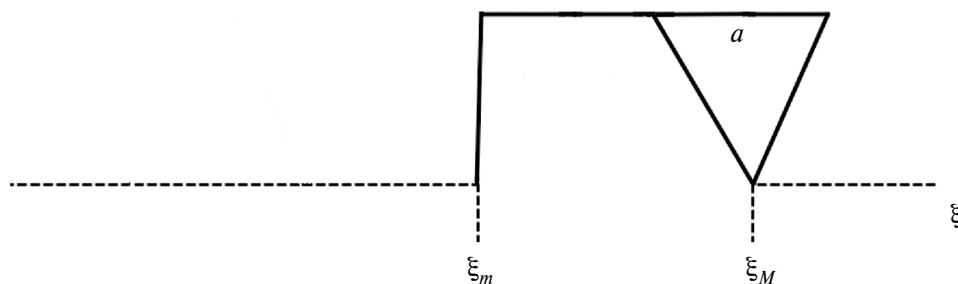


Рис. 9. Перенос средних ног с продвижением корпуса.

$$\Delta \leq a_e + \mathcal{L} - \varepsilon.$$

Но формула (3.12) была получена в предположении, что передние ноги робота, будучи предельно выпрямленными, ставятся на границу  $\xi = \xi_M$ . Допустим, что они уже там стоят (рис. 11). Тогда центр корпуса робота проектируется внутрь опорного многоугольника, образованного задними и средними ногами, и не доходит до передней границы этого многоугольника на заданный запас устойчивости  $\varepsilon$ .

Полученная позиция является  $\varepsilon$ -сбалансированной, и центр робота находится над опорным многоугольником, образованным средними и задними ногами. Поэтому задние ноги одновременно поднять невозможно. Невозможно также и сдвинуть корпус ни вперед, ни назад. Теперь необходимо выполнить несколько подготовительных действий, которые зависят от величины  $\sigma$ .

1. Пусть  $\sigma \geq \mathcal{L}$ . Тогда робот должен перенести средние ноги на один полушаг  $\mathcal{L}$  назад, переместить задние ноги в точки опоры с координатами  $\xi_1 = \xi_2 = \xi_m - a - \sigma - \varepsilon$ , затем поставить стопы средних ног в точки опоры  $\xi_3 = \xi_4 = \xi_m - \sigma + \mathcal{L}$ , после чего переместить корпус так, чтобы центр масс робота проектировался в точку, не доходящую до новых точек опоры средних ног на расстояние, равное запасу статической устойчивости  $\varepsilon$ , а потом перенести передние ноги на один относительный полушаг  $\mathcal{L}$  в направлении от задней границы зоны  $\xi = \xi_M$ . В итоге получится позиция, аналогичная той, которая изображена на рис. 11, но сдвинутая на один относительный полушаг  $\mathcal{L}$  в сторону препятствия и имеющая точки опоры

$$\xi_1 = \xi_2 = \xi_m - \sigma' - a - \mathcal{L} - \varepsilon, \quad \xi_3 = \xi_4 = \xi_m - \sigma', \quad \xi_0 = \xi_m - \sigma' - \varepsilon, \quad \xi_5 = \xi_6 = \xi_M + \mathcal{L},$$

где  $\sigma' = \sigma - \mathcal{L}$ .

2. Если окажется, что снова  $\sigma' \geq \mathcal{L}_m$ , то роботу следует повторять процедуру 1 до тех пор, пока в результате не окажется, что  $\sigma' < \mathcal{L}$ .

3. Пусть  $\sigma' < \mathcal{L}$ . Тогда роботу достаточно выполнить аналогичную волну переносов ног, переводящую его в позицию, при которой стопы средних ног находятся на передней границе препятствия (рис. 12):

$$\xi_1 = \xi_2 = \xi_m - a, \quad \xi_3 = \xi_4 = \xi_m, \quad \xi_0 = \xi_m - \varepsilon, \quad \xi_5 = \xi_6 = \xi_M + \sigma.$$

Далее робот должен продвинуть корпус вперед на расстояние  $\mathcal{L} + \varepsilon$ , оставив средние ноги в опоре на линии  $\xi = \xi_m$ . Затем следует перенести стопы задних ног, чтобы получить позицию (рис. 13)

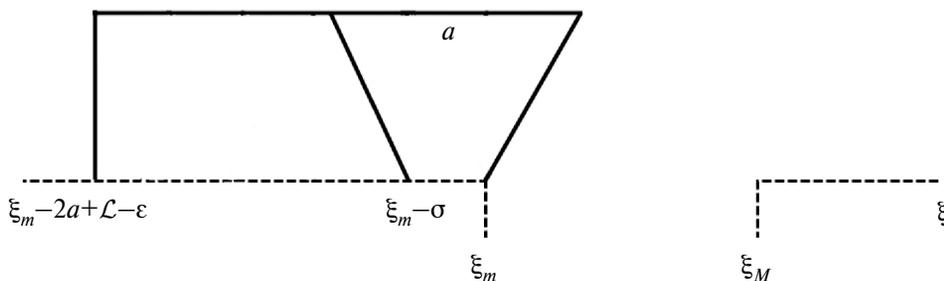


Рис. 10. Сдвиг корпуса, затем перенос задних, потом средних ног.

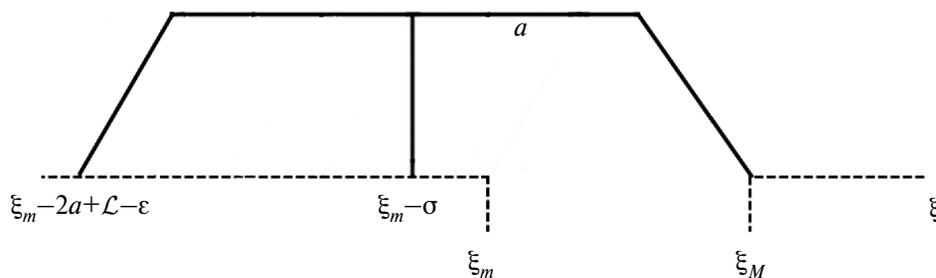


Рис. 11. Сдвиг корпуса и одновременный перенос передних ног.

$$\xi_1 = \xi_2 = \xi_m - \sigma, \quad \xi_3 = \xi_4 = \xi_m, \quad \xi_0 = \xi_m + \mathcal{L}, \quad \xi_5 = \xi_6 = \xi_M + \sigma. \quad (4.8)$$

Теперь стопы средних ног можно переместить на тыльную границу зоны препятствия с одновременным перемещением корпуса на расстояние  $\mathcal{L} - \varepsilon$ , чтобы получилась конфигурация

$$\xi_1 = \xi_2 = \xi_m - \sigma, \quad \xi_3 = \xi_4 = \xi_M, \quad \xi_0 = \xi_M - \mathcal{L}, \quad \xi_5 = \xi_6 = \xi_M + \sigma,$$

симметричная позиции (4.8) (рис. 13) относительно срединной линии зоны препятствия (рис. 14).

Следовательно, выполнив в обратном порядке симметричные действия относительно срединной линии, получим позицию

$$\xi_1 = \xi_2 = \xi_M, \quad \xi_3 = \xi_4 = \xi_M + a, \quad \xi_0 = \xi_M + a + \varepsilon, \quad \xi_5 = \xi_6 = 2a,$$

что и доказывает теорему. Теорема 3 доказана.

**Следствие 3.** Если длина шасси шестиногого робота позволяет выполнить походку “след в след” ( $-\mu \leq \sigma \leq 0$ ), то предельно допустимая ширина зоны препятствия линейно возрастает при увеличении длины шасси. Если движение “след в след” невыполнимо ( $\sigma > 0$ ), то предельно допустимая ширина зоны препятствия не зависит от длины шасси и принимает максимальное значение

$$\max_a \Delta = 3\mathcal{L} - \varepsilon. \quad (4.9)$$

Другими словами, при движении по ровной горизонтальной плоскости максимальная ширина преодолимой шагающим аппаратом зоны препятствия на запас  $\varepsilon$  статической устойчивости меньше утроенной максимальной длины относительного полушага или полтора полного относительного шага, и это не зависит от величины параметра  $\sigma > 0$  (рис. 15). Для преодоления зон, запрещенных для наступания, оптимальной является длина шасси  $a \geq a_e = 2\mathcal{L}$ .

**Доказательство.** Если движение ША происходит по ровной горизонтальной плоскости ( $F(\xi, \eta) \equiv 0$ ), то тогда  $\mathcal{L}(\xi, \eta) \equiv \mathcal{L}$ . Теперь достаточно сопоставить формулы (4.4), (4.6) и (4.7). Следствие 3 доказано.

**4.2. Преодоление зоны препятствия четырехногим аппаратом, движущимся по горизонтальной плоскости.** Для четырехного аппарата неравенство (3.12) принимает вид

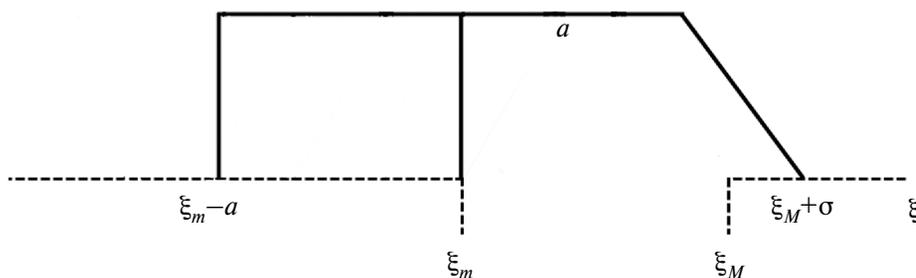


Рис. 12. Дошагивание средними ногами до границы зоны препятствия.

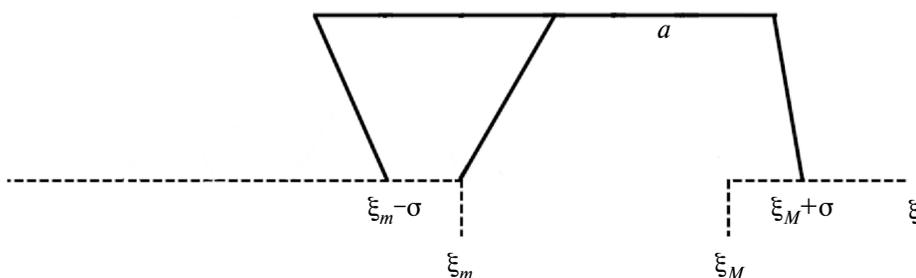


Рис. 13. Исходная позиция для переноса средних ног через препятствие.

$$\Delta < \max_{\xi_r \leq \xi_m, \xi_l \leq \xi_m} \frac{\xi_r + \xi_l}{2} - \xi_m - \varepsilon + \frac{a}{2} + \mathcal{L}_M. \quad (4.10)$$

По-прежнему обозначим  $a_e = 2\mathcal{L}$ ,  $a = a_e + \sigma$ . Справедлива следующая теорема о движении “след в след”.

**Теорема 4.** Пусть применяется критерий (2.4) и

$$-a_e < -\mu \leq \sigma \leq -2\varepsilon, \quad \mu > 0, \quad a \geq 4\varepsilon, \quad \mathcal{L} \geq \varepsilon.$$

Тогда максимальная ширина  $\Delta$  зоны препятствия, которую четырехногий робот может преодолеть при движении по плоскости, выражается равенством

$$\Delta = \frac{a_e + \sigma}{2} - \varepsilon + \mathcal{L}. \quad (4.11)$$

**Доказательство.** Движение начнем со стандартной позиции перед препятствием (рис. 16), а именно:

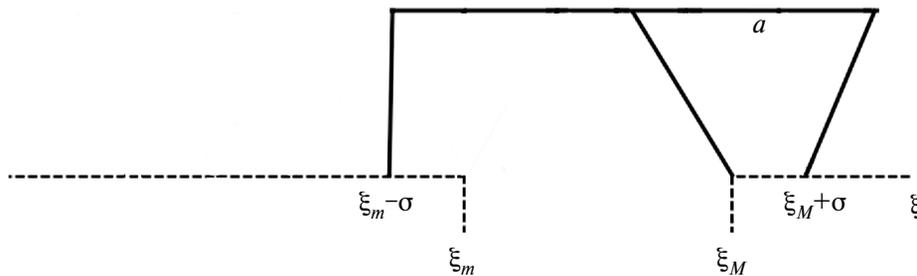
$$\xi_1 = \xi_2 = \xi_m - a, \quad \xi_3 = \xi_4 = \xi_m, \quad \xi_0 = \xi_m - \frac{a}{2}.$$

Из этой позиции продвинем корпус по направлению к тыльной границе препятствия так, чтобы центр корпуса не доходил до передней границы препятствия на расстояние  $\varepsilon$  (рис. 17; на этом и последующих рисунках изображены результаты тех действий, которые указаны в подписях к ним):

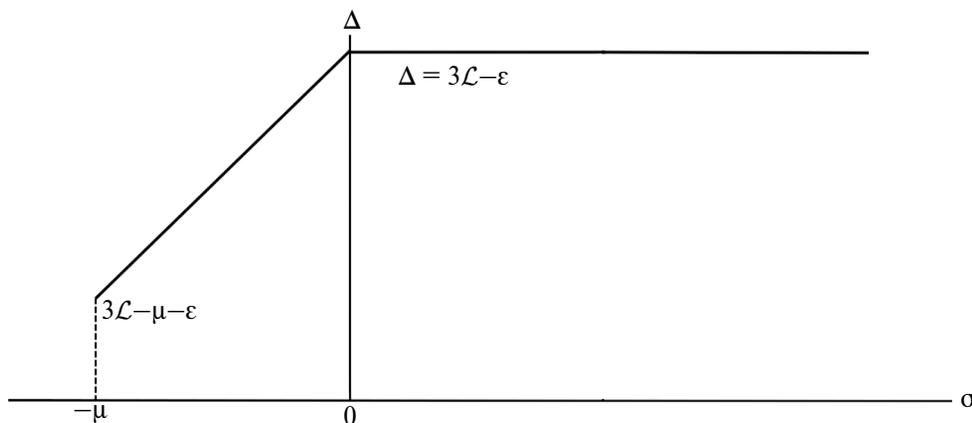
$$\xi_1 = \xi_2 = \xi_m - a, \quad \xi_3 = \xi_4 = \xi_m, \quad \xi_0 = \xi_m - \varepsilon.$$

Затем перенесем по очереди сначала левую заднюю, а затем правую заднюю ноги в новые точки опоры (рис. 18):

$$\xi_1 = \xi_m, \quad \xi_2 = \xi_m - \frac{a}{2} - 2\varepsilon, \quad \xi_3 = \xi_4 = \xi_m, \quad \xi_0 = \xi_m - \varepsilon.$$



**Рис. 14.** Симметричная позиция.



**Рис. 15.** Ширина преодолимой зоны препятствия.

Полученная поза неплохо сбалансирована, поскольку смещения центров масс первой и четвертой ног почти компенсируют друг друга. Первую ногу можно поместить на фронтальную границу, потому что  $\mathcal{L} \geq a/2 + \varepsilon$ . Следовательно, передняя граница опорного многоугольника не изменилась, а задняя граница образуется первой и второй ногами, и ее середина имеет координату  $(\xi_1 + \xi_2)/2 = \xi_m - a/4 - \varepsilon$ . Полученная координата из-за требования статической устойчивости должна быть меньше координаты центра корпуса по крайней мере на  $\varepsilon$ . Это будет выполнено при  $a > 4\varepsilon$ . Теперь можно начать перенос передних ног на тыльную границу препятствия. Сначала переносим правую переднюю ногу (рис. 19):

$$\xi_1 = \xi_m, \quad \xi_2 = \xi_m - \frac{a}{2} - 2\varepsilon, \quad \xi_3 = \xi_m + \frac{a}{2} + \mathcal{L} - \varepsilon, \quad \xi_4 = \xi_m, \quad \xi_0 = \xi_m - \varepsilon.$$

Далее, если перенести левую переднюю ногу на тыльную сторону препятствия, то для возможности дальнейшего переноса второй ноги, например при  $\sigma = -2\varepsilon$ , потребуется переместить центр корпуса вперед не меньше, чем на расстояние  $\mathcal{L}$ . Однако это невозможно, так как тогда точка подвеса второй ноги окажется удаленной от ее точки опоры на расстояние  $\mathcal{L} + \varepsilon$ , что недопустимо. Поэтому перед переносом левой передней ноги необходимо позаботиться о перестановке левой задней в более удобное положение. С этой целью корпус продвигается вперед на  $2\varepsilon$  так, чтобы его центр проектировался внутрь треугольника, образованного первой, третьей и четвертой ногами (рис. 20):

$$\xi_1 = \xi_m, \quad \xi_2 = \xi_m - \frac{a}{2} - 2\varepsilon, \quad \xi_3 = \xi_m + \frac{a}{2} + \mathcal{L} - \varepsilon, \quad \xi_4 = \xi_m, \quad \xi_0 = \xi_m + \varepsilon.$$

Затем переносится вторая нога вперед на расстояние  $2\varepsilon$  (рис. 21):

$$\xi_1 = \xi_m, \quad \xi_2 = \xi_m - \frac{a}{2}, \quad \xi_3 = \xi_m + \frac{a}{2} + \mathcal{L} - \varepsilon, \quad \xi_4 = \xi_m, \quad \xi_0 = \xi_m + \varepsilon,$$

после чего корпус возвращается назад на  $-2\varepsilon$ , и получается позиция, уже пригодная для переноса четвертой ноги (рис. 22):

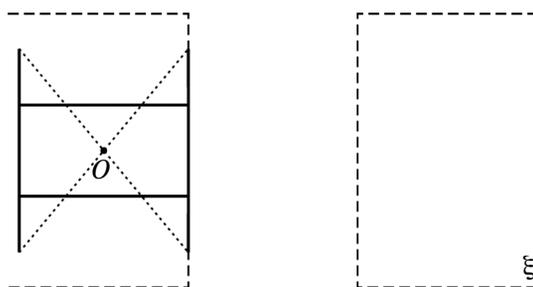


Рис. 16. Начальная позиция перед препятствием.

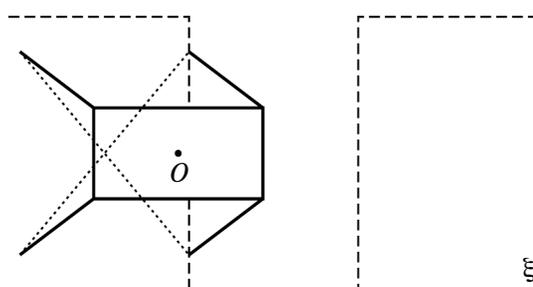


Рис. 17. Продвижение корпуса вперед.

$$\xi_1 = \xi_m, \quad \xi_2 = \xi_m - \frac{a}{2}, \quad \xi_3 = \xi_m + \frac{a}{2} + \mathcal{L} - \varepsilon, \quad \xi_4 = \xi_m, \quad \xi_0 = \xi_m - \varepsilon,$$

поскольку при переносе четвертой ноги передняя граница опорного многоугольника будет образована третьей и второй ногами. Середина этой границы имеет координату  $(\xi_2 + \xi_3) / 2 = \xi_m + \mathcal{L} / 2 - \varepsilon / 2$ , и эта координата должна быть больше, чем на  $\varepsilon$ , координаты центра корпуса. Поэтому должно быть  $\mathcal{L} > \varepsilon$ . После переноса четвертой ноги получится позиция (рис. 23)

$$\xi_1 = \xi_m, \quad \xi_2 = \xi_m - \frac{a}{2}, \quad \xi_3 = \xi_M = \xi_m + \frac{a}{2} + \mathcal{L} - \varepsilon, \quad \xi_4 = \xi_M, \quad \xi_0 = \xi_m - \varepsilon.$$

В этой позиции центр масс системы смещен вперед по сравнению с его положением в предыдущей позиции из-за выноса вперед передних ног. Поэтому ограничение на задний запас устойчивости ослабевает. Теперь надо поставить вторую ногу на фронтальную границу препятствия. Во время ее переноса задняя граница опорного многоугольника будет образована четвертой и первой ногами, а ее середина будет иметь координату

$$\frac{\xi_4 + \xi_1}{2} = \xi_m + \frac{1}{2} \left( \frac{a}{2} + \mathcal{L} - \varepsilon \right).$$

Для того чтобы во время переноса второй ноги обеспечивалась статическая устойчивость, корпус следует продвинуть вперед на величину

$$\frac{1}{2} (a / 2 + \mathcal{L} + 3\varepsilon) \leq \mathcal{L} + \varepsilon.$$

Выполнив указанное продвижение корпуса и последующий перенос второй ноги на переднюю границу препятствия, получим позицию (рис. 24):

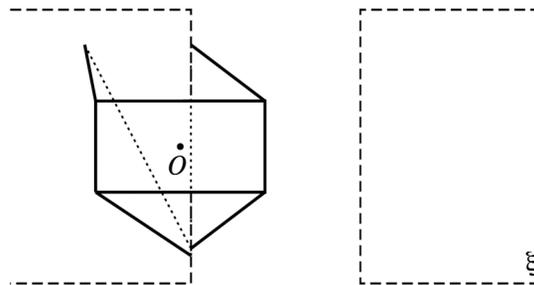


Рис. 18. Поочередный перенос задних ног.

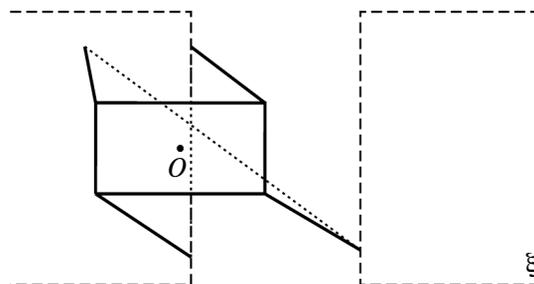


Рис. 19. Перенос правой передней ноги на тыльную границу препятствия.

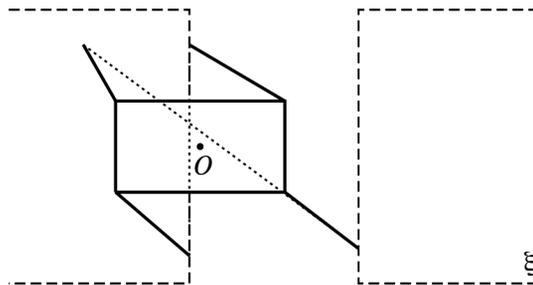
$$\xi_1 = \xi_m, \quad \xi_2 = \xi_m, \quad \xi_3 = \xi_M, \quad \xi_4 = \xi_M, \quad \xi_0 = \xi_m + \frac{1}{2} \left( \frac{a}{2} + \mathcal{L} + \varepsilon \right).$$

Теперь достаточно сдвинуть корпус на величину  $(-\varepsilon)$ , чтобы получить структурно симметричную позицию относительно средней линии препятствия. После этого осталось выполнить все действия симметрично в обратном порядке для того, чтобы робот перебрался на другую сторону препятствия. Теорема 4 доказана.

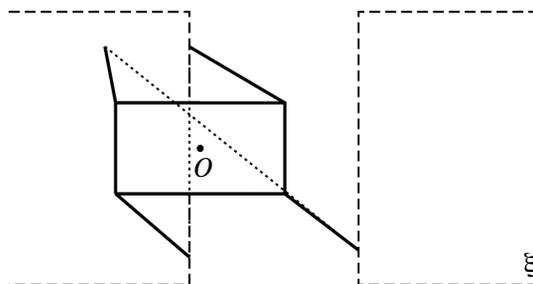
**З а м е ч а н и е 3.** В доказательстве теоремы 4, как и в доказательстве предшествующих теорем, для простоты использовалось понятие запаса продольной статической устойчивости. Это понятие, очевидно, отличается от более строгого понятия статической устойчивости, основанного не на оценке отклонения продольной координаты центра масс аппарата от границы опорного многоугольника, а на оценке отклонения центра масс от указанной границы. Для того чтобы сделать эти понятия эквивалентными, необходимо учитывать угол наклона границ опорного многоугольника к продольной оси движения. Из-за этого, если соответствующая граница опорного многоугольника не перпендикулярна направлению движения, требуемый запас продольной статической устойчивости надо полагать несколько большим по сравнению с запасом, необходимым для обеспечения статической устойчивости в строгом понимании.

**З а м е ч а н и е 4.** В режиме статической устойчивости четырехногий аппарат не способен двигаться походкой “галоп”, успешно примененной для генерирования следовой последовательности шестиногого аппарата. Однако восьминогий аппарат уже обладает достаточным числом ног для возможности применения указанной походки.

**З а м е ч а н и е 5.** Сравнение проходимости четырехногих и шестиногих роботов удобно проводить, задав одинаковыми длины  $\mathcal{L}$  их максимальных относительных полушагов и приняв  $\sigma = 0$ . В этом случае длина корпуса четырехногого робота составляет  $a(4) = 2\mathcal{L}$ , и без потери статической устойчивости он может преодолеть расщелину шириной  $\Delta = 2\mathcal{L} - \varepsilon$ , т.е. приблизительно равную длине корпуса. С другой стороны, длина корпуса шестиногого робота составляет  $2a(6) = 4\mathcal{L}$ , и без потери статической устойчивости он может преодолеть расщелину шириной  $\Delta = 3\mathcal{L} - \varepsilon$ , приблизительно равную  $3/4$  корпуса, но зато корпус у него оказывается



**Рис. 20.** Продвижение корпуса вперед.



**Рис. 21.** Перенос вперед второй ноги.

вдвое длиннее, чем у четырехногого. Таким образом, при одинаковой длине шага шестиногий робот может преодолеть препятствие бóльшей ширины, чем четырехногий, но длина корпуса четырехногого робота при этом используется более эффективно.

**З а м е ч а н и е 6.** Выше были рассмотрены принципиально различные базовые для генерирования следовых последовательностей случаи  $n = 4$  или  $n = 6$ . Если число ног шагающего аппарата  $n \geq 8$ , то избыточные ноги можно использовать двойко. Например, выделив в качестве основных ноги в количестве четыре или шесть, окружающие центр корпуса, назначить их в качестве основного средства для продвижения центра корпуса через препятствие. При этом другими ногами можно будет стремиться обеспечивать  $\varepsilon$ -сбалансированную позу аппарата. Другой вариант состоит в том, чтобы использовать избыточные ноги для целенаправленного смещения центра масс робота с целью увеличения ширины преодолимого препятствия. Однако такой вариант управления предполагает достаточно уверенное знание положения центра масс робота относительно его корпуса, что не всегда будет возможно в полевых условиях.

**З а м е ч а н и е 7.** Набор комбинаций опорных ног, обеспечивающих статическую устойчивость четырехногих машин, весьма ограничен. Поэтому статически устойчивое перелезание четырехногого робота через препятствие максимальной для него ширины представляет собой существенно более тонкую процедуру, чем аналогичная процедура для шестиногого аппарата.

**5. Компьютерное моделирование.** Компьютерное моделирование осуществлялось аналогично тому, как это было описано в [4, 7]. Управление инсектоморфным роботом, закон взаимодействия корпуса и стоп ног с опорой реализованы в виде DLL-библиотеки, подключенной к программному комплексу “Универсальный механизм” [6]. Тем самым создается виртуальная среда обитания робота. Неподвижная опорная поверхность в ней представлена горизонтальной плоскостью с расположенными на ней препятствиями. Опорная поверхность, корпус и ноги робота взаимодействуют друг с другом согласно модели трения, основанной на вязкоупругом взаимодействии тел в точках контакта. Управление движением реализуется посредством компьютерного моделирования работы электромеханических приводов шарнирных

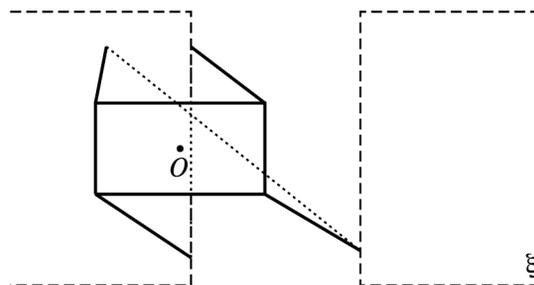


Рис. 22. Возвдат кодпуca назад.

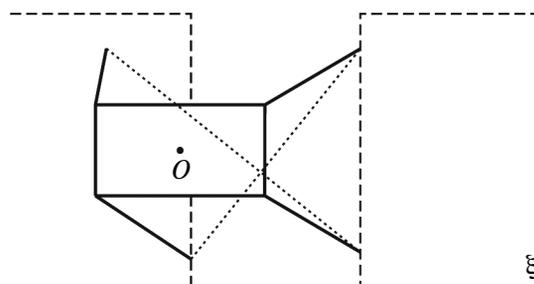


Рис. 23. Перенос четвертой ноги на тыльную сторону препятствия.

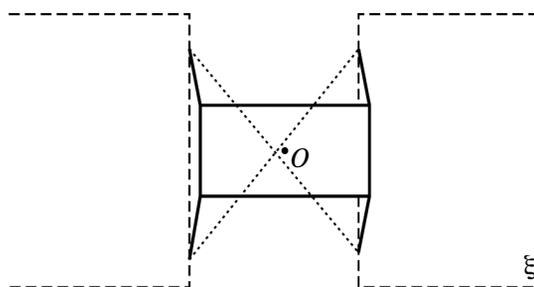


Рис. 24. Пролвижение корпуса и последующий перенос второй ноги.

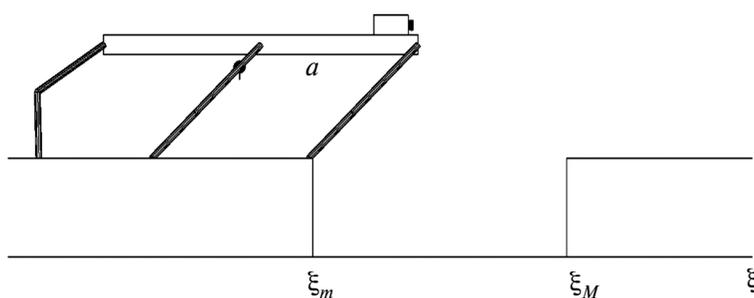


Рис. 25. Позиция модели, соответствующая схеме на рис. 4.

углов. Выполнение требуемого движения робота осуществляется, как и в реальности, лишь в результате подачи значения управляющего электрического напряжения на модели электромеханических приводов. Представление о движении корпуса робота и его ног возникает в результате численного интегрирования дифференциальных уравнений полной трехмерной динамики робота и элементов окружающей среды. Поскольку в точках контакта объектов предполагается силовое взаимодействие, соответствующая механическая система имеет 18 степеней свободы. Уравнения динамики синтезируются автоматически [6]. Результаты компьютерного моделирования отображаются на экране монитора в виде движения геометрических образов исследуемых материальных объектов.

Исследовалось влияние геометрических параметров робота на процесс преодоления расщелины максимальной ширины. Отношения массы робота и масс звеньев ног были выбраны одинаковыми для всех вариантов:

$$m : m_1 : m_2 = 10 : 0.5 : 0.5.$$

Запас статической устойчивости тоже был задан неизменным и равным 0.023 м.

Традиционный вариант, описанный в работе [4], для которого соотношение размеров половины длины корпуса, звеньев ног, длины полушага, ширины расщелины, соответствующей указанным параметрам, и параметра  $\sigma$  имеет вид

$$a : b : l_1 : l_2 : \mathcal{L} : \Delta : (-\sigma) = 0.525 : 0.5 : 0.52 : 0.335 : 0.553 : 1.078 : 0.581.$$

Он оказался неудачным по причине возникающего в процессе движения взаимного пересечения ног из-за небольшой длины корпуса (см. замечание 2).

Ниже представлены некоторые результаты моделирования трех вариантов геометрических параметров задачи.

Вариант 1. Здесь  $\sigma \approx -\mu : a < 2\mathcal{L}$ ,

$$a : b : l_1 : l_2 : \mathcal{L} : \Delta : (-\sigma) = 0.8 : 0.5 : 0.52 : 0.335 : 0.553 : 1.330 : 0.306.$$

Покажем отдельные фрагменты движения, иллюстрирующие характерные особенности преодоления препятствия. Рисунок 25 демонстрирует модельную позицию, соответствующую схеме, изображенной на рис. 4. Указатель в виде шарика с риской показывает положение центра масс робота, которое в процессе движения может заметно отклоняться от центра корпуса. Точки опоры задних ног выбраны с учетом необходимости сохранения баланса на переднем крае препятствия при переносе передних ног.

На рис. 26 показан момент процесса переноса стоп передних ног на задний край препятствия, предшествующий появлению позиции, схематично представленной на рис. 6.

Рисунок 27 описывает маневр средними ногами для обеспечения переноса задних ног из  $\varepsilon$ -сбалансированной позы.

На рис. 28 демонстрируется позиция аппарата, полученная непосредственно перед началом переноса средних ног. Она соответствует схеме, изображенной на рис. 8.

Рисунок 29 показывает позицию, возникающую непосредственно перед шагом передних ног в процессе подготовки переноса задних ног через препятствие. Центр масс робота проектируется в опорный многоугольник, образованный задними и средними ногами.

Наконец, на рис. 30 приведена финальная позиция, когда робот практически уже перешел через препятствие.

**В а р и а н т 2.** Половина длины корпуса предельна для возможности движения походкой “след в след”:  $a = 2\mathcal{L}$ ,

$$a : b : l_1 : l_2 : \mathcal{L} : \Delta = 1.106 : 0.5 : 0.52 : 0.335 : 0.553 : 1.658, \quad \sigma = 0.$$

Этот вариант качественно практически ничем не отличается от предшествующего варианта, но ширина преодолимой зоны препятствия становится на четверть больше, и эта ширина является предельной для аппарата с полушагом 0.553. Дальнейшее увеличение преодолимой зоны можно получить за счет уменьшения клиренса, вследствие чего возрастет длина полушага.

**В а р и а н т 3.** Походка “след в след” не может быть реализована:  $a > 2\mathcal{L}$ ,

$$a : b : l_1 : l_2 : \mathcal{L} : \Delta : \sigma = 1.935 : 0.5 : 0.52 : 0.335 : 0.553 : 1.658 : 0.829.$$

Приведем здесь некоторые характерные позиции робота, отличающие данный вариант от варианта 1. На рис. 31 представлена позиция, соответствующая схематическому изображению на рис. 11. Здесь средние ноги вынужденно отстоят от переднего края препятствия на величину  $\sigma \approx 3\mathcal{L} / 2$ . Цель дальнейших маневров состоит в том, чтобы вывести их на переднюю границу препятствия. Выполняются действия в соответствии с п. 1 доказательства теоремы 3. Рисунок 32 показывает позицию робота после первой волны переносов ног. Видим, что конфигурация робота сохранилась, но точки опоры средних ног приблизились к передней границе и теперь отстоят от нее на  $\sigma' \approx \mathcal{L} / 2 < \sigma$ . В соответствии с п. 3 доказательства теоремы 3 выполняется волна переносов, выводящая точки опоры средних ног на переднюю границу препятствия, как это показано на рис. 33.

Следующий рис. 34 демонстрирует позицию, когда робот готов к переносу средних ног через препятствие, и соответствует рис. 13.

После переноса средних ног робот выполняет несколько волн переносов для того, чтобы вывести стопы задних ног на переднюю границу зоны препятствия по процедуре, изложенной в п. 1 доказательства теоремы 3 и получить  $\varepsilon$ -сбалансированную позу для возможности переноса задних ног через препятствие (рис. 35).

После этого осталось только перенести задние ноги через препятствие (рис. 36). Затем необходимо сделать несколько вспомогательных шагов, чтобы корпус робота не нависал над препятствием.

Аналогичное компьютерное моделирование в соответствии с теоремой 4 было выполнено для четырехногого аппарата. Были выбраны следующие параметры задачи:

$$a : b : l_1 : l_2 : \mathcal{L} : \Delta : (-\sigma) : \varepsilon = 0.938 : 0.5 : 0.52 : 0.335 : 0.529 : 0.938 : 0.12 : 0.06.$$

Как можно заметить, длина корпуса  $a = 2\mathcal{L} - 2\varepsilon$ . Другими словами, она допускает возможность попадания точек опоры задних ног впереди передних. Эта возможность в алгоритме реально не используется, но полезна для обеспечения нужного запаса статической устойчивости в отдельных критических случаях. В модельном эксперименте робот успешно перелез через препятствие в соответствии с логикой, изложенной в доказательстве теоремы 4.

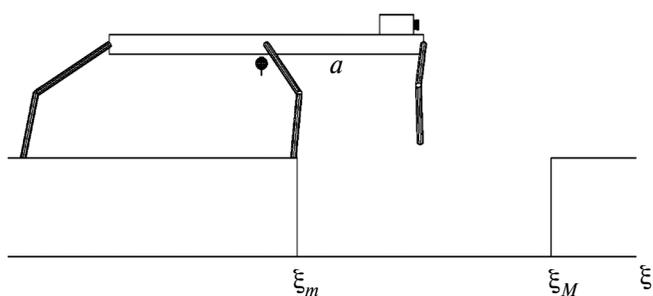


Рис. 26. Перенос задних ног с одновременным продвижением корпуса.

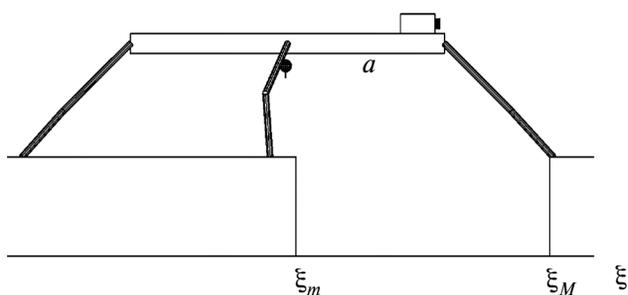


Рис. 27. Переступание средними ногами.

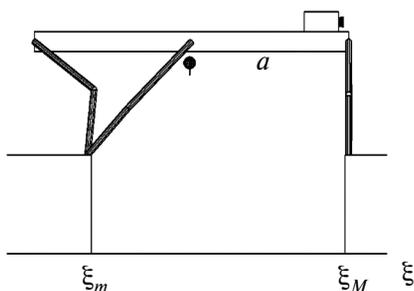


Рис. 28. Состояние готовности к переносу средних ног.

**Заключение.** Решена задача о преодолении  $n$ -ногим шагающим роботом в режиме статической устойчивости препятствий в виде областей, запрещенных для наступания. Найдена не улучшаемая аналитическая оценка сверху предельной ширины преодолимой зоны. Выявлена аналитическая зависимость предельной ширины препятствия от длины корпуса, требуемого запаса статической устойчивости и максимальной длины шага. Для шестиногого и четырехногого роботов построены следовые последовательности, доказывающие достижимость полученных оценок. Установлено, что зависимость предельной ширины препятствия от длины корпуса имеет насыщение сверху, связанное с возможностью или невозможностью реализации движения “след в след”. Для компьютерных динамических моделей шестиногого и четырехногого инсектоморфных роботов разработаны конкретные алгоритмы формирования следового расписания, обеспечивающие преодоление препятствий максимально возможной ширины. Выполнено компьютерное моделирование процесса перешагивания, получены

видеоролики, которые наглядно демонстрируют подробности преодоления рассматриваемых препятствий. Представленные результаты могут быть полезными при решении задач планирования движения робота по пересеченной местности. По итогам исследования можно сделать следующие выводы относительно оптимального соотношения конструктивных элементов шагающих аппаратов рассмотренного типа, обеспечивающего наибольшую ширину преодолемой зоны препятствия в режиме статической устойчивости.

1. Оптимальное расстояние между точками подвеса ног равно длине полного максимального шага. При сохранении числа ног увеличение этого расстояния по сравнению с указанным неэффективно, так как не способствует увеличению ширины преодолемой зоны препятствия. Кратное увеличение длины корпуса вместе с соответствующим увеличением числа ног увеличивает ширину преодолемого препятствия.

2. Если число ног аппарата превышает четыре, то расположение точек подвеса ног на прямолинейных боковых сторонах приводит к тому, что при применении физического аналога походки “след в след” уменьшается расчетная максимальная длина шага, а следовательно, уменьшается ширина преодолемого препятствия.

3. При использовании для движения конечностей инсектоморфного типа существует нижний предел допустимого расстояния между точками подвеса ног, зависящий от максимальной длины шага и исключающий взаимное пересечение звеньев соседних ног одной стороны.

4. Если положение центра масс симметричного робота известно недостаточно хорошо, то для сохранения равновесия при критической близости горизонтальной проекции центра корпуса к границам опорного многоугольника полезно применять геометрически  $\epsilon$ -сбалансированные позы аппарата.

5. При просмотре видеоматериалов [6] иногда можно заметить легкие покачивания корпуса при переносе передних или задних ног через препятствие. Это объясняется динамическими эффектами из-за подъема весомых ног при заданном малом запасе устойчивости вблизи передней или задней границы опорного многоугольника. Если запас устойчивости увеличить, указанные явления пропадают. Вместе с тем увеличение запаса устойчивости уменьшает ширину преодолемого препятствия, что может оказаться критичным для решения более общей задачи планирования движения.

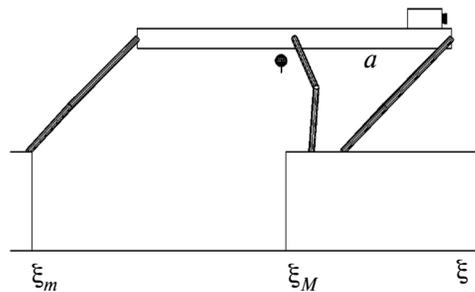


Рис. 29. Подготовка переноса задних ног через препятствие.

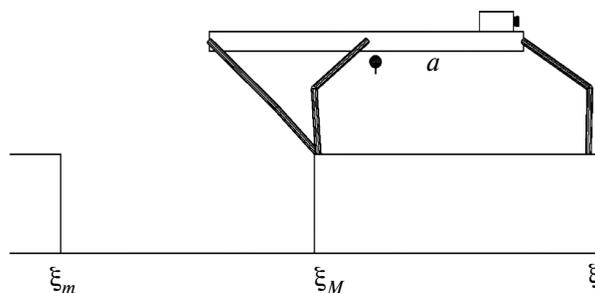


Рис. 30. Робот прошел над препятствием.

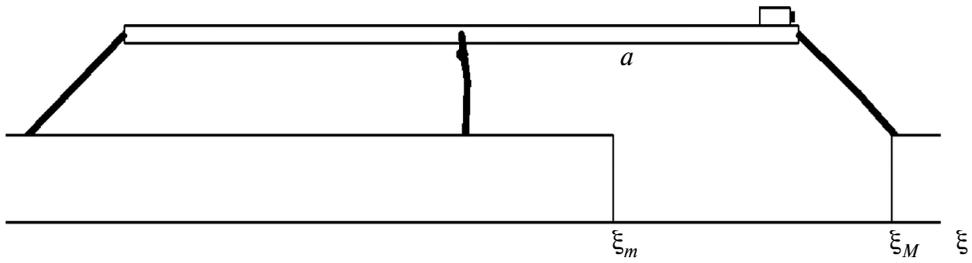


Рис. 31. Робот перенес передние ноги на задний край препятствия.

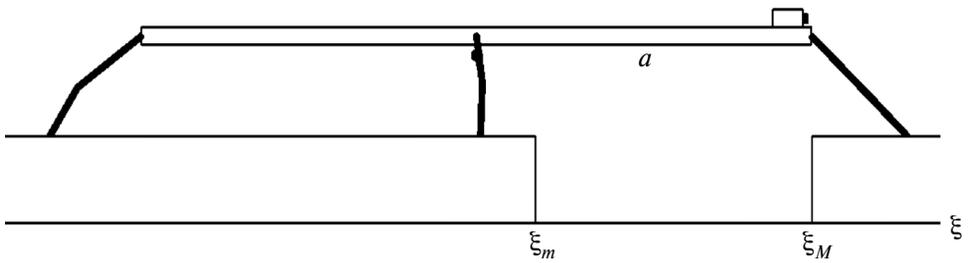


Рис. 32. Позиция после первой волны переносов ног.

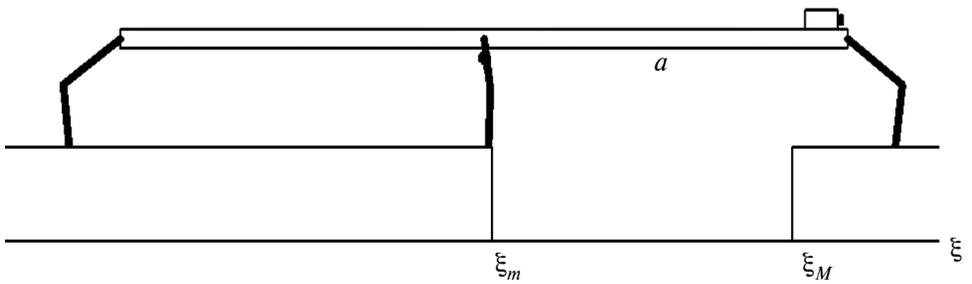


Рис. 33. Стопы средних ног на передней границе препятствия.

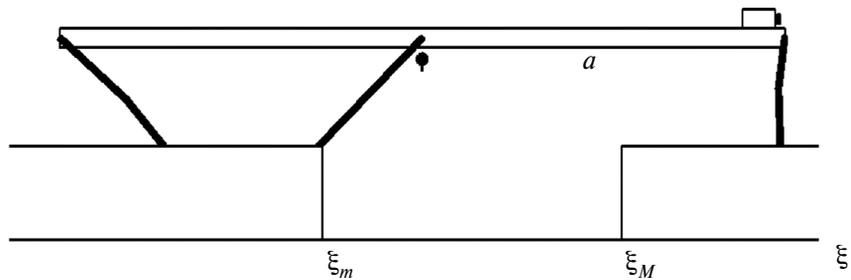


Рис. 34. Начало переноса средних ног через препятствие.

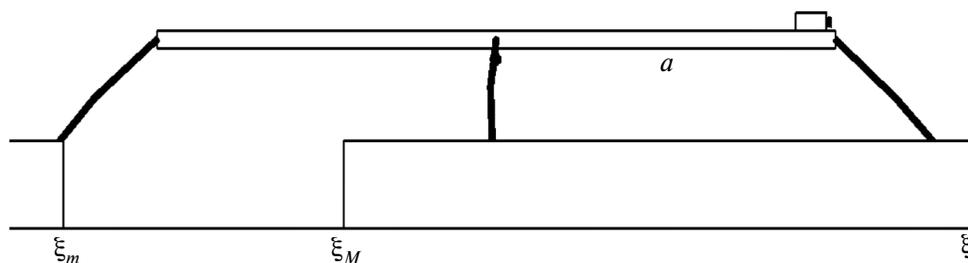


Рис. 35.  $\varepsilon$ -сбалансированная поза.

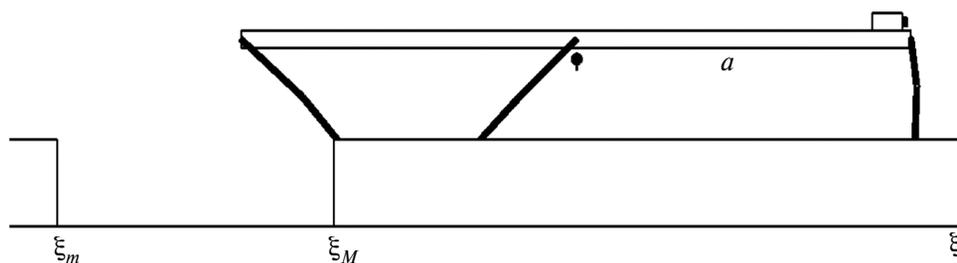


Рис. 36. Препятствие преодолено.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Архив журнала Моделист-Конструктор*. Вездеходы: вчера, сегодня, завтра. URL: <https://modelist-konstruktor.com/novosti/vezdexody-vchera-segodnya-zavtra> (дата обращения: 18.12.2024).
2. *Охоцимский Д.Е., Голубев Ю.Ф.* Механика и управление движением автоматического шагающего аппарата. М.: Наука. Глав. ред. физ.-мат. лит., 1984. 312 с.
3. Эволюция роботов Boston Dynamics. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=t3hPckJCx9s> (дата обращения: 15.03.2022).
4. *Голубев Ю.Ф., Корянов В.В.* Экстремальные локомоционные возможности инсектоморфных роботов. М: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2018. 212 с. ISBN 978-5-98354-040-8. <https://doi.org/10.20948/mono-2018-golubev>
5. *Филиппов А.П.* Колебания деформируемых систем. Изд. 2-е перераб. М.: Машиностроение, 1970. 736 с.
6. *Голубев Ю.Ф., Корянов В.В.* Преодоление шагающим роботом препятствий, характерных для равнины // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2024. № 21. 35 с. <https://doi.org/10.20948/prepr-2024-21>, <https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2024-21>
7. Универсальный механизм. Моделирование динамики механических систем. URL: <http://www.umlab.ru> (дата обращения: 10.03.2020).
8. *Golubev, Yu.F.* Getting over Wide Obstacles by a Multi-Legged Robot. ISSN 1064-5624 // *Doklady Mathematics*, 2024. <https://doi.org/10.1134/S1064562424601136>