

УДК 531.36

О КОЛЕБАНИЯХ ПОДВЕШЕННОГО К КВАДРОКОПТЕРУ МАЯТНИКА С ПОЛОСТЬЮ, ЧАСТИЧНО ЗАПОЛНЕННОЙ ЖИДКОСТЬЮ¹

©2025 г. А. П. Голуб, Б. Я. Локшин, Ю. Д. Селюцкий*

НИИ механики МГУ, Москва, Россия

**e-mail: seliutski@imec.msu.ru*

Поступила в редакцию 8.11.2024 г.

После доработки 19.11.2024 г.

Принята к публикации 24.02.2025 г.

Рассматривается динамика подвешенного к квадрокоптеру маятника со сферической полостью, частично заполненной идеальной жидкостью. Предполагается, что система движется в вертикальной плоскости. Учитывается сила лобового сопротивления, действующая на оболочку маятника. Для моделирования колебаний жидкости в полости используется феноменологическая “маятниковая” модель. Предложен алгоритм построения управления ускорением квадрокоптера, который обеспечивает переход системы на режим стационарного горизонтального полета с заданной скоростью и гашение колебаний как маятника, так и жидкости внутри него (в том числе и при наличии постоянного ветра).

Ключевые слова: квадрокоптер, маятник, колебания, управление, полость с жидкостью

DOI: 10.31857/S0002338825020117, EDN: ASUBJR

ON OSCILLATIONS OF A QUADROTOR-SLUNG PENDULUM WITH A CAVITY PARTIALLY FILLED WITH LIQUID

A. P. Holub, B. Ya. Lokshin, Yu. D. Selyutskiy*

Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

**e-mail: seliutski@imec.msu.ru*

Dynamics of a pendulum suspended to a quadrotor and having a spherical cavity partially filled with the ideal liquid is considered. It is supposed that the system moves in the vertical plane. The drag force acting on the pendulum is taken into account. In order to simulate oscillations of the liquid inside the cavity, a phenomenological “pendulum” model is used. An algorithm for constructing the quadrotor acceleration control is proposed that ensures the transition of the system to the steady horizontal flight with the specified speed along with damping of oscillations of both the pendulum and the liquid inside it (including in the presence of a constant wind).

Keywords: quadrotor, pendulum, oscillations, control, cavity with liquid

Введение. Одним из перспективных вариантов применения квадрокоптеров в различных отраслях (в частности, в строительстве) является их использование для транспортировки грузов. Существуют различные способы крепления груза к коптеру (подвеска на тросе, жесткое крепление, фиксация с помощью манипулятора и др.). Изучению динамики квадрокоптера с подвешенным на тросе грузом посвящена обширная литература, как отечественная, так и зарубежная. Обзор современного состояния исследований в этой области приведен в работах [1, 2].

Основные задачи управления квадрокоптером с подвешенным грузом – отслеживание целевой траектории (причем это может быть траектория коптера и/или траектория груза) и гашение колебаний груза. Разработаны различные стратегии управления, направленные на решение этих задач (например, [3–6]), в том числе и в условиях недостатка информации о массе груза [7]. В целом ряде работ проводится более или менее детальное моделирование динамики

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 24-29-00151).

поведения троса с учетом его упругих свойств и/или гибкости [8, 9]. В качестве отдельного направления исследований можно выделить построение алгоритмов управления для транспортировки груза несколькими коптерами [10, 11].

Как правило, предполагается, что аэродинамическое воздействие на груз пренебрежимо мало. Однако в случае, когда груз не очень тяжелый, площадь его поверхности достаточно велика, а коптер движется сравнительно быстро (или присутствует ветер), это предположение представляется неоправданным. В работах [12–14] считается, что на груз действует только сила лобового сопротивления, причем соответствующий безразмерный коэффициент не зависит от формы груза. В [15] рассматривается ситуация, когда на груз, наряду с силой лобового сопротивления, действует боковая сила, и анализируется возможность построения управления, обеспечивающего гарантированную стабилизацию подъема и спуска в условиях неполной информации об этих воздействиях.

Отдельный интерес представляет ситуация, когда внутри груза имеется полость, частично заполненная жидкостью. Колебания жидкости могут оказывать заметное влияние на поведение груза, и это необходимо учитывать при построении управления.

Начало активных исследований колебаний жидкости в полости было связано с необходимостью моделирования колебаний топлива в баках космических ракет. Анализ колебаний жидкости в полости в полной гидродинамической постановке является достаточно сложной задачей. Поэтому усилия многих исследователей были направлены на поиск способов упрощенного описания сил, действующих на тело со стороны жидкости.

В [16] изучается динамика тела с полостью в форме цилиндра (или двух соосных цилиндров), частично заполненной идеальной жидкостью. Показано, что для определенных видов движения существуют три независимых инерционных характеристики системы, и предложена методика их расчета. В [17] для описания сил, действующих на частично заполненный цилиндрический бак со стороны жидкости, колеблющейся в нем, предложена упрощенная механическая модель, представляющая собой систему осцилляторов. В [18] были определены параметры системы маятников, которая может служить механическим аналогом волновых колебаний жидкости в цилиндрической полости. В [19–21] рассматривается тело со сферической полостью, частично заполненной жидкостью. Приведены результаты расчетов (в предположении, что жидкость совершает потенциальное безвихревое течение) и экспериментов по определению собственных частот колебаний жидкости.

Авторы [22] исследовали колебания жидкости в горизонтально расположенном цилиндрическом баке и показали, что результаты, найденные в рамках маятниковой модели, достаточно хорошо согласуются с результатами, полученными путем гидродинамического моделирования, если степень заполнения бака не слишком велика. В [23] колебания жидкости описываются с помощью модифицированной маятниковой модели, позволяющей учесть, среди прочего, удары жидкости о стенки сосуда. В [24] рассматривается задача о перемещении цилиндрического сосуда, частично заполненного жидкостью, с помощью манипулятора вдоль заданной траектории без возбуждения колебаний жидкости. Движение жидкости моделируется с помощью сферического маятника, точка подвеса которого находится в точке пересечения оси полости с невозмущенной поверхностью жидкости. В [25] представлена задача о транспортировке бака, частично заполненного жидкостью, с помощью нескольких коптеров (аэродинамическое воздействие на груз не учитывается). Показано, что с помощью трех коптеров можно обеспечить стабилизацию целевого движения и гашение колебаний бака и жидкости.

В настоящей работе исследуется движение квадрокоптера с подвешенным к нему грузом сферической формы, содержащим сферическую полость, которая частично заполнена жидкостью. При этом учитывается аэродинамическое воздействие на груз. Предлагается стратегия управления ускорением центра масс коптера, обеспечивающая переход с одного горизонтального стационарного полета на другой и гашение колебаний груза и жидкости.

1. Постановка задачи. Опишем механическую систему, состоящую из квадрокоптера и маятника, подвешенного к его центру масс G с помощью цилиндрического шарнира (рис. 1). Маятник представляет собой твердое тело сферической формы, закрепленное на невесомом жестком стержне-державке. Внутри тела имеется сферическая полость. Геометрический центр полости совпадает с центром масс C тела. Полость частично заполнена идеальной жидкостью. Система находится в потоке среды, скорость которого постоянна, горизонтальна и равна w .

Будем считать, что центр масс коптера может перемещаться вдоль некоторой горизонтальной прямой, причем плоскость качаний маятника вертикальна и содержит эту прямую. Введем в этой плоскости неподвижную систему координат OXY , ось ординат которой вертикальна. Пусть x — координата точки G подвеса маятника в этой системе координат. Положение

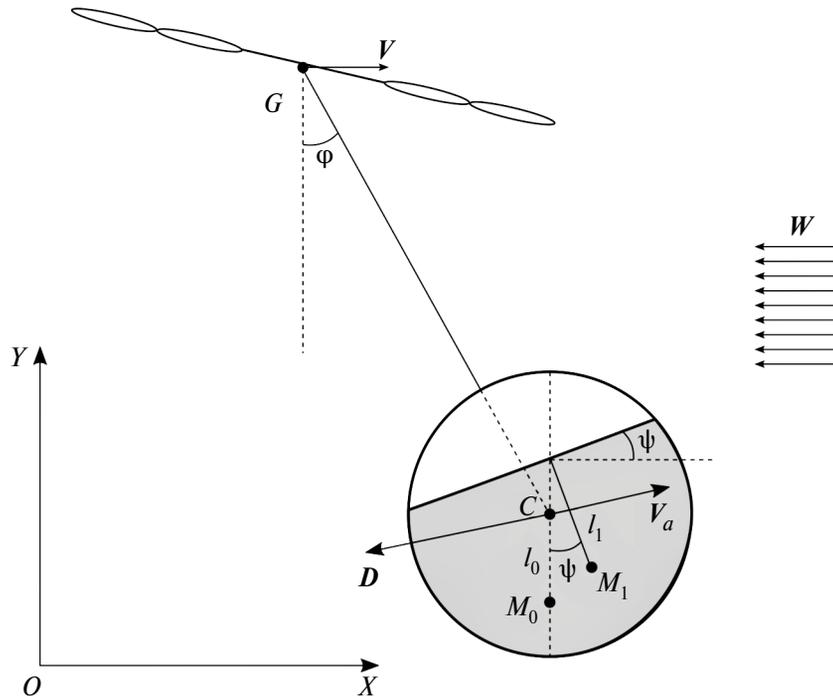


Рис. 1. Маятник с жидкостью, подвешенный к квадрокоптеру.

маятника будем характеризовать углом φ его отклонения от вертикали. Кроме того, предположим, что поверхность жидкости во все время движения остается практически плоской. Обозначим угол между ней и горизонтальной плоскостью через ψ .

Чтобы описать динамику жидкости внутри полости, будем действовать по аналогии с “маятниковым” подходом, представленным в работах [24], а также [26, 27]. Выделим в жидкости часть, которая участвует в колебаниях поверхности, и часть, которая не участвует в них. Поведение первой части будем имитировать с помощью математического маятника M_1 (так сказать, “жидкого осциллятора”) длиной l_1 и массой m_1 , точка подвеса которого находится на пересечении вертикальной прямой, проходящей через центр полости, и плоскости поверхности жидкости в невозмущенном состоянии, а угол отклонения от вертикали совпадает с углом ψ .

Будем считать, что вторая часть жидкости совершает квазистационарное движение, т.е. во все время движения занимает положение, отвечающее состоянию равновесия при текущем положении маятника. Это означает, что ее центр масс M_0 всегда лежит на вертикали, проходящей через точку C (ниже этой точки). Обозначим массу этой части жидкости через m_0 , а расстояние CM_0 — через l_0 . Длина l_1 “жидкого осциллятора” определяется таким образом, чтобы собственная частота осциллятора совпадала с частотой первой моды собственных колебаний жидкости в полости вблизи состояния равновесия. Эту величину, а также массу m_1 следует идентифицировать заранее на основе результатов натуральных экспериментов или гидродинамического моделирования колебаний жидкости в полости.

Чтобы найти величины m_0 и l_0 , воспользуемся следующими соображениями. Пусть вся система находится в равновесии. Обозначим расстояние от дна полости до уровня свободной поверхности жидкости через h , радиус полости — через R , а плотность жидкости — через ρ_* . Запишем формулы для массы всей жидкости и ординаты ее центра масс. Тогда после некоторых упрощений имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned} m_0 + m_1 &= \rho_* \frac{\pi h^2}{3} (3R - h), \\ -m_0 l_0 + m_1 (h - R - l_1) &= -\rho_* \frac{\pi h^2 (2R - h)^2}{4}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Из формул (1.1) видно, что при заданных m_1 и l_1 величины m_0 и l_0 определяются однозначно.

Будем считать, что аэродинамическое воздействие на оболочку маятника сводится только к вектору \mathbf{D} силы лобового сопротивления, для которой имеет место следующая формула:

$$\mathbf{D} = -\frac{\rho S}{2} V_a C_d \mathbf{V}_a,$$

где ρ – плотность среды; S – характерная площадь; вектор \mathbf{V}_a – воздушная скорость центра C груза (т.е. его скорость относительно набегающего потока); C_d – безразмерный коэффициент лобового сопротивления (будем считать его постоянным). Величина воздушной скорости задается следующим равенством:

$$V_a = \sqrt{(v + l\dot{\varphi} \cos \varphi + w)^2 + (l\dot{\varphi} \sin \varphi)^2}.$$

Здесь принято обозначение $v = \dot{x}$.

Примем в качестве управляющего воздействия ускорение центра масс квадрокоптера. С учетом изложенного выше, уравнения движения рассматриваемой системы могут быть представлены в следующем виде:

$$\begin{aligned} \dot{v} &= u, \\ \left((m + m_0 + m_1)l^2 + J \right) \ddot{\varphi} + l(m + m_0 + m_1)u \cos \varphi + \\ &+ m_1 l_1 \ddot{\psi} \cos(\psi - \varphi) - m_1 l_1 \dot{\psi}^2 \sin(\psi - \varphi) = -(m + m_0 + m_1)gl \sin \varphi - \\ &- \frac{\rho S C_d}{2} V_a \left((v + w)l \cos \varphi + l^2 \dot{\varphi} \right), \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$m_1 l_1 l \dot{\varphi} \cos(\psi - \varphi) + m_1 l_1^2 \ddot{\psi} + m_1 l_1 u \cos \psi + m_1 l_1 l \dot{\varphi}^2 \sin(\psi - \varphi) = -m_1 l_1 g \sin \psi.$$

Здесь l – длина державки GC маятника; m – масса оболочки маятника; J – центральный момент инерции этой оболочки; u – управление.

Для удобства дальнейшего анализа проведем обезразмеривание системы (1.2). Для этого выберем единицы измерения таким образом, чтобы масса маятника, длина державки и ускорение свободного падения были равны единице:

$$m + m_0 + m_1 = 1, \quad l = 1, \quad g = 1.$$

Кроме того, введем следующий безразмерный параметр:

$$\mu = \frac{\rho S l}{2(m + m_0 + m_1)} C_d.$$

Безразмерные уравнения движения системы запишутся в следующем виде:

$$\begin{aligned} v' &= u, \\ (1 + J)\varphi'' + m_1 l_1 \psi'' \cos(\psi - \varphi) - m_1 l_1 \psi'^2 \sin(\psi - \varphi) &= \\ = -\sin \varphi - \mu \sqrt{(v + \varphi' \cos \varphi + w)^2 + (\varphi' \sin \varphi)^2} \left((v + w) \cos \varphi + \varphi' \right) - u \cos \varphi, \\ \varphi'' \cos(\psi - \varphi) + l_1 \psi'' + \varphi'^2 \sin(\psi - \varphi) &= -\sin \psi - u \cos \psi. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Штрихом здесь обозначена производная по безразмерному времени. Рассмотрим режим стационарного горизонтального полета:

$$v = v_* \equiv \text{const}, \quad \varphi = \varphi_* \equiv \text{const}, \quad \psi = \psi_* \equiv \text{const}.$$

Считаем для определенности, что $v_* + w \geq 0$. Уравнения этого режима имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} 0 &= u, \\ 0 &= -\sin \varphi_* - \mu (v_* + w)^2 \cos \varphi_*, \\ 0 &= -m_1 l_1 \sin \psi_*. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Из системы (1.4) получаем

$$\text{tg } \varphi_* = -\mu (v_* + w)^2, \quad \psi_* = 0. \quad (1.5)$$

Естественным образом возникает задача стабилизации этого стационарного режима, а также перевода системы из окрестности такого режима с одной скоростью, $v_* = v_1$, в окрестность другого режима, $v_* = v_2$, и гашения колебаний как маятника, так и жидкости внутри него.

2. Устойчивость, управляемость и наблюдаемость. Прежде всего исследуем устойчивость, управляемость и наблюдаемость системы в окрестности целевого режима.

Разрешив систему (1.3) относительно старших производных и линеаризовав ее в окрестности рассматриваемого стационарного движения, запишем ее в следующем виде:

$$\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}u,$$

где $\mathbf{X} = (\Delta v \ \Delta\varphi \ \Delta\varphi' \ \psi \ \psi')^T$ – вектор отклонений от стационарного режима ($\Delta v = v - v_*$, $\Delta\varphi = \varphi - \varphi_*$),

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{2\mu \cos \varphi_* V}{J_1} & \frac{-\cos \varphi_* + \mu \sin \varphi_* V^2}{J_1} & \frac{\mu V \zeta}{J_1} & \frac{m_1 \cos \varphi_*}{J_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{2\mu \cos^2 \varphi_* V}{l_1 J_1} & \frac{-\cos \varphi_* (-\cos \varphi_* + \mu \sin \varphi_* V^2)}{l_1 J_1} & \frac{\mu \cos \varphi_* V \zeta}{l_1 J_1} & \frac{-J - 1}{l_1 J_1} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \left(1 \ 0 \ -\frac{(1 - m_1) \cos \varphi_*}{J_1} \ 0 \ -\frac{J + \sin^2 \varphi_*}{l_1 J_1} \right)^T, \quad (2.1)$$

$$J_1 = 1 + J - m_1 \cos^2 \varphi_*, \quad V = v_* + w, \quad \zeta = 1 + \cos^2 \varphi_*.$$

Характеристический полином системы (2.1) можно представить в следующей форме:

$$\lambda \left(\lambda^4 + \lambda^3 \frac{\mu \zeta V}{J_1} + \lambda^2 \frac{1 + J + l_1 \cos \varphi_* - \mu V^2 \sin \varphi_*}{l_1 J_1} + \lambda \frac{\mu \zeta V}{l_1 J_1} + \frac{\cos \varphi_* - \mu V^2 \sin \varphi_*}{l_1 J_1} \right) \quad (2.2)$$

Этот полином имеет один нулевой корень (который, очевидно, отвечает переменной v). Учитывая формулы (1.5) для φ_* , можно заключить, что все коэффициенты полинома, заключенного в скобки в выражении (2.2), положительны при $V = v_* + w > 0$. Третий минор M_3 Гурвица для этого полинома равен

$$M_3 = \frac{m_1 \mu^2 \zeta^2 V^2 \cos^2 \varphi_*}{l_1^2 J_1^3}.$$

Данное выражение также положительно при $V > 0$. Следовательно, остальные четыре корня характеристического полинома имеют отрицательные вещественные части. Отсюда легко видеть, что при $V > 0$ введение сколь угодно малой отрицательной обратной связи по скорости точки подвеса обеспечивает асимптотическую устойчивость. Однако следует отметить, что для реальных объектов коэффициент μ , как правило, достаточно мал. С учетом структуры коэффициентов характеристического полинома (2.2) это означает, что вещественные части его ненулевых корней будут малы, и, следовательно, колебания маятника и жидкости внутри него будут затухать относительно медленно. Для ускорения этого процесса, по-видимому, необходимо вводить в систему дополнительное управление. Кроме того, при $V = 0$ у полинома (2.2) имеются чисто мнимые корни, и для обеспечения экспоненциальной устойчивости необходима стабилизация.

Проверим вначале управляемость и наблюдаемость системы (2.1). Составим для нее матрицу управляемости \mathbf{W} . Ее определитель представляет собой достаточно громоздкое выражение. Однако в случае, когда $\mu = 0$ (т.е. сила воздействия на оболочку маятника со стороны среды отсутствует), оно существенно упрощается:

$$\det \mathbf{W} = \frac{(l_1(1 - m_1) - J)^2}{l_1^5 (J + 1 - m_1)^5}. \quad (2.3)$$

Выражение (2.3) не равно нулю, если $m_1 \neq 1 - J/l_1$. Тогда она останется ненулевой, по крайней мере, и для достаточно малых значений μ . Если же $m_1 = 1 - J/l_1$, то система не является управляемой в отсутствие аэродинамических сил. Однако в этом случае для малых значений μ имеет место следующая формула:

$$\det \mathbf{W} = \frac{4(v_* + w)^2 (J - l_1)^2}{J^4 (1 + l_1)^5} \mu^2 + O(\mu^4)$$

Если $J = l_1$, то $m_1 = 1 - J/l_1 = 0$, следовательно, колебания жидкости отсутствуют. Поэтому управлять координатой ψ не требуется. Управляемость же по координате φ , очевидно, имеется. Если же $J \neq l_1$, то система оказывается управляемой (по крайней мере, при достаточно малых μ). Таким образом, за исключением некоторых специфических ситуаций, управляемость имеет место.

Составим теперь матрицу наблюдаемости \mathbf{N} для системы (2.1). В ней можно выбрать подматрицу \mathbf{N}_1 размером 5×5 , определитель которой равен следующему выражению:

$$\det \mathbf{N}_1 = \frac{m_1^2 \cos^2 \varphi_*}{(1 + J - m_1 \cos^2 \varphi_*)^2}.$$

Это выражение, очевидно, не обращается в нуль при всех $m_1 \neq 0$.

Таким образом, в окрестности рассматриваемого стационарного режима в достаточно широком диапазоне значений параметров имеют место управляемость и наблюдаемость.

3. Построение управления для линеаризованной системы. Отметим, что среди фазовых координат системы непосредственному измерению доступны только скорость точки подвеса, угол отклонения маятника и его угловая скорость. Соответственно будем считать, что вектор наблюдений $\mathbf{Y} = (\Delta v \ \Delta \varphi \ \Delta \varphi')^T$ и вектор переменных состояния $\mathbf{X} = (\Delta v \ \Delta \varphi \ \Delta \varphi' \ \psi \ \psi')^T$ связаны следующим образом:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{C}\mathbf{X}, \quad \mathbf{C} = (\mathbf{E}_3 \ \mathbf{O}_{3 \times 2}).$$

Здесь и ниже \mathbf{E}_n — единичная матрица размера $n \times n$, а $\mathbf{O}_{n \times k}$ — нулевая матрица размера $n \times k$.

Для того чтобы получить оценку для переменных ψ и ψ' , следуя стандартной процедуре [28], построим наблюдатель пониженного порядка. Его уравнения могут быть представлены в следующем виде:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{X}} &= \mathbf{L}_1 \mathbf{Y} + \mathbf{L}_2 (\mathbf{Q} + \mathbf{K}\mathbf{Y}), \\ \mathbf{Q}' &= (\mathbf{C}_1 - \mathbf{K}\mathbf{C}) \mathbf{A} \mathbf{L}_2 \mathbf{Q} + (\mathbf{C}_1 - \mathbf{K}\mathbf{C}) \mathbf{A} (\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2 \mathbf{K}) \mathbf{Y} + (\mathbf{C}_1 - \mathbf{K}\mathbf{C}) \mathbf{B} u, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $\mathbf{Q} = (q_1 \ q_2)^T$ — вектор вспомогательных переменных; \mathbf{C}_1 , \mathbf{K} , $\mathbf{L}_{1,2}$ — некоторые постоянные матрицы. Матрица \mathbf{C}_1 выбирается таким образом, чтобы матрица

$$\begin{pmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}_1 \end{pmatrix}$$

была невырожденной. Выберем ее равной $\mathbf{C}_1 = (\mathbf{O}_{2 \times 3} \ \mathbf{E}_2)$. Тогда матрицы $\mathbf{L}_{1,2}$ будут определяться следующими соотношениями:

$$\mathbf{L}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_3 \\ \mathbf{O}_{2 \times 3} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{O}_{3 \times 2} \\ \mathbf{E}_2 \end{pmatrix}.$$

Матрицу \mathbf{K} требуется выбрать так, чтобы система

$$\mathbf{Q}' = (\mathbf{C}_1 - \mathbf{K}\mathbf{C}) \mathbf{A} \mathbf{L}_2 \mathbf{Q} \quad (3.2)$$

была асимптотически устойчивой. Примем, что все элементы матрицы \mathbf{K} равны нулю, за исключением элементов, находящихся в последнем столбце. Тогда характеристический полином системы (2.4) принимает вид

$$\lambda^2 + \frac{k_{13} m_1 \cos \varphi_*}{1 + J - m_1 \cos^2 \varphi_*} \lambda + \frac{k_{23} m_1 l_1 \cos \varphi_* + J + 1}{l_1 (1 + J - m_1 \cos^2 \varphi_*)}.$$

Из этой формулы видно, что для асимптотической устойчивости достаточно выбрать положительные значения коэффициентов k_{13} и k_{23} (причем за счет их выбора можно реализовать любые наперед заданные значения корней характеристического полинома). Тогда оценка для величин ψ и ψ' имеет следующий вид:

$$\psi = q_1 + k_{13}\Delta\varphi', \quad \psi' = q_2 + k_{23}\Delta\varphi'$$

Будем использовать эти выражения далее при формировании управления.

Построим теперь управление, обеспечивающее стабилизацию целевого стационарного режима (в рамках линейной постановки задачи). Рассмотрим уравнения динамики для расширенного вектора состояния $\mathbf{Z} = (\Delta v \ \Delta\varphi \ \Delta\varphi' \ \psi \ \psi' \ q_1 \ q_2)^T$:

$$\mathbf{Z}' = \mathbf{A}_1\mathbf{Z} + \mathbf{B}_1u, \quad (3.3)$$

где

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O}_{5 \times 2} \\ (\mathbf{C}_1 - \mathbf{K}\mathbf{C})\mathbf{A}(\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2\mathbf{K})\mathbf{C} & (\mathbf{C}_1 - \mathbf{K}\mathbf{C})\mathbf{A}\mathbf{L}_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{B} \\ (\mathbf{C}_1 - \mathbf{K}\mathbf{C})\mathbf{B} \end{pmatrix}.$$

Построим управление с обратной связью, которое стабилизирует тривиальное решение системы (3.3) и является оптимальным в смысле следующего квадратичного функционала качества:

$$I = \int_0^{\infty} (\mathbf{Z}^T\Theta\mathbf{Z} + u^2) dt. \quad (3.4)$$

Положительно определенную матрицу Θ будем считать диагональной. Соответствующее оптимальное управление имеет вид

$$u_* = -\mathbf{P}\mathbf{B}_1^T\mathbf{Z}, \quad (3.5)$$

где матрица \mathbf{P} представляет собой решение алгебраического уравнения Риккати:

$$\mathbf{P}\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_1\mathbf{P} + \Theta - \mathbf{P}\mathbf{B}_1\mathbf{B}_1^T\mathbf{P} = 0. \quad (3.6)$$

Построенное управление (3.5) обеспечивает стабилизацию (оптимальную в смысле (3.4)) целевого режима.

4. Управление нелинейной системой. Рассмотрим теперь задачу перехода между двумя стационарными режимами и гашения колебаний маятника и жидкости в рамках нелинейной системы. Будем считать, что величина ускорения, которое может развивать квадрокоптер, ограничена:

$$|v'| \leq u_0.$$

Тогда управление, обеспечивающее максимально быстрый переход от стационарного полета квадрокоптера со скоростью v_1 в режим стационарного полета со скоростью v_2 , имеет следующий вид:

$$u = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ u_0 \operatorname{sign}(v_2 - v_1), & 0 \leq t < |v_2 - v_1|/u_0, \\ 0, & |v_2 - v_1|/u_0 \leq t. \end{cases} \quad (4.1)$$

Ясно, однако, что в конце этого процесса, вообще говоря, маятник и жидкость не будут находиться в состоянии равновесия и возникнут колебания. Пример такого процесса представлен на рис. 2, на котором изображены зависимости величины управления, скорости v точки подвеса, углов φ (черная линия) и ψ (серая линия) от безразмерного времени

При численном моделировании использованы следующие значения безразмерных параметров:

$$m = 0.5, \quad J = 0.005, \quad R = 0.1, \quad h = 0.14, \quad \mu = 0.05, \quad w = 0. \quad (4.2)$$

Величину l_1 для выбранного соотношения параметров R и h рассчитаем на основе данных, приведенных в работе [19]: $l_1 = 0.047$. Для массы m_1 примем значение 0.1. Как показывают

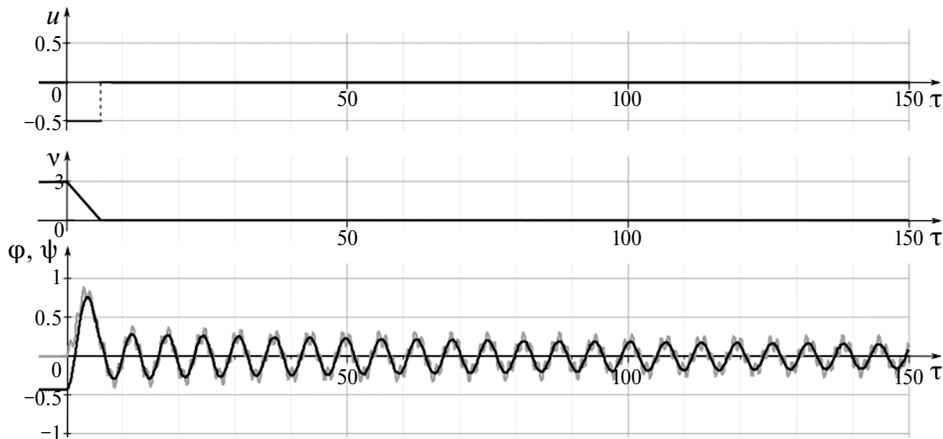


Рис. 2. Зависимость величин u , v , φ , ψ от времени при управлении (4.1).

результаты проведенного численного моделирования, этот параметр достаточно слабо влияет на характер затухания. Величины l_0 и m_0 найдем из соотношений (1.1).

Для того чтобы подавить возникающие колебания, воспользуемся управлением (3.5), сформированным в предыдущем разделе для линеаризованной системы:

$$u = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ u_0 \operatorname{sign}(v_2 - v_1), & 0 \leq t \leq |v_2 - v_1|/u_0, \\ \operatorname{sign} u_* \cdot \min(|u_*|, u_0), & |v_2 - v_1|/u_0 < t. \end{cases} \quad (4.3)$$

Компоненты расширенного вектора состояния определяются из следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned} v' &= u, \\ (1 + J)\varphi'' + m_1 l_1 \psi'' \cos(\psi - \varphi) - m_1 l_1 \psi'^2 \sin(\psi - \varphi) &= \\ = -\sin \varphi - \mu \sqrt{(v + l\varphi' \cos \varphi + w)^2 + (l\varphi' \sin \varphi)^2} ((v + w) \cos \varphi + \varphi') - u \cos \varphi, & (4.4) \\ \varphi'' \cos(\psi - \varphi) + l_1 \psi'' + \varphi'^2 \sin(\psi - \varphi) &= -\sin \psi - u \cos \psi, \\ Q' &= (C_1 - KC)AL_2Q + (C_1 - KC)A(L_1 + L_2K)CX + (C_1 - KC)Bu. \end{aligned}$$

Здесь матрицы A и B вычисляются для конечного режима.

Уравнения (4.4) вместе с соотношениями (4.3) и (3.5)–(3.6) образуют замкнутую систему. Для проверки работоспособности предложенного алгоритма построения управления было проведено численное моделирование динамики рассматриваемого объекта при значениях параметров (4.2). При этом для элементов матриц K и Θ были выбраны следующие значения:

$$k_{13} = 100, \quad k_{23} = 10, \quad \Theta_{ii} = 1 \quad (i = \{2, 3, 4, 6, 7\}), \quad \Theta_{11} = 1000, \quad \Theta_{55} = 100.$$

На рис. 3 проиллюстрирована работоспособность предложенного алгоритма управления для разгона (переход с режима висения $v_1 = 0$ на режим полета со скоростью $v_2 = 3$) и торможения (с $v_1 = 3$ до $v_2 = 0$).

Видно, что сформированное управление обеспечивает переход с исходного стационарного режима на целевой стационарный режим, а также сравнительно быстрое затухание колебаний как маятника, так и жидкости внутри него.

Этот алгоритм остается эффективным и при наличии ветра. Данное обстоятельство проиллюстрировано на рис. 4 для $w = 1$ и $w = 3$ (для всех остальных параметров сохранены прежние значения).

Заключение. Рассмотрена задача о колебаниях подвешенного к квадрокоптеру маятника со сферической полостью, частично заполненной идеальной жидкостью. Учитывается сила лобового сопротивления, действующая на оболочку маятника, которая также считается

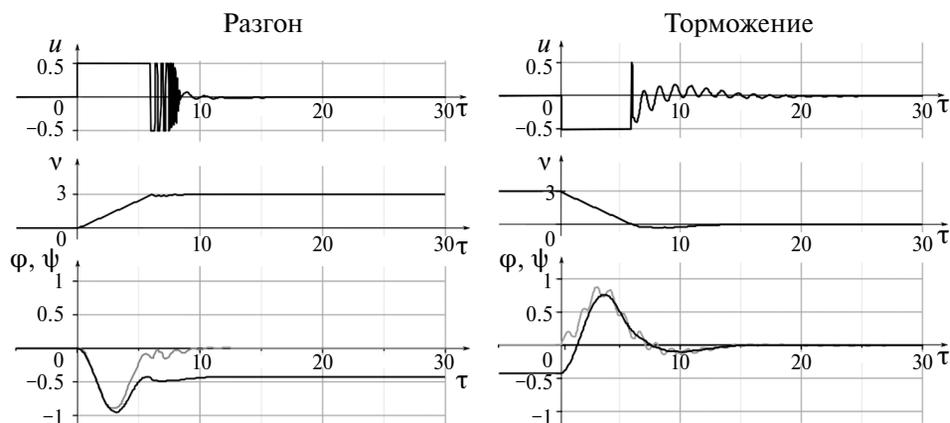


Рис. 3. Примеры процессов разгона и торможения при управлении (4.3) в отсутствие ветра.

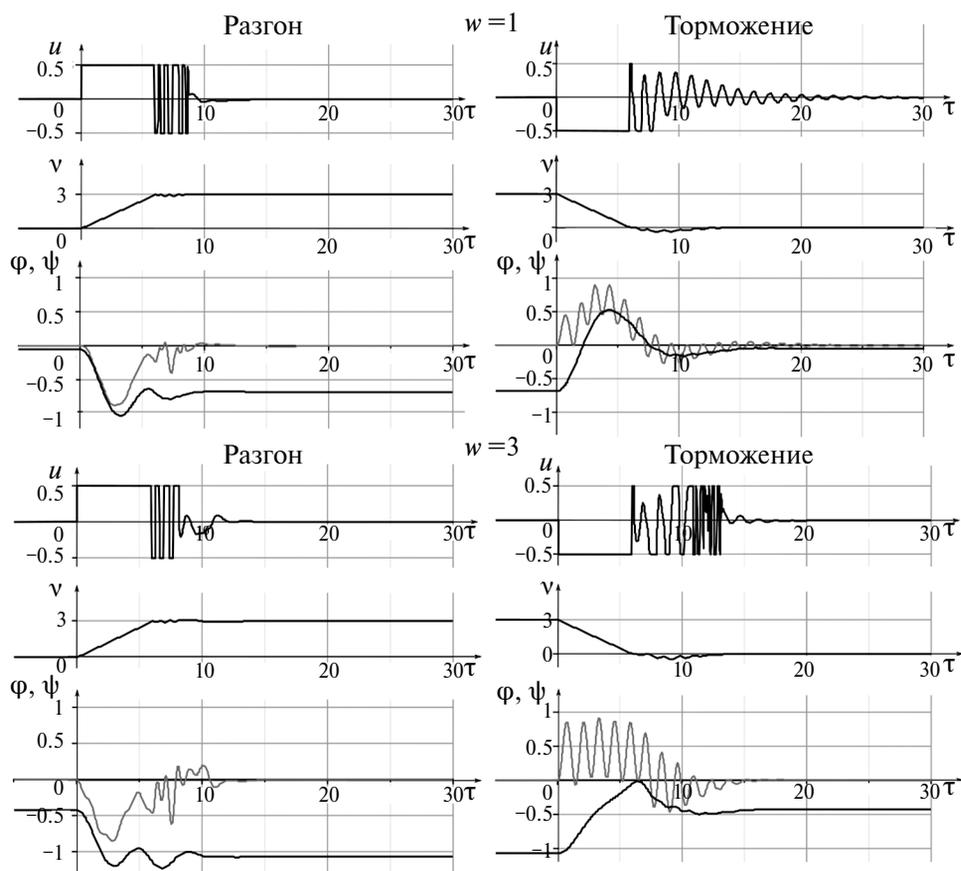


Рис. 4. Примеры процессов разгона и торможения при управлении (4.3) для разных величин скорости ветра.

сферической. Для моделирования колебаний жидкости в полости используется модифицированная маятниковая модель. Предложен алгоритм управления ускорением коптера, предназначенный для перехода с одного режима стационарного горизонтального полета на другой и подавления колебаний маятника и жидкости в полости. Проведено численное моделирование, подтвердившее работоспособность этого алгоритма.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Omar H.M., Akram R., Mukras S.M.S., Mahvouz A.A.* Recent Advances and Challenges in Controlling Quadrotors with Suspended Loads // *Alexandria Engineering J.* 2022. V. 63. P. 253–270.
<https://doi.org/10.1016/j.aej.2022.08.001>
2. *Estevez J., Garate G., Lopez-Guede J.M., Larrea M.* Review of Aerial Transportation of Suspended-Cable Payloads with Quadrotors // *Drones.* 2024. V. 8. № 2. P. 35.
<https://doi.org/10.3390/drones8020035>
3. *Xian B., Wang S., Yang S.* An Online Trajectory Planning Approach for a Quadrotor UAV with a Slung Payload // *IEEE Trans. Ind. Electron.* 2019. V. 67. P. 6669–6678.
<https://doi.org/10.1109/TIE.2019.2938493>
4. *De Angelis E.L., Giulietti F., Pipeleers G.* Two-Time-Scale Control of a Multirotor Aircraft for Suspended Load Transportation // *Aerosp. Sci. Technol.* 2019. V. 84. P. 193–203.
<https://doi.org/10.1016/j.ast.2018.10.012>
5. *Sun L., Wang K., Mishamandani A.H.A., Zhao G., Huang H., Zhao X., Zhang B.* A Novel Tension-Based Controller Design for the Quadrotor-Load System // *Control Eng. Pract.* 2021. V. 112. P. 104818.
6. *Baraeen A., Hamanah W.M., Bawazir A., Quama M.M., El-Ferik S., Baraeen S., Abido A.M.* Optimal Nonlinear Backstepping Controller Design of a Quadrotor-Slung Load System Using Particle Swarm Optimization // *Alexandria Engineering J.* 2023. V. 68. P. 551–560.
<https://doi.org/10.1016/j.aej.2023.01.050>
7. *Kong L., Reis J., He W., Yu X., Silvestre C.* On Dynamic Performance Control for a Quadrotor-Slung-Load System with Unknown Load Mass // *Automatica.* 2024. V. 162. P. 111516.
<https://doi.org/10.1016/j.automatica.2024.111516>
8. *Goodarzi F.A., Lee D., Lee T.* Geometric Control of a Quadrotor UAV Transporting a Payload Connected via Flexible Cable // *Int. J. Control. Autom. Syst.* 2015. V. 13. P. 1486–1498.
<https://doi.org/10.1007/s12555-014-0304-0>
9. *Chang P., Yang S., Tong J., Zhang F.* A New Adaptive Control Design for a Quadrotor System with Suspended Load by an Elastic Rope // *Nonlinear Dyn.* 2023. V. 111. P. 19073–19092.
10. *Kaya U.C., Subbarao K.* Momentum Preserving Simulation of Cooperative Multirotors with Flexible-Cable Suspended Payload // *J. Dyn. Syst. Meas. Control.* 2022. V. 144. P. 041007.
<https://doi.org/10.1115/1.4053343>
11. *Wu P.X., Yang C.C., Cheng T.H.* Cooperative Transportation of UAVs Without Inter-UAV Communication // *IEEE/ASME Trans. Mechatron.* 2023. V. 28. P. 2340–2351.
<https://doi.org/10.1109/TMECH.2023.3234511>
12. *Bisgaard M., Bendtsen J.D., La Cour-Harbo A.* Modeling of Generic Slung Load System // *J. Guid. Control. Dyn.* 2009. V. 32. № 2. P. 433–449.
<https://doi.org/10.2514/1.36539>
13. *Куликов В.Е., Чукаева А.Н.* Система управления квадрокоптером при транспортировке груза на внешней подвеске // *Тр. Московск. ин-та электромеханики и автоматики.* 2016. Т. 14. С. 2–16.
14. *Sun L., Wang K., Mishamandani A.H.A., Zhao G., Huang H., Zhao X., Zhang B.* A Novel Tension-Based Controller Design for the Quadrotor-Load System // *Control Eng. Pract.* 2021. V. 112. P. 104818.
15. *Голуб А.П., Зудов В.Б., Локишин Б.Я., Селюцкий Ю.Д.* О робастной стабилизации движения квадрокоптера с подвешенным грузом // *Мехатроника, автоматизация, управление.* 2024. Т. 25. № 9. С. 490–500.
<https://doi.org/10.17587/mau.25.490-500>
16. *Охоцимский Д.Е.* К теории движения тел с полостями, частично заполненными жидкостью // *ПММ.* 1956. Т. 20. Вып. 1. С. 3–20.
17. *Abramson H.N., Chu W.H., Ransleben G.E.* Representation of Fuel Sloshing in Cylindrical Tanks by an Equivalent Mechanical Model // *ARS Journal.* 1961. V. 31. № 12. P. 1697–1705.
18. *Колесников К.С.* Колебания жидкости в цилиндрическом сосуде. М.: Изд-во МВТУ им. Н.Э. Баумана, 1964. 97 с.
19. *Stofan A.J., Armstead A.L.* Analytical and Experimental Investigation of Forces and Frequencies Resulting from Liquid Sloshing in a Spherical Tank. Washington: NASA. 1962. Technical Note D-1281.
20. *Abramson H.N., Chu W.H., Garza L.R.* Liquid Sloshing in Spherical Tanks // *AIAA Journal.* 1963. V. 1. № 2. P. 384–389.
<https://doi.org/10.2514/3.1542>
21. *Chu W.H.* Fuel Sloshing in a Spherical Tank Filled to an Arbitrary Depth // *AIAA Journal.* 1964. V. 2. № 11. P. 1972–1979.
<https://doi.org/10.2514/3.2713>
22. *Aliabadi S., Johnson A., Abedi J.* Comparison of Finite Element and Pendulum Models for Simulation of Sloshing // *Computers & Fluids.* 2003. V. 32. № 4. P. 535–545.
[https://doi.org/10.1016/S0045-7930\(02\)00006-3](https://doi.org/10.1016/S0045-7930(02)00006-3)
23. *Godderidge B., Turnock S.R., Tan M.* A Rapid Method for the Simulation of Sloshing Using a Mathematical Model Based on the Pendulum Equation // *Computers & Fluids.* 2012. V. 57. P. 163–171.
<https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2011.12.018>

24. *Moriello L., Biagiotti L., Melchiorri C., Paoli A.* Manipulating Liquids with Robots: A Sloshing-Free Solution // *Control Engineering Practice*. 2018. V. 78. P. 129–141.
<https://doi.org/10.1016/j.conengprac.2018.06.018>
25. *Sayyaadi H., Soltani A.* Modeling and Control for Cooperative Transport of a Slung Fluid Container Using Quadrotors // *Chinese J. of Aeronautics*. 2018. V. 31. № 2. P. 262–272.
<https://doi.org/10.1016/j.cja.2017.12.005>
26. *Колесников К.С.* Динамика ракет. М.: Машиностроение. 1980. 376 с.
27. *Ibrahim R.A.* Liquid Sloshing Dynamics. Theory and Applications. Cambridge, 2005. 972 p.
28. *Квакернаак Х., Сиван Р.* Линейные оптимальные системы управления. М.: Мир, 1977. 650 с.