

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ КЭЛИ–ГАМИЛЬТОНА К АНАЛИТИЧЕСКОМУ СИНТЕЗУ МОДАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПО ВЫХОДУ ЛИНЕЙНЫМИ СТАЦИОНАРНЫМИ СИСТЕМАМИ, ПОРЯДОК КОТОРЫХ РАВЕН ПРОИЗВЕДЕНИЮ ЧИСЛА ВХОДОВ И ВЫХОДОВ

© 2025 г. Н. Е. Zubov^{a, *}, А. В. Lapin^a

^aМГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

*e-mail: nik.zubov@gmail.com

Поступила в редакцию 26.09.2024 г.

После доработки 08.12.2024 г.

Принята к публикации 24.02.2025 г.

Предложен новый аналитический подход к модальному управлению по выходу линейными стационарными системами, порядок которых равен произведению числа входов и выходов, а индексы управляемости и наблюдаемости принимают наибольшее и наименьшее возможные значения. В подходе использована теорема Кэли–Гамильтона применительно к матрице замкнутой системы управления. Предлагаемый метод управления по выходу не ограничен в применении только системами четвертого порядка с двумя входами и двумя выходами. Также применимость метода не зависит от того, приводится ли система к модальному управлению по состоянию с меньшим числом входов или к модальному наблюдению с меньшим числом выходов. На примерах систем шестого порядка с несколькими входами и несколькими выходами, не приводимых к системам с меньшим числом входов или выходов, продемонстрировано получение аналитических решений задачи модального управления по выходу, обеспечивающих заданное размещение полюсов. Для систем из рассматриваемого класса получаемые решения единственны.

Ключевые слова: модальное управление по выходу, индекс управляемости, индекс наблюдаемости, характеристический полином, линейное двустороннее матричное уравнение, матричный аннулятор, теорема Кэли–Гамильтона

DOI: 10.31857/S0002338825030027, EDN: BFRADU

APPLYING THE CAYLEY–HAMILTON THEOREM TO ANALYTIC SYNTHESIS OF MODAL CONTROL BY OUTPUT FOR LINEAR TIME- INVARIANT SYSTEMS HAVING THE ORDER EQUAL TO THE PRODUCT OF INPUTS AND OUTPUTS

N. E. Zubov^{a, *}, A. V. Lapin^a

^aBauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

*e-mail: nik.zubov@gmail.com

A new analytical approach to static output feedback pole placement for linear time-invariant systems having the order equal to the product of inputs and outputs, and controllability and observability indices take the highest and the lowest possible values is proposed. The approach uses the Cayley–Hamilton theorem in relation to a closed-loop control system matrix. The applicability of the proposed method of static output feedback pole placement is not limited only by fourth-order systems with two inputs and two outputs. Besides, the method applicability does not depend on whether the system is reducible to modal control by state with fewer inputs or to modal observation with fewer outputs. On the examples of sixth-order multi-input multi-output systems not reducible to systems with fewer inputs or outputs, the process of obtaining analytical

solutions to the problem of modal control by output, providing desirable pole placement is demonstrated. For systems from the considering class, the obtaining solutions are unique.

Keywords: static output feedback pole placement, controllability index, observability index, characteristic polynomial, linear two-sided matrix equation, matrix zero-divisor, Cayley–Hamilton theorem

Введение. Обратная связь по выходу [1] обеспечивает одну из основных стратегий управления в технических системах при неполной информации о векторе состояния, в частности при отказах измерителей [2]. Методы модального управления (размещения полюсов) для линейных стационарных систем (ЛСС) с обратной связью по выходу напрямую зависят от соотношения между количеством управляющих входов, наблюдаемых выходов и порядком системы (размерностью вектора состояния). Для ЛСС, порядок которых *меньше суммы* входов и выходов, управление по выходу *хорошо известно* и может быть построено аналитически [3], например с помощью многоуровневой декомпозиции [4] на основе подходов Ван дер Воуда [5]. С другой стороны, доказано, что если порядок ЛСС *больше произведения* ее входов и выходов, то управление по выходу с произвольным желаемым размещением полюсов *не существует* [6–8].

В настоящее время исследуются ЛСС, порядок которых не меньше суммы и не больше произведения входов и выходов [9–12]. Однако существующие методы модального управления по выходу для таких ЛСС применимы лишь к весьма ограниченным частным случаям. Наиболее полно исследованы ЛСС четвертого порядка с двумя входами и двумя выходами [9–11]. Для них аналитические методы построения регуляторов по выходу имеются как в случае приводимости к ЛСС с одним входом или выходом [9], при неравных индексах управляемости и наблюдаемости [10, 11], так и в самом общем случае полностью управляемой и полностью наблюдаемой ЛСС. Для ЛСС более высокого порядка аналогичный метод модального управления по состоянию существует только в случае приводимости к модальному управлению по состоянию с меньшим числом входов или к модальному наблюдению с меньшим числом выходов [12]. Приведение строится с помощью эквивалентного перехода к специальным каноническим формам [12, 13] и операции блочного транспонирования [14, 15].

Во всех описанных выше методах модального управления по выходу (двусторонняя матричная задача размещения полюсов) за основу берутся различные преобразования подобия [13, 16], выполняемые над матрицей замкнутой ЛСС. Для преобразованной ЛСС решается односторонняя матричная задача размещения полюсов (задача модального управления по состоянию [17] или задача модального наблюдения [18]). А далее обеспечивается разрешимость линейного одностороннего уравнения связи с матрицей регулятора по выходу [19]. Практика показывает, что такой подход существенно затрудняет поиск регуляторов по выходу для ЛСС, порядок которых не меньше суммы входов и выходов, из-за невозможности одновременно обеспечить желаемое размещение полюсов и разрешимость уравнения связи.

В настоящей статье к рассмотрению предлагается принципиально новый подход без использования декомпозиции и иных преобразований подобия. Исследуется необходимое условие размещения полюсов в виде удовлетворения матрицы замкнутой ЛСС теореме Кэли–Гамильтона [16]. Для ЛСС, порядок которых равен произведению числа входов и выходов, а индексы управляемости и наблюдаемости [20] принимают наибольшее и наименьшее возможные значения, необходимое условие дает единственное решение, которое можно непосредственно проверить на обеспечение желаемого спектра.

1. Постановка задачи. Рассматриваются ЛСС

$$\begin{aligned}\sigma \mathbf{x}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t),\end{aligned}\tag{1.1}$$

где σ – оператор, соответствующий дифференцированию $\sigma \mathbf{x}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t)$ по времени t в непрерывном случае $t \in \mathbb{R}$ или сдвигу $\sigma \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t+1)$ на шаг вперед в дискретном случае $t \in \mathbb{Z}$; $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ и $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^{l \times 1}$ – соответственно векторы состояния, управления (входов) и наблюдения (выходов); $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ и $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{l \times n}$ – постоянные матрицы состояния, управления и наблюдения. Здесь и далее запись вида $\mathbb{R}^{n \times m}$ обозначает множество вещественных матриц, имеющих размерность $n \times m$.

Предполагается, что ЛСС (1.1) полностью управляема и полностью наблюдаема, ее размерности удовлетворяют равенству

$$n = ml\tag{1.2}$$

и имеет место один из случаев:

1) индекс управляемости [20] принимает наибольшее возможное значение $b = n - m + 1$, а индекс наблюдаемости [20] – наименьшее возможное значение $c = n/l = m$;

2) индекс управляемости принимает наименьшее возможное значение $b = n/m = l$, а индекс наблюдаемости – наибольшее возможное значение $c = n - l + 1$.

Определение 1. *Индексом управляемости* полностью управляемой ЛСС (1.1) называется наименьшее число b первых блочных столбцов матрицы управляемости Калмана, при котором достигается полный ранг n , равный числу ее строк:

$$\text{rank} \left[\mathbf{B} \mid \mathbf{AB} \mid \dots \mid \mathbf{A}^{b-1} \mathbf{B} \right] = n.$$

Определение 2. *Индексом наблюдаемости* полностью наблюдаемой ЛСС (1.1) называется наименьшее число c первых блочных строк матрицы наблюдаемости Калмана, при котором достигается полный ранг n , равный числу ее столбцов:

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{c-1} \end{bmatrix} = n.$$

Требуется определить матрицу \mathbf{F} регулятора по выходу, обеспечивающую матрицу замкнутой ЛСС

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} - \mathbf{BFC}$$

желаемый характеристический полином

$$p^*(\lambda) = \sum_{i=0}^n p_i^* \lambda^{n-i} \quad (1.3)$$

с коэффициентами $p_0^* = 1$ и $p_i^* \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n}$.

2. Описание подхода. Рассмотрим, как связаны между собой матричные полиномы

$$\mathbf{P}_k = \sum_{i=0}^k p_i^* \tilde{\mathbf{A}}^{k-i}, \quad \bar{\mathbf{P}}_k = \sum_{i=0}^k p_i^* \mathbf{A}^{k-i}$$

различных степеней $k = \overline{0, n}$, записанные для матриц замкнутой и разомкнутой ЛСС (1.1) соответственно.

Если выполнять расчет полиномов \mathbf{P}_k со стороны управления, т.е.

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} - \mathbf{BK}, \quad \mathbf{K} = \mathbf{FC},$$

то справедливы *прямые* рекуррентные формулы [21]:

$$\mathbf{P}_k = \bar{\mathbf{P}}_k - \underbrace{\left[\mathbf{B} \mid \mathbf{AB} \mid \dots \mid \mathbf{A}^{k-2} \mathbf{B} \mid \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{B} \right]}_{\mathbf{U}_k} \begin{bmatrix} \mathbf{KP}_{k-1} \\ \mathbf{KP}_{k-2} \\ \vdots \\ \mathbf{KP}_1 \\ \mathbf{K} \end{bmatrix}. \quad (2.1)$$

После умножения обеих частей равенства (2.1) справа на матрицу \mathbf{B} получаем:

$$\mathbf{P}_k \mathbf{B} = \underbrace{\left[\mathbf{B} \mid \mathbf{AB} \mid \dots \mid \mathbf{A}^{k-2} \mathbf{B} \mid \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{B} \mid \mathbf{A}^k \mathbf{B} \right]}_{\mathbf{U}_{k+1}} \begin{bmatrix} p_k^* \mathbf{I}_m - \mathbf{KP}_{k-1} \mathbf{B} \\ p_{k-1}^* \mathbf{I}_m - \mathbf{KP}_{k-2} \mathbf{B} \\ \vdots \\ p_2^* \mathbf{I}_m - \mathbf{KP}_1 \mathbf{B} \\ p_1^* \mathbf{I}_m - \mathbf{KB} \\ \mathbf{I}_m \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

Здесь и далее символом \mathbf{I}_m обозначена единичная матрица соответствующего порядка m .

Если выполнять расчет полиномов \mathbf{P}_k со стороны наблюдения, т.е.

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} - \mathbf{LC}, \quad \mathbf{L} = \mathbf{BF},$$

то справедливы дуальные рекуррентные формулы [21]:

$$\mathbf{P}_k = \bar{\mathbf{P}}_k - \underbrace{[\mathbf{P}_{k-1}\mathbf{L} \mid \mathbf{P}_{k-2}\mathbf{L} \mid \dots \mid \mathbf{P}_1\mathbf{L} \mid \mathbf{L}]}_{\mathbf{N}_k} \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{k-2} \\ \mathbf{CA}^{k-1} \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

После умножения обеих частей равенства (2.3) слева на матрицу \mathbf{C} находим:

$$\mathbf{CP}_k = \left[p_k^* \mathbf{I}_l - \mathbf{CP}_{k-1}\mathbf{L} \mid p_{k-1}^* \mathbf{I}_l - \mathbf{CP}_{k-2}\mathbf{L} \mid \dots \mid p_2^* \mathbf{I}_l - \mathbf{CP}_1\mathbf{L} \mid p_1^* \mathbf{I}_l - \mathbf{CL} \mid \mathbf{I}_l \right] \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{k-2} \\ \mathbf{CA}^{k-1} \\ \mathbf{CA}^k \end{bmatrix}}_{\mathbf{N}_{k+1}}. \quad (2.4)$$

Для того чтобы матрица \mathbf{F} являлась решением задачи модального управления по выходу, необходимо, чтобы она удовлетворяла условию (теорема Кэли–Гамильтона [16])

$$\mathbf{P}_n(\mathbf{F}) = \mathbf{0}_{n \times n}. \quad (2.5)$$

Здесь и далее $\mathbf{0}$ (или $\mathbf{0}_{p \times q}$) – нулевая матрица нужного размера (или размера $p \times q$, если указано в нижнем индексе).

Если рассчитывать полином \mathbf{P}_n по прямой схеме (2.1), то из равенства (2.5) следует:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B} \mid \mathbf{AB} \mid \dots \mid \mathbf{A}^{n-2}\mathbf{B} \mid \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}_n} \begin{bmatrix} \mathbf{FCP}_{n-1} \\ \mathbf{FCP}_{n-2} \\ \vdots \\ \mathbf{FCP}_1 \\ \mathbf{FC} \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{P}}_n, \quad (2.6)$$

где \mathbf{U}_n – матрица управляемости Калмана.

Определяя полином \mathbf{P}_n по дуальной схеме (2.3), из равенства (2.5) получим:

$$\underbrace{[\mathbf{P}_{n-1}\mathbf{BF} \mid \mathbf{P}_{n-2}\mathbf{BF} \mid \dots \mid \mathbf{P}_1\mathbf{BF} \mid \mathbf{BF}]}_{\mathbf{N}_n} \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-2} \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{P}}_n, \quad (2.7)$$

где \mathbf{N}_n – матрица наблюдаемости Калмана.

Далее подставим в “прямое” равенство (2.6) матрицы \mathbf{CP}_i , $i = \overline{0, n-1}$, рассчитанные по дуальной схеме (2.4), или подставим в “дуальное” равенство (2.7) матрицы $\mathbf{P}_i\mathbf{B}$, $i = \overline{0, n-1}$, рассчитанные по прямой схеме (2.2). Результат подстановок одинаков:

$$\mathbf{U}_n \mathbf{W}_n(\mathbf{F}) \mathbf{N}_n = \bar{\mathbf{P}}_n, \quad (2.8)$$

где

$$\mathbf{W}_n(\mathbf{F}) = \begin{bmatrix} p_{n-1}^* \mathbf{F} - \mathbf{V}_{n-2}(\mathbf{F}) & p_{n-2}^* \mathbf{F} - \mathbf{V}_{n-3}(\mathbf{F}) & \dots & p_1^* \mathbf{F} - \mathbf{V}_0(\mathbf{F}) & \mathbf{F} \\ p_{n-2}^* \mathbf{F} - \mathbf{V}_{n-3}(\mathbf{F}) & \ddots & \ddots & \mathbf{F} & \mathbf{0} \\ \vdots & & & \mathbf{0} & \vdots \\ p_1^* \mathbf{F} - \mathbf{V}_0(\mathbf{F}) & \mathbf{F} & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{F} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (2.9)$$

$$\mathbf{V}_i(\mathbf{F}) = \mathbf{F} \mathbf{C} p_i(\mathbf{F}) \mathbf{B} \mathbf{F}, \quad i = \overline{0, n-2}.$$

Равенство (2.8) представляет собой линейное двустороннее матричное уравнение [13] относительно блочно-симметрической матрицы \mathbf{W}_n (2.9), которая в свою очередь является нелинейной (степенной) функцией от аргумента \mathbf{F} – искомой матрицы регулятора по выходу.

Уравнение (2.8) всегда разрешимо относительно матрицы \mathbf{W}_n [19], поскольку ЛСС (1.1) полностью управляема ($\text{rank } \mathbf{U}_n = n, \overline{\mathbf{U}_n}^L = \mathbf{0}$) и полностью наблюдаема ($\text{rank } \mathbf{N}_n = n, \overline{\mathbf{N}_n}^R = \mathbf{0}$). Здесь и далее символами $\overline{\mathbf{M}}^L$ и $\overline{\mathbf{M}}^R$ обозначены левый (*Left*) и правый (*Right*) аннуляторы максимального ранга [13], соответствующие матрице \mathbf{M} .

Представим матрицу (2.9) в виде разности:

$$\mathbf{W}_n(\mathbf{F}) = \mathbf{W}_{n,1}(\mathbf{F}) - \mathbf{W}_{n,2}(\mathbf{F}), \quad (2.10)$$

где

$$\mathbf{W}_{n,1}(\mathbf{F}) = \begin{bmatrix} p_{n-1}^* \mathbf{F} & p_{n-2}^* \mathbf{F} & \dots & p_1^* \mathbf{F} & \mathbf{F} \\ p_{n-2}^* \mathbf{F} & \ddots & \ddots & \mathbf{F} & \mathbf{0} \\ \vdots & p_1^* \mathbf{F} & \ddots & \mathbf{0} & \vdots \\ p_1^* \mathbf{F} & \mathbf{F} & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{F} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W}_{n,2}(\mathbf{F}) = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{n-2}(\mathbf{F}) & \mathbf{V}_{n-3}(\mathbf{F}) & \dots & \mathbf{V}_0(\mathbf{F}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{V}_{n-3}(\mathbf{F}) & \ddots & \ddots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \mathbf{V}_0(\mathbf{F}) & \ddots & \mathbf{0} & \vdots \\ \mathbf{V}_0(\mathbf{F}) & \mathbf{0} & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

Компонента $\mathbf{W}_{n,1}(\mathbf{F})$ зависит от матрицы \mathbf{F} линейно, а компонента $\mathbf{W}_{n,2}(\mathbf{F})$ содержит более высокие степени матрицы \mathbf{F} .

От компоненты $\mathbf{W}_{n,2}(\mathbf{F})$ можно избавиться, умножив матрицу (2.10) слева или справа на специальную квадратную и неособенную матрицу (соответственно $\mathbf{W}_{nL}(\mathbf{F})$ или $\mathbf{W}_{nR}(\mathbf{F})$), имеющую блочно-треугольный вид и зависящую от матрицы \mathbf{F} линейно:

$$\mathbf{W}_{nL}(\mathbf{F}) = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m & \mathbf{F} \mathbf{M}_0 & \mathbf{F} \mathbf{M}_1 & \dots & \mathbf{F} \mathbf{M}_{n-2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_m & \mathbf{F} \mathbf{M}_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \mathbf{0} & \ddots & \ddots & \mathbf{F} \mathbf{M}_1 \\ \mathbf{0} & \ddots & \ddots & \mathbf{I}_m & \mathbf{F} \mathbf{M}_0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{I}_m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W}_{nR}(\mathbf{F}) = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_l & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_0 \mathbf{F} & \mathbf{I}_l & \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_1 \mathbf{F} & \mathbf{M}_0 \mathbf{F} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{I}_l & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_{n-2} \mathbf{F} & \dots & \mathbf{M}_1 \mathbf{F} & \mathbf{M}_0 \mathbf{F} & \mathbf{I}_l \end{bmatrix}, \quad (2.12)$$

где

$$\mathbf{M}_i = \mathbf{C} \mathbf{A}^i \mathbf{B}, \quad i = \overline{0, n-2}. \quad (2.13)$$

Действительно, после умножения матрицы (2.10) на одну из матриц (2.12) остается только компонента $\mathbf{W}_{n,1}(\mathbf{F})$:

$$\mathbf{W}_{nL}(\mathbf{F}) \mathbf{W}_n(\mathbf{F}) = \mathbf{W}_{n,1}(\mathbf{F}), \quad (2.14)$$

$$\mathbf{W}_n(\mathbf{F}) \mathbf{W}_{nR}(\mathbf{F}) = \mathbf{W}_{n,1}(\mathbf{F}), \quad (2.15)$$

Равенства (2.14) и (2.15) справедливы для *любого* $n \in \mathbb{N}$, в том числе для $n = l$ или $n = m$.

3. Случай систем с наибольшим возможным индексом управляемости и наименьшим возможным индексом наблюдаемости. Пусть ЛСС (1.1), (1.2) имеет наибольший возможный индекс управляемости $b = n - m + 1$ и наименьший возможный индекс наблюдаемости $c = n/l = m$.

Тогда матрица

$$\mathbf{U}_{n-m} = \left[\mathbf{B} \mid \mathbf{A} \mathbf{B} \mid \dots \mid \mathbf{A}^{n-m-1} \mathbf{B} \right]$$

(левые блоки матрицы управляемости U_n) имеет левый аннулятор максимального ранга 1 (вектор-строка $\overline{U_{n-m}^L}$), а матрица

$$N_m = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{m-1} \end{bmatrix}$$

(верхние блоки матрицы наблюдаемости N_n) является квадратной и неособенной.

Умножив обе части равенства (2.8) слева на аннулятор $\overline{U_{n-m}^L}$, а справа – на обратную матрицу N_m^{-1} , получим уравнение:

$$r_B^T W_m(F) = s_B^T, \tag{3.1}$$

где векторы-строки

$$r_B^T = \overline{U_{n-m}^L} A^{n-m} U_m, \quad s_B^T = \overline{U_{n-m}^L} P_n N_m^{-1} \tag{3.2}$$

имеют соответственно размеры $1 \times mm$ и $1 \times ml$. Поскольку матричная функция $W_m(F)$ в левой части уравнения (3.1) является крайним правым множителем, ее можно линеаризовать относительно аргумента F по формуле (2.15). Тогда из уравнения (3.1) выводится линейное относительно матрицы F уравнение

$$s_B^T W_{m,1}(F) = s_B^T W_{mR}(F). \tag{3.3}$$

В соответствии с видом блочных матриц $W_{m,1}(F)$ (2.11) и $W_{mR}(F)$ (2.12) в каждом блочном столбце равенства (3.3) матрица F оказывается общим множителем справа. Поэтому удобно разбить векторы r_B^T и s_B^T на блоки $r_{B,i}^T \in \mathbb{R}^{1 \times m}$ и $s_{B,i}^T \in \mathbb{R}^{1 \times l}$, $i = \overline{1, m}$:

$$r_B^T = [r_{B,1}^T \mid r_{B,2}^T \mid \dots \mid r_{B,m-1}^T \mid r_{B,m}^T], \quad s_B^T = [s_{B,1}^T \mid s_{B,2}^T \mid \dots \mid s_{B,m-1}^T \mid s_{B,m}^T] \tag{3.4}$$

и выполнить блочное $1 \times l$ транспонирование [14, 15] обеих частей уравнения (3.3):

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{r}_{B,1}^T \\ \tilde{r}_{B,2}^T \\ \vdots \\ \tilde{r}_{B,m-1}^T \\ \tilde{r}_{B,m}^T \end{bmatrix}}_{R_B} F = \underbrace{\begin{bmatrix} s_{B,1}^T \\ s_{B,2}^T \\ \vdots \\ s_{B,m-1}^T \\ s_{B,m}^T \end{bmatrix}}_{S_B}. \tag{3.5}$$

Здесь векторы $\tilde{r}_{B,i}^T$, $i = \overline{1, m}$, таковы, что

$$\begin{bmatrix} \tilde{r}_{B,1}^T \\ \tilde{r}_{B,2}^T \\ \vdots \\ \tilde{r}_{B,m-1}^T \\ \tilde{r}_{B,m}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{m-1}^* & p_{m-2}^* & \dots & p_1^* & 1 \\ p_{m-2}^* & \dots & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & p_1^* & \dots & \dots & \vdots \\ p_1^* & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{B,1}^T \\ r_{B,2}^T \\ \vdots \\ r_{B,m-1}^T \\ r_{B,m}^T \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} s_{B,2}^T & s_{B,3}^T & \dots & s_{B,m}^T \\ s_{B,3}^T & \dots & \dots & \mathbf{0}_{1 \times l} \\ \vdots & s_{B,m}^T & \dots & \vdots \\ s_{B,m}^T & \mathbf{0}_{1 \times l} & \dots & \mathbf{0}_{1 \times l} \\ \mathbf{0}_{1 \times l} & \mathbf{0}_{1 \times l} & \dots & \mathbf{0}_{1 \times l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ \vdots \\ M_{m-2} \end{bmatrix}.$$

Таким образом, единственная матрица, которая может быть решением задачи (1.1), (1.2) при $b = n - m + 1$ и $c = m$, определяется из соотношения

$$F = R_B^{-1} S_B. \tag{3.6}$$

В частном случае $m = 2$ формула (3.6) принимает вид:

$$F = \begin{bmatrix} p_1^* r_{B,1}^T + r_{B,2}^T - s_{B,2}^T M_0 \\ r_{B,1}^T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} s_{B,1}^T \\ s_{B,2}^T \end{bmatrix}.$$

4. Случай систем с наименьшим возможным индексом управляемости и наибольшим возможным индексом наблюдаемости. Пусть ЛСС (1.1), (1.2) имеет наименьший возможный индекс управляемости $b = n/m = l$ и наибольший возможный индекс наблюдаемости $c = n - l + 1$. Тогда матрица

$$U_l = [B \mid AB \mid \dots \mid A^{l-1}B]$$

(левые блоки матрицы управляемости U_n) является квадратной и неособенной, а матрица

$$N_{n-l} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-l-1} \end{bmatrix}$$

(верхние блоки матрицы наблюдаемости N_n) имеет правый аннулятор максимального ранга 1 (вектор-столбец $\overline{N_{n-l}}^R$).

Умножив обе части равенства (2.8) слева на обратную матрицу U_l^{-1} , а справа – на аннулятор $\overline{N_{n-l}}^R$, получим уравнение:

$$W_l(F)r_C = s_C, \quad (4.1)$$

где векторы-столбцы

$$r_C = N_l A^{n-l} \overline{N_{n-l}}^R, \quad s_C = U_l^{-1} \overline{P_n} \overline{N_{n-l}}^R \quad (4.2)$$

имеют соответственно размеры $ll \times 1$ и $ml \times 1$. Поскольку матричная функция $W_l(F)$ в левой части уравнения (4.1) является крайним левым множителем, ее можно линейаризовать относительно аргумента F по формуле (2.14). Тогда из уравнения (4.1) следует линейное относительно матрицы F уравнение:

$$W_{l,1}(F)r_C = W_{lL}(F)s_C. \quad (4.3)$$

В соответствии с видом блочных матриц $W_{l,1}(F)$ (2.11) и $W_{lL}(F)$ (2.12) в каждой блочной строке равенства (4.3) матрица F оказывается общим множителем слева. Поэтому удобно разбить векторы r_C и s_C на блоки $r_{C,i} \in \mathbb{R}^{l \times 1}$ и $s_{C,i} \in \mathbb{R}^{m \times 1}$, $i = \overline{1, l}$:

$$r_C = \begin{bmatrix} r_{C,1} \\ r_{C,2} \\ \vdots \\ r_{C,l-1} \\ r_{C,l} \end{bmatrix}, \quad s_C = \begin{bmatrix} s_{C,1} \\ s_{C,2} \\ \vdots \\ s_{C,l-1} \\ s_{C,l} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

и выполнить блочное $m \times 1$ транспонирование [14, 15] обеих частей уравнения (4.3):

$$F \underbrace{[\tilde{r}_{C,1} \mid \tilde{r}_{C,2} \mid \dots \mid \tilde{r}_{C,l-1} \mid \tilde{r}_{C,l}]}_{R_C} = \underbrace{[s_{C,1} \mid s_{C,2} \mid \dots \mid s_{C,l-1} \mid s_{C,l}]}_{S_C}. \quad (4.5)$$

Здесь векторы $\tilde{r}_{C,i}$, $i = \overline{1, l}$, таковы, что

$$\begin{aligned} [\tilde{r}_{C,1} \mid \tilde{r}_{C,2} \mid \dots \mid \tilde{r}_{C,l-1} \mid \tilde{r}_{C,l}] &= [r_{C,1} \mid r_{C,2} \mid \dots \mid r_{C,l-1} \mid r_{C,l}] \begin{bmatrix} p_{l-1}^* & p_{l-2}^* & \dots & p_1^* & 1 \\ p_{l-2}^* & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & p_1^* & \ddots & 0 & \vdots \\ p_1^* & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} - \\ &- [M_0 \mid M_1 \mid \dots \mid M_{l-2}] \begin{bmatrix} s_{C,2} & s_{C,3} & \dots & s_{C,l} & \mathbf{0}_{m \times 1} \\ s_{C,3} & \ddots & \ddots & \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} \\ \vdots & s_{C,l} & \ddots & \vdots & \vdots \\ s_{C,l} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \dots & \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Таким образом, единственная матрица, которая может быть решением задачи (1.1), (1.2) при $b = l$ и $c = n - l + 1$, определяется из соотношения

$$\mathbf{F} = \mathbf{S}_C \mathbf{R}_C^{-1}. \quad (4.6)$$

В частном случае $l = 2$ формула (4.6) принимает вид:

$$\mathbf{F} = \left[\mathbf{s}_{C,1} \mid \mathbf{s}_{C,2} \right] \left[p_1^* \mathbf{r}_{C,1} + \mathbf{r}_{C,2} - \mathbf{M}_0 \mathbf{s}_{C,2} \mid \mathbf{r}_{C,1} \right]^{-1},$$

что совпадает с результатом, полученным в [10] для четырехмерной ЛСС.

5. Аналитические примеры. Рассмотрим методический и практический примеры аналитического расчета модальных регуляторов по формулам (3.6) и (4.6) соответственно. Конкретные матрицы состояния, управления и наблюдения для ЛСС (1.1), (1.2) зададим в символьном виде. Методический пример применения формулы (3.6) содержит минимальное число ненулевых коэффициентов, упрощающее запись, но достаточное для существования решения. Практический пример применения формулы (4.6) касается управления орбитальной ориентацией космического аппарата (КА) с помощью двигателей-маховиков [22]. В обоих примерах продемонстрирована невозможность приведения модального управления по выходу к модальному управлению по состоянию с одним входом или модальному наблюдению с одним выходом [12] и соответственно эффективность использования предлагаемого подхода.

Пример 1 (методический). Требуется построить обеспечивающее полином (1.3) модальное управление по выходу для ЛСС (1.1), (1.2) со следующими матрицами состояния, управления и наблюдения:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & a_{1,2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{3,5} & 0 \\ a_{4,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{5,6} \\ 0 & 0 & 0 & a_{6,4} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & b_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & b_{3,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.1)$$

Рассматриваемая ЛСС порядка $n = 6$ имеет $m = 3$ входа и $l = 2$ выхода. Запишем левые блочные столбцы матрицы управляемости Калмана:

$$\mathbf{U}_3 = \left[\mathbf{B} \mid \mathbf{AB} \mid \mathbf{A}^2 \mathbf{B} \right] =$$

$$= \begin{bmatrix} b_{1,1} & 0 & 0 & 0 & a_{1,2} b_{2,2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{2,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{3,3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{4,1} b_{1,1} & 0 & 0 & 0 & a_{1,2} a_{4,1} b_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{4,1} a_{6,4} b_{1,1} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{U}_4 = \left[\mathbf{U}_3 \mid \mathbf{A}^3 \mathbf{B} \right] = \mathbf{U}_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{4,1} a_{5,6} a_{6,4} b_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & a_{1,2} a_{4,1} a_{6,4} b_{2,2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Полная управляемость с индексом $b = 4$ имеет место при условии

$$a_{4,1} a_{5,6} a_{6,4} b_{1,1} b_{2,2} b_{3,3} \neq 0. \quad (5.2)$$

Запишем верхние блочные строки матрицы наблюдаемости Калмана:

$$\mathbf{N}_3 = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & a_{3,5} & 0 \\ a_{4,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{3,5}a_{5,6} \\ 0 & a_{1,2}a_{4,1} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Полная наблюдаемость с индексом $c = 3$ имеет место при условии

$$a_{1,2}a_{3,5}a_{4,1}a_{5,6} \neq 0. \quad (5.3)$$

Таким образом, при выполнении условий (5.2) и (5.3) рассматриваемая ЛСС имеет наибольший возможный индекс управляемости $b = n - m + 1 = 4$ и наименьший возможный индекс наблюдаемости $c = n/l = m = 3$ (случай 1)).

Проверим, возможно ли решить рассматриваемую задачу путем приведения к модальному управлению по состоянию с меньшим числом входов $m_{low} < l$ [12]. Необходимое условие приводимости [12]

$$\frac{n}{m_{low}} - \frac{n}{l} \leq b - 1 \leq n - m \Rightarrow \frac{6}{m_{low}} - \frac{6}{2} \leq 4 - 1 \leq 6 - 3$$

выполняется для $m_{low} = 1$. Однако в обобщенной дуальной канонической форме по наблюдению [12] не происходит потери ранга:

$$\mathbf{CA}^3 \mathbf{N}_3^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & a_{3,5}a_{5,6}a_{6,4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = -[\mathbf{P}_{C,3} \mid \mathbf{P}_{C,2} \mid \mathbf{P}_{C,1}],$$

$$\mathbf{Q}_{C,col} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{C,3} \\ \mathbf{Q}_{C,2} \\ \mathbf{Q}_{C,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{C,2} & \mathbf{P}_{C,1} & \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{P}_{C,1} & \mathbf{I}_2 & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{I}_2 & \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \end{bmatrix} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{1,2}a_{4,1}b_{2,2} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ a_{4,1}b_{1,1} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & b_{3,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Q}_{C,row} = [\mathbf{Q}_{C,3} \mid \mathbf{Q}_{C,2} \mid \mathbf{Q}_{C,1}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{3,3} \\ 0 & a_{1,2}a_{4,1}b_{2,2} & 0 & a_{4,1}b_{1,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\text{rank } \mathbf{Q}_{C,row} = 2.$$

При выполнении условий полной управляемости (5.2) и полной наблюдаемости (5.3) строки матрицы $\mathbf{Q}_{C,row}$ линейно независимы. Поэтому с помощью алгоритма, изложенного в работе [12], невозможно привести рассматриваемую задачу модального управления по выходу к модальному управлению по состоянию с одним входом.

Получим решение с помощью *нового метода*, основанного на теореме Кэли–Гамильтона, по формуле (3.6). Используя левый аннулятор

$$\overline{\mathbf{U}}_3^L = [0 \mid 0 \mid 0 \mid 0 \mid 1 \mid 0],$$

рассчитаем векторные блоки (3.4) по формулам (3.2):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}_{B,1}^T & \mathbf{r}_{B,2}^T & \mathbf{r}_{B,3}^T \end{bmatrix} = \overline{\mathbf{U}}_3^L \mathbf{A}^3 \mathbf{U}_3 = a_{4,1} \tilde{a}_{5,6} \begin{bmatrix} b_{1,1} & 0 & 0 & 0 & a_{1,2}b_{2,2} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{s}_{B,1}^T & \mathbf{s}_{B,2}^T & \mathbf{s}_{B,3}^T \end{bmatrix} = \overline{\mathbf{U}}_3^L \overline{\mathbf{P}}_6 \mathbf{N}_3^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \tilde{a}_{5,6} p_4^* & \frac{p_6^*}{a_{3,5}} & \tilde{a}_{5,6} p_3^* & \frac{p_5^*}{a_{3,5}} & \tilde{a}_{5,6} p_2^* \end{bmatrix},$$

где

$$\tilde{a}_{5,6} = a_{5,6} a_{6,4}.$$

Запишем матричные блоки \mathbf{M}_0 и \mathbf{M}_1 , согласно формулам (2.13):

$$\mathbf{M}_0 = \mathbf{CB} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & b_{3,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_1 = \mathbf{CAB} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{4,1}b_{1,1} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Определим матрицы \mathbf{R}_B и \mathbf{S}_B , формирующие равенство (3.5):

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_B &= \begin{bmatrix} p_2^* & p_1^* & 1 \\ p_1^* & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{B,1}^T \\ \mathbf{r}_{B,2}^T \\ \mathbf{r}_{B,3}^T \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{s}_{B,2}^T & \mathbf{s}_{B,3}^T \\ \mathbf{s}_{B,3}^T & \mathbf{0}_{1 \times 2} \\ \mathbf{0}_{1 \times 2} & \mathbf{0}_{1 \times 2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{M}_0 \\ \mathbf{M}_1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & p_1^* & -p_6^* \\ p_1^* & 1 & -p_5^* \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{a}_{5,6} & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{a}_{5,6} & 0 \\ 0 & 0 & 1/a_{3,5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{4,1}b_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & a_{1,2}a_{4,1}b_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & b_{3,3} \end{bmatrix}; \\ \mathbf{S}_B &= \begin{bmatrix} \mathbf{s}_{B,1}^T \\ \mathbf{s}_{B,2}^T \\ \mathbf{s}_{B,3}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & p_4^* \\ p_6^* & p_3^* \\ p_5^* & p_2^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/a_{3,5} & 0 \\ 0 & \tilde{a}_{5,6} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Рассчитаем искомую матрицу \mathbf{F} по формуле (3.6):

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}_B^{-1} \mathbf{S}_B = \begin{bmatrix} b_{1,1}a_{4,1} & 0 & 0 \\ 0 & a_{1,2}a_{4,1}b_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & b_{3,3} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} p_5^*/\tilde{a}_{3,5} & p_2^* \\ p_6^*/\tilde{a}_{3,5} & (p_6^*p_3^* - p_4^*p_5^*)/\tilde{p}_6^* \\ p_1^* & \tilde{a}_{3,5}(p_1^*p_3^* - p_4^*)/\tilde{p}_6^* \end{bmatrix}, \quad (5.4)$$

где

$$\tilde{a}_{3,5} = a_{3,5}\tilde{a}_{5,6}, \quad \tilde{p}_3^* = p_3^* - p_1^*p_2^*, \quad \tilde{p}_6^* = p_6^* - p_1^*p_5^*.$$

Регулятор (5.4) существует, если, помимо условий полной управляемости (5.2) и полной наблюдаемости (5.3), для полинома (1.3) выполняется условие

$$p_6^* \neq p_1^*p_5^*.$$

Запишем матрицу замкнутой ЛСС (1.1) с матрицами (5.1) и (5.4):

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} - \mathbf{BFC} = \begin{bmatrix} 0 & a_{1,2} & -\frac{p_5^*}{\tilde{a}_{3,5}a_{4,1}} & -\frac{p_2^*}{a_{4,1}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{p_6^*}{a_{1,2}\tilde{a}_{3,5}a_{4,1}} & -\frac{p_6^*p_3^* - p_4^*p_5^*}{a_{1,2}a_{4,1}\tilde{p}_6^*} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p_1^* & -\frac{\tilde{a}_{3,5}(p_1^*p_3^* - p_4^*)}{\tilde{p}_6^*} & a_{3,5} & 0 \\ a_{4,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{5,6} \\ 0 & 0 & 0 & a_{6,4} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Проверим совпадение характеристического полинома

$$p(\lambda) = \det(\lambda \mathbf{I}_6 - \tilde{\mathbf{A}})$$

с желаемым характеристическим полиномом (1.3):

$$\begin{aligned}
p(\lambda) &= \lambda^6 + p_1^* \lambda^5 + p_5^* \lambda + p_6^* + \\
&+ \lambda^2 \left(\frac{(\lambda + p_1^*)(p_6^* \tilde{p}_3^* - p_4^* p_5^*) - p_6^*(p_1^* \tilde{p}_3^* - p_4^*)}{\tilde{p}_6^*} + \lambda \left((\lambda + p_1^*) p_2^* - \frac{p_5^*(p_1^* \tilde{p}_3^* - p_4^*)}{\tilde{p}_6^*} \right) \right) = \\
&= \lambda^6 + p_1^* \lambda^5 + p_2^* \lambda^4 + p_4^* \lambda^2 + p_5^* \lambda + p_6^* + (\tilde{p}_3^* + p_1^* p_2^*) \lambda^3 = p^*(\lambda).
\end{aligned}$$

Пример 2 (практический). Требуется построить обеспечивающее полином (1.3) модальное управление по выходу орбитальной ориентацией КА во взаимосвязанных каналах крена и рысканья от двигателей-маховиков. Линеаризованная модель имеет вид (1.1), (1.2) со следующими матрицами состояния, управления и наблюдения [22]:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{2,1} & 0 & 0 & 0 & a_{2,5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -v_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a_{5,2} & 0 & a_{5,4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v_0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -b_{2,1} & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -b_{5,2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.5)$$

Рассматриваемая ЛСС порядка $n = 6$ имеет $m = 2$ входа и $l = 3$ выхода. Запишем левые блочные столбцы матрицы управляемости Калмана:

$$\begin{aligned}
\mathbf{U}_3 &= [\mathbf{B} \mid \mathbf{AB} \mid \mathbf{A}^2 \mathbf{B}] = \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -b_{2,1} & 0 & 0 & -a_{2,5} b_{5,2} \\ -b_{2,1} & 0 & 0 & -a_{2,5} b_{5,2} & -b_{2,1}(a_{2,1} + a_{2,5} a_{5,2}) & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -v_0 & -v_0^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b_{5,2} & -a_{5,2} b_{2,1} & 0 \\ 0 & -b_{5,2} & -a_{5,2} b_{2,1} & 0 & 0 & -b_{5,2}(a_{5,4} + a_{2,5} a_{5,2}) \\ 0 & 1 & v_0 & 0 & 0 & -v_0^2 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Полная управляемость с индексом $b = 3$ имеет место при условии

$$\underbrace{b_{2,1} b_{5,2} \kappa_g \kappa_h}_{-\det \mathbf{U}_3} \neq 0, \quad (5.6)$$

где

$$\kappa_g = (v_0^2 + a_{2,1}) b_{5,2} - v_0 a_{5,2} b_{2,1}, \quad \kappa_h = (v_0^2 + a_{5,4}) b_{2,1} + v_0 a_{2,5} b_{5,2}.$$

Запишем верхние блочные строки матрицы наблюдаемости Калмана:

$$\mathbf{N}_3 = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -v_0 \\ 0 & 0 & v_0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline a_{2,1} & 0 & 0 & 0 & a_{2,5} & 0 \\ 0 & 0 & -v_0^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -v_0^2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{N}_4 = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_3 \\ \mathbf{CA}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_3 & & & & & & \\ 0 & a_{2,1} + a_{2,5}a_{5,2} & 0 & \eta & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & v_0^3 \\ 0 & 0 & -v_0^3 & 0 & 0 & 0 & \end{bmatrix},$$

где

$$\eta = a_{2,5}a_{5,4}.$$

Полная наблюдаемость с индексом $c = 4$ имеет место при условии

$$\eta \neq 0. \tag{5.7}$$

Таким образом, при выполнении условий (5.6) и (5.7) рассматриваемая ЛСС имеет наименьший возможный индекс управляемости $b = n/m = l = 3$ и наибольший возможный индекс наблюдаемости $c = n - l + 1 = 4$ (случай 2)).

Проверим, возможно ли решить рассматриваемую задачу путем приведения к модальному наблюдению с меньшим числом выходов $l_{low} < m$ [12]. Необходимое условие приводимости [12]

$$\frac{n}{l_{low}} - \frac{n}{m} \leq c - 1 \leq n - l \Rightarrow \frac{6}{l_{low}} - \frac{6}{2} \leq 4 - 1 \leq 6 - 3$$

выполняется для $l_{low} = 1$. Однако в обобщенной дуальной канонической форме по управлению [12] не происходит потери ранга:

$$\mathbf{U}_3^{-1} \mathbf{A}^3 \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -a_{2,1}v_0/(\kappa\mu) \\ a_{5,4}v_0\kappa\mu & 0 \\ a_{2,5}v_0\kappa - a_{2,1} & 0 \\ 0 & -a_{5,2}v_0/\kappa - a_{5,4} \\ 0 & (v_0/\kappa - a_{2,5})/\mu \\ -(v_0\kappa + a_{5,2})\mu & 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{B,3} \\ \mathbf{P}_{B,2} \\ \mathbf{P}_{B,1} \end{bmatrix},$$

где

$$\kappa = \kappa_g/\kappa_h, \quad \mu = b_{2,1}/b_{5,2};$$

$$\mathbf{Q}_{B, row} = [\mathbf{Q}_{B,3} \mid \mathbf{Q}_{B,2} \mid \mathbf{Q}_{B,1}] = \mathbf{C} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}_3} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{P}_{B,2} & \mathbf{P}_{B,1} & \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{P}_{B,1} & \mathbf{I}_2 & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{I}_2 & \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}_B} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -b_{5,2}v_0/\kappa & -b_{2,1} & 0 & 0 & 0 \\ -a_{5,4}\kappa\mu & 0 & 0 & v_0(1/(\kappa\mu) - 1) - a_{2,5}/\mu & 1 & 0 \\ 0 & -a_{2,1}/(\kappa\mu) & v_0(1 - \kappa\mu) - a_{5,2}\mu & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{Q}_{B, col} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{B,3} \\ \mathbf{Q}_{B,2} \\ \mathbf{Q}_{B,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -b_{5,2}v_0/\kappa \\ -a_{5,4}\kappa\mu & 0 \\ 0 & -a_{2,1}/(\kappa\mu) \\ -b_{2,1} & 0 \\ 0 & v_0(1/(\kappa\mu) - 1) - a_{2,5}/\mu \\ v_0(1 - \kappa\mu) - a_{5,2}\mu & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\text{rank } \mathbf{Q}_{B, col} = 2.$$

Столбцы матрицы $\mathbf{Q}_{B, col}$ линейно независимы. Поэтому с помощью алгоритма, изложенного в работе [12], невозможно привести рассматриваемую задачу модального управления по выходу к модальному наблюдению с одним выходом.

Получим решение с помощью *нового метода*, основанного на теореме Кэли–Гамильтона, по формуле (4.6). Используя правый аннулятор

$$\overline{\mathbf{N}}_3^R = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0]^T,$$

рассчитаем векторные блоки (4.4) по формулам (4.2):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}_{C,1} \\ \mathbf{r}_{C,2} \\ \mathbf{r}_{C,3} \end{bmatrix} = \mathbf{N}_3 \mathbf{A}^3 \overline{\mathbf{N}}_3^R = \begin{bmatrix} \eta \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \eta a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{s}_{C,1} \\ \mathbf{s}_{C,2} \\ \mathbf{s}_{C,3} \end{bmatrix} = \mathbf{U}_3^{-1} \overline{\mathbf{P}}_6 \overline{\mathbf{N}}_3^R = - \begin{bmatrix} v_0 s_{1,1} \\ v_0 s_{2,1} \\ s_{1,2} \\ s_{2,2} \\ s_{1,3} \\ s_{2,3} \end{bmatrix},$$

где

$$\begin{bmatrix} s_{1,1} & s_{1,2} & s_{1,3} \\ s_{2,1} & s_{2,2} & s_{2,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{g_3 + v_0 g_2}{\kappa_g} & \frac{v_0^2 h_1 - h_3}{\kappa_h} & \frac{g_2 - v_0 g_1}{\kappa_g} \\ \frac{h_3 + v_0 h_2}{\kappa_h} & \frac{v_0^2 g_1 + g_3}{\kappa_g} & \frac{h_2 + v_0 h_1}{\kappa_h} \end{bmatrix}, \quad (5.8)$$

$$\begin{bmatrix} g_1 & g_2 & g_3 \\ h_1 & h_2 & h_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g + a_{5,2} \rho & (a_{2,1} \rho - a_{2,5} p_6^*) / \mu & a_{2,1} g + a_{2,5} a_{5,2} p_6^* \\ \eta (a p_1^* + p_3^*) & a_{5,4} (a_{5,4}'' + a_{5,2} \eta p_1^*) \mu & \eta (p_5^* - a_{2,1} a_{5,4} p_1^*) \end{bmatrix},$$

$$g = a_{5,4}''' + a_{5,2} a_{5,4} \eta, \quad \rho = \eta (p_2^* + a), \quad a = a_{2,1} + a_{5,4} + a_{2,5} a_{5,2},$$

$$a_{5,4}'' = p_1^* a_{5,4}^2 + p_3^* a_{5,4} + p_5^*, \quad a_{5,4}''' = a_{5,4}^3 + p_2^* a_{5,4}^2 + p_4^* a_{5,4} + p_6^*.$$

Запишем матричные блоки \mathbf{M}_0 и \mathbf{M}_1 , согласно формулам (2.13):

$$\mathbf{M}_0 = \mathbf{C} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_1 = \mathbf{C} \mathbf{A} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -b_{2,1} & 0 \\ 0 & -v_0 \\ v_0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Определим матрицы \mathbf{R}_C и \mathbf{S}_C , формирующие равенство (4.5):

$$\mathbf{R}_C = [\mathbf{r}_{C,1} \ | \ \mathbf{r}_{C,2} \ | \ \mathbf{r}_{C,3}] \begin{bmatrix} p_2^* & p_1^* & 1 \\ p_1^* & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} - [\mathbf{M}_0 \ | \ \mathbf{M}_1] \begin{bmatrix} \mathbf{s}_{C,2} & \mathbf{s}_{C,3} & \mathbf{0}_{2 \times 1} \\ \mathbf{s}_{C,3} & \mathbf{0}_{2 \times 1} & \mathbf{0}_{2 \times 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & \eta p_1^* & \eta \\ s_{1,2} - v_0 s_{2,3} & s_{1,3} & 0 \\ s_{2,2} + v_0 s_{1,3} & s_{2,3} & 0 \end{bmatrix},$$

где

$$s = \rho - b_{2,1} s_{1,3};$$

$$\mathbf{S}_C = [\mathbf{s}_{C,1} \ | \ \mathbf{s}_{C,2} \ | \ \mathbf{s}_{C,3}] = - \begin{bmatrix} v_0 s_{1,1} & s_{1,2} & s_{1,3} \\ v_0 s_{2,1} & s_{2,2} & s_{2,3} \end{bmatrix}.$$

Из формул (5.8) следует, что

$$s_{1,2} - v_0 s_{2,3} = -s_{2,1} \Rightarrow s_{1,2} = v_0 s_{2,3} - s_{2,1},$$

$$s_{2,2} + v_0 s_{1,3} = s_{1,1} \Rightarrow s_{2,2} = s_{1,1} - v_0 s_{1,3}.$$

Поэтому

$$\mathbf{R}_C = \begin{bmatrix} \mathbf{s}^T & \eta \\ \mathbf{S} & \mathbf{0}_{2 \times 1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}_C = -[\mathbf{0}_{2 \times 1} \mid \mathbf{S}] + \begin{bmatrix} 0 & -v_0 \\ v_0 & 0 \end{bmatrix} [\mathbf{S} \mid \mathbf{0}_{2 \times 1}],$$

где

$$\mathbf{s}^T = [s \mid \eta p_1^*], \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} -s_{2,1} & s_{1,3} \\ s_{1,1} & s_{2,3} \end{bmatrix}.$$

Выполнив обращение блочной матрицы по формуле Фробениуса [16]

$$\mathbf{R}_C^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{S}^{-1} \\ \eta^{-1} & -\eta^{-1} \mathbf{s}^T \mathbf{S}^{-1} \end{bmatrix},$$

рассчитаем искомую матрицу \mathbf{F} по формуле (4.6):

$$\mathbf{F} = \mathbf{S}_C \mathbf{R}_C^{-1} = \mathbf{S} \begin{bmatrix} 0 & \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ s\eta^{-1} & p_1^* \end{bmatrix} \mathbf{S}^{-1} \\ -\eta^{-1} & \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -v_0 \\ 0 & v_0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.9)$$

Регулятор (5.9) существует, если, помимо условий полной управляемости (5.6) и полной наблюдаемости (5.7), для матриц (5.5) и полинома (1.3) выполняется условие

$$\underbrace{s_{1,1}s_{1,3} + s_{2,1}s_{2,3}}_{\det \mathbf{S}} \neq 0.$$

Проверим решение (5.9), полученное из необходимого условия (теорема Кэли–Гамильтона), на достаточность следующим образом (для упрощения расчетов). Зададим матрицу регулятора \mathbf{F} в символьном виде:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} f_{1,1} & f_{1,2} & f_{1,3} - v_0 \\ f_{2,1} & f_{2,2} + v_0 & f_{2,3} \end{bmatrix}.$$

Определим коэффициенты p_i , $i = \overline{1, 6}$, характеристического полинома

$$p(\lambda) = \det(\lambda \mathbf{I}_6 - \tilde{\mathbf{A}}) \quad (5.10)$$

матрицы $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} - \mathbf{BFC}$:

$$\begin{aligned} p_1 &= f_{1,2} + f_{2,3}, \\ p_2 &= \Delta_{2,3} - a - b_2 v f_{1,1}, \\ p_3 &= b_{2,1} (\Delta_{3,1} - v_0 f_{2,1}) - a_2 b_5 v f_{2,1} - a p_1^*, \\ p_4 &= a_2 a_5 a_4 - a \Delta_{2,3} + b_{2,1} (v_0 \Delta_{1,2} + a_5 a_4 f_{1,1}) + a_2 b_5 v_2 (\Delta_{1,2} + v_0 f_{1,1}), \\ p_5 &= a_2 a_5 a_4 p_1^* - v_0 a_2 b_5 v_2 \Delta_{3,1} - a_5 a_4 b_{2,1} (\Delta_{3,1} - v_0 f_{2,1}), \\ p_6 &= a_5 a_4 (a_2 a_1 \Delta_{2,3} - v_0 b_{2,1} \Delta_{1,2}), \end{aligned} \quad (5.11)$$

где

$$[\Delta_{1,2} \mid \Delta_{2,3} \mid \Delta_{3,1}] = [f_{1,1} f_{2,2} - f_{2,1} f_{1,2} \mid f_{1,2} f_{2,3} - f_{2,2} f_{1,3} \mid f_{1,3} f_{2,1} - f_{2,3} f_{1,1}]. \quad (5.12)$$

Подставим полученный результат (5.9)

$$\begin{bmatrix} f_{1,1} & f_{1,2} & f_{1,3} \\ f_{2,1} & f_{2,2} & f_{2,3} \end{bmatrix} = \mathbf{S} \begin{bmatrix} 0 & \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ s\eta^{-1} & p_1^* \end{bmatrix} \mathbf{S}^{-1} \\ -\eta^{-1} & \end{bmatrix}$$

в формулы (5.11) и (5.12) для проверки совпадения полиномов (5.10) и (1.3):

$$\begin{aligned}
[\Delta_{1,2} \ \vdots \ \Delta_{2,3} \ \vdots \ \Delta_{3,1}] &= [s_{1,1} \ \vdots \ s \ \vdots \ -s_{2,1}] / \eta, \\
p_1 &= p_1^*, \\
p_2 &= p_2^*, \\
p_3 &= \frac{b_{2,1} \overbrace{(v_0 s_{2,3} - s_{2,1})}^{s_{1,2}} + a_{2,5} b_{5,2} s_{2,3}}{\eta} - a p_1^* = \frac{(v_0^2 b_{2,1} + v_0 a_{2,5} b_{5,2}) h_1 - b_{2,1} h_3 + a_{2,5} b_{5,2} h_2}{\eta \left((v_0^2 + a_{5,4}) b_{2,1} + v_0 a_{2,5} b_{5,2} \right)} - a p_1^* = \\
&= a p_1^* + p_3^* + \frac{a_{2,5} b_{5,2} h_2 - b_{2,1} (a_{5,4} h_1 + h_3)}{\eta \kappa_h} - a p_1^* = p_3^* + (a_{5,4} (a_{2,1} + a_{5,4} - a) + a_{5,2} \eta) \frac{p_1^* b_{2,1}}{\kappa_h} = p_3^*, \\
p_4 &= a_{2,1} a_{5,4} - a \frac{\rho - b_{2,1} s_{1,3}}{\eta} + \frac{b_{2,1} (v_0 s_{1,1} - a_{5,4} s_{1,3}) + a_{2,5} b_{5,2} \overbrace{(s_{1,1} - v_0 s_{1,3})}^{s_{2,2}}}{\eta} = \\
&= a_{2,1} a_{5,4} - a (p_2^* + a) + \frac{b_{2,1} (v_0 s_{1,1} + (a - a_{5,4}) s_{1,3}) + a_{2,5} b_{5,2} s_{2,2}}{\eta} = \\
&= a_{2,1} a_{5,4} - (a_{5,4} + a_{2,5} a_{5,2}) (p_2^* + a) + \frac{a_{5,2} b_{2,1} (g_2 - v_0 g_1) + b_{5,2} (v_0^2 g_1 + g_3)}{\kappa_g a_{5,4}} - \frac{p_6^*}{a_{5,4}} = \\
&= a_{2,1} a_{5,4} - (a_{5,4} + a_{2,5} a_{5,2}) (p_2^* + a) + \frac{g_1 - p_6^*}{a_{5,4}} = p_4^*, \\
p_5 &= a_{2,1} a_{5,4} p_1^* + \frac{v_0 a_{2,5} b_{5,2} s_{2,1} - a_{5,4} b_{2,1} s_{1,2}}{\eta} = \\
&= a_{5,4} a_{2,1} p_1^* + \frac{v_0 a_{2,5} b_{5,2} (h_3 + v_0 h_2) - a_{5,4} b_{2,1} (v_0^2 h_1 - h_3)}{\eta \left((v_0^2 + a_{5,4}) b_{2,1} + v_0 a_{2,5} b_{5,2} \right)} = \\
&= p_5^* + \frac{a_{2,5} b_{5,2} h_2 - b_{2,1} (a_{5,4} h_1 + h_3)}{\eta \kappa_h} v_0^2 = p_5^* + (a_{5,4} (a_{2,1} + a_{5,4} - a) + a_{5,2} \eta) \frac{v_0^2 b_{2,1}}{\kappa_h} p_1^* = p_5^*, \\
p_6 &= \frac{a_{5,4}}{\eta} (a_{2,1} \rho - (a_{2,1} s_{1,3} + v_0 s_{1,1}) b_{2,1}) = \frac{a_{5,4}}{\eta} \left(a_{2,1} \rho - \frac{(v_0^2 + a_{2,1}) g_2 + v_0 (g_3 - a_{2,1} g_1)}{(v_0^2 + a_{2,1}) b_{5,2} - v_0 a_{5,2} b_{2,1}} b_{2,1} \right) = \\
&= \frac{a_{5,4}}{\eta} (a_{2,1} \rho - a_{2,1} \rho + a_{2,5} p_6^*) = p_6^*.
\end{aligned}$$

6. Численное моделирование. Рассмотрим задачу стабилизации орбитальной ориентации, описанную в примере 2, применительно к КА, имеющему осевые моменты инерции $J_x = 7000 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, $J_y = 7200 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, $J_z = 1000 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ и движущемуся с орбитальной угловой скоростью $v_0 = -10^{-3} \text{ с}^{-1}$. Матрицы состояния и управления из записи (5.5) принимают следующие числовые значения:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \vdots & 1 & \vdots & 0 \\ 35.43 \times 10^{-6} & \vdots & 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 & \vdots & 1.886 \times 10^{-3} & \vdots & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & \vdots & 10^{-3} & \vdots & 0 \\ 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 & \vdots & 1 & \vdots & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & \vdots & -1.833 \times 10^{-3} & \vdots & 0 & \vdots & 8.333 \times 10^{-6} & \vdots & 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & \vdots & 0 & \vdots & -10^{-3} & \vdots & 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ -0.1429 \times 10^{-3} & & 0 \\ 1 & & 0 \\ 0 & & 0 \\ 0 & \dots & -0.1389 \times 10^{-3} \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}.$$

Пусть в начальный момент времени вектор состояния контура ориентации КА, содержащий соответственно углы и угловые скорости КА, а также кинетические моменты маховиков в каналах крена и рысканья, в системе единиц СИ равен:

$$\mathbf{x} = [\gamma \ \omega_x \ h_x \ \psi \ \omega_y \ h_y]^T = [0.02 \ 0.0002 \ 2 \ -0.02 \ -0.0002 \ 2]^T.$$

Пример 3 (вещественные полюса). Рассчитаем матрицу регулятора по выходу, обеспечивающую замкнутой системе управления следующие вещественные полюса:

$$\Lambda^* = \{-7.6 \times 10^{-3}, -5.6 \times 10^{-3}, -4.18 \times 10^{-3}, -3.8 \times 10^{-3}, -3.42 \times 10^{-3}, -1.9 \times 10^{-3}\}.$$

Числовое значение матрицы регулятора по выходу (5.9) в этом случае равно

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} -3.14163 & 0.0235 & 0.00273 \\ -19.0409 & 0.1358 & 0.003005 \end{bmatrix}. \tag{6.1}$$

Графики переходных процессов (ПП) при стабилизации орбитальной ориентации КА с управлением по выходу, заданным матрицей регулятора (6.1), представлены на рис. 1.

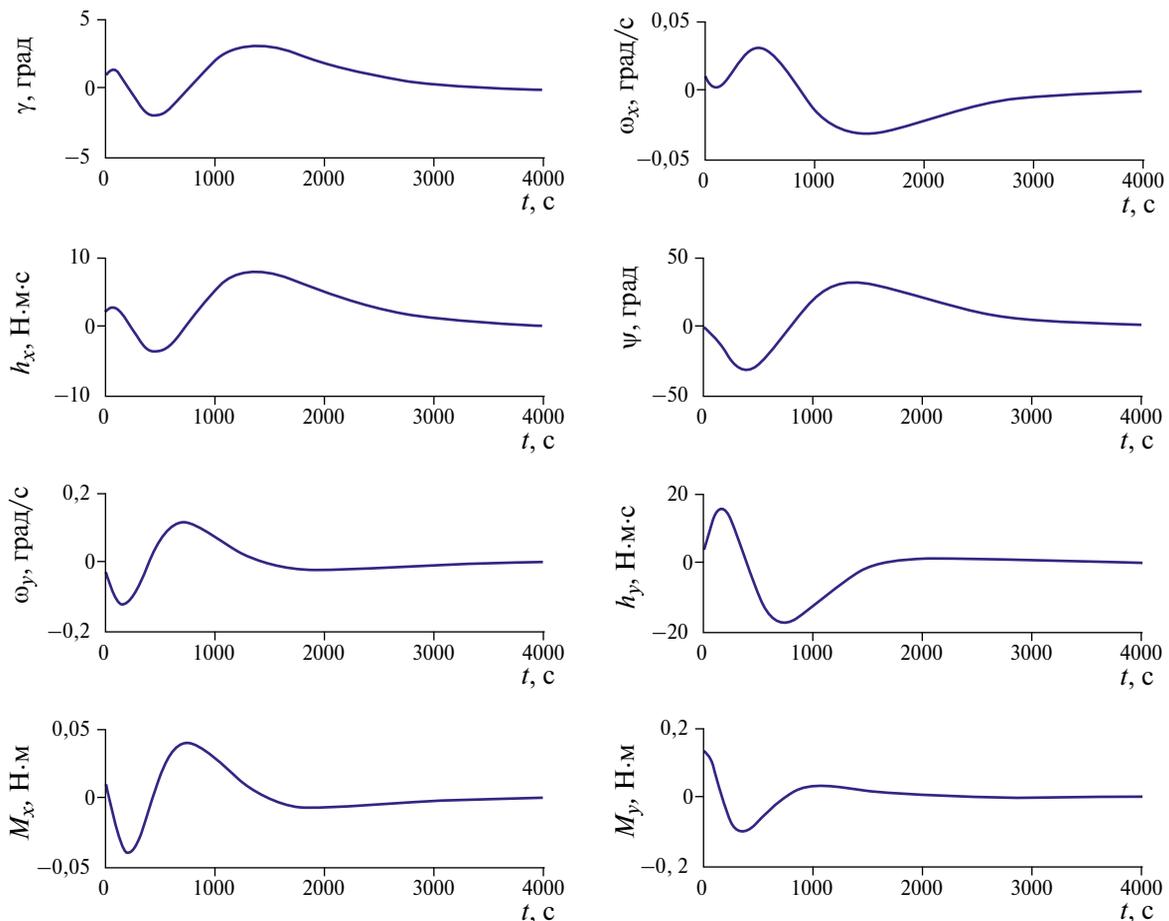


Рис. 1. Переходные процессы при вещественных полюсах.

Пример 4 (комплексно-сопряженные полюса). Рассчитаем матрицу регулятора по выходу, обеспечивающую замкнутой системе управления следующие комплексно-сопряженные полюса:

$$\Lambda^* = \left\{ (-4.6 \pm 1.15i) \times 10^{-3}, (-2.53 \pm 1.15i) \times 10^{-3}, (-2.07 \pm 1.15i) \times 10^{-3} \right\}.$$

Числовое значение матрицы регулятора по выходу (5.9) в этом случае равно:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} -1.4691 & 0.02696 & -0.001275 \\ -4.0801 & 0.07037 & -0.008563 \end{bmatrix}. \quad (6.2)$$

Графики ПП задачи стабилизации орбитальной ориентации КА с управлением по выходу, заданным матрицей регулятора (6.2), представлены на рис. 2.

Графики, приведенные на рис. 1 и 2, показывают, что при вещественных или комплексно-сопряженных полюсах, подобранных должным образом, условия линеаризации уравнений углового движения КА [22] не нарушаются, а длительность ПП не превышает 4000 с.

Заключение. Предложен новый подход к аналитическому синтезу модального управления по выходу линейными стационарными системами. В отличие от существующих подходов, в основе которых лежит преобразование подобия матрицы замкнутой системы управления (в частности, многоуровневая декомпозиция), предлагаемый подход опирается на теорему Кэли–Гамильтона, т.е. на требование о том, что матрица замкнутой системы управления должна удовлетворять желаемому характеристическому полиному – как необходимое условие желаемого размещения полюсов. Сформировано двустороннее степенное матричное уравнение, которому должна удовлетворять матрица регулятора по выходу. Благодаря этому уравнению при расчете матрицы регулятора по выходу одновременно учитываются как входные характеристики системы (матрица управления, модальная управляемость, индекс управляемости), так и ее выходные характеристики (матрица наблюдения, модальная наблюдаемость,

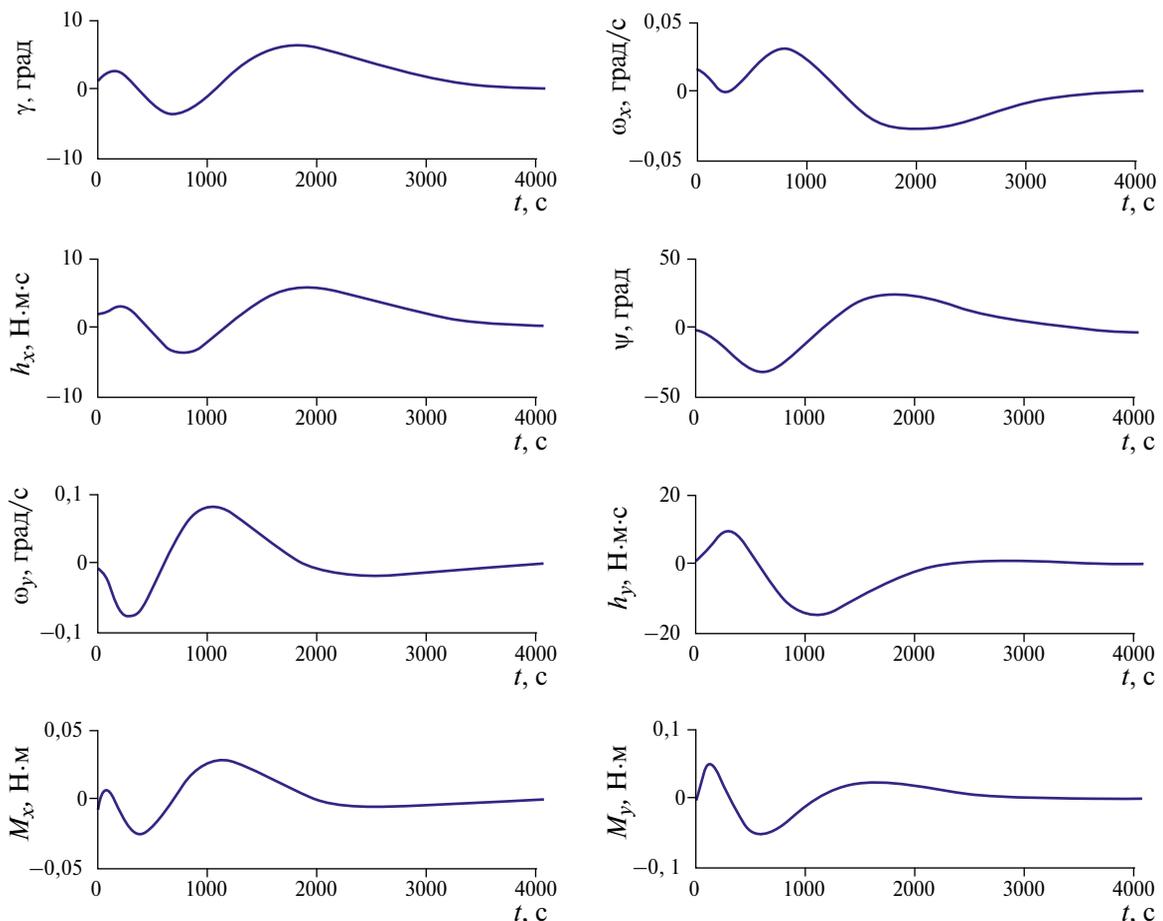


Рис. 2. Переходные процессы при комплексно-сопряженных полюсах.

индекс наблюдаемости). Ввиду нелинейности указанного уравнения относительно матрицы регулятора по выходу его аналитическое решение для систем с произвольными размерностями векторов состояния, управления и наблюдения затруднительно. Предложен способ эквивалентной линеаризации данного уравнения при условии, что порядок системы управления равен произведению числа ее входов и выходов, а индексы управляемости и наблюдаемости принимают наименьшее и наибольшее возможные значения. Показано, что для таких систем решение задачи модального управления по выходу единственно и определяется аналитически с помощью предлагаемого подхода. Применимость подхода не ограничена только системами четвертого порядка с двумя входами и двумя выходами. Также она не зависит от того, возможно ли привести задачу модального управления по выходу к модальному управлению по состоянию с меньшим числом входов или к модальному наблюдению с меньшим числом выходов. Рассмотрены методический и практический примеры модального управления по выходу системами шестого порядка с несколькими входами и несколькими выходами, подтверждающие эффективность предлагаемого подхода.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Zubov N.E., Lapin A.V., Ryabchenko V.N., Proletarsky A.V., Selezneva M.S., Neusyypin K.A. A Robust Control Algorithm of a Descent Vehicle Angular Motion in the Earth's Atmosphere // Appl. Sci. 2022. V. 12. Iss. 2 (731). <https://doi.org/10.3390/app12020731>
2. Lapin A.V., Zubov N.E., Poklad M.N. Stabilizing the Orbital Orientation of a Spacecraft at the Absence of Angles Measurements // AIP Conf. Proc. 2023. V. 2549. Iss. 1 (150016). P. 1–7. <https://doi.org/10.1063/5.0108421>
3. Zubov N.E., Lapin A.V., Mikrin E.A., Ryabchenko V.N. Output Control of the Spectrum of a Linear Dynamic System in Terms of the Van der Woude Method // Doklady Mathematics. 2017. V. 96. I. 2. P. 457–460. <https://doi.org/10.1134/S1064562417050179>
4. Зубов Н.Е., Рябченко В.Н., Лапин А.В. Декомпозиционный метод модального синтеза при управлении ММО-системой с обратной связью по производным состояния // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2024. № 2. С. 1–9. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu35.2024.201>
5. Van der Woude J.W. A Note on Pole Placement by Static Output Feedback for Single-Input Systems // Systems & Control Letters. 1988. V. 11. Iss. 4. P. 285–287. [https://doi.org/10.1016/0167-6911\(88\)90072-2](https://doi.org/10.1016/0167-6911(88)90072-2)
6. Willems J.C., Hesselink W.H. Generic Properties of the Pole Placement Problems // Proc. of the 7th IFAC Congress. 1978. V. 11. Iss. 1. P. 1725–1729. [https://doi.org/10.1016/S1474-6670\(17\)66142-1](https://doi.org/10.1016/S1474-6670(17)66142-1)
7. Wang X. Pole Placement by Static Output Feedback // J. of Math. Systems, Estimation and Control. 1992. V. 2. P. 205–218.
8. Eremenko A., Gabrielov A. Pole Placement by Static Output Feedback for Generic Linear Systems // SIAM J. on Control and Optimization. 2002. V. 41. Iss. 1. P. 303–312. <https://doi.org/10.1137/s0363012901391913>
9. Zubov N.E., Lapin A.V. Reducing the Problem of the Modal Control by Output for Stationary Forth-Order Systems with Two Inputs and Two Outputs to the Control by State for a System with a Single Input // J. Comput. Syst. Sci. Int. 2023. V. 62. Iss. 1. P. 43–60. <https://doi.org/10.1134/S1064230723010124>
10. Zubov N.E., Zybin E.Yu., Lapin A.V. Analytical Synthesis of an Aircraft's Lateral Motion Control by Output at the Lack of Measurements of Slip and Roll Angles // J. Comput. Syst. Sci. Int. 2023. V. 62. Iss. 2. P. 354–361. <https://doi.org/10.1134/S1064230723020193>
11. Zubov N.E., Lapin A.V. On One Approach to the Analytic Synthesis of Modal Control by Output for Fourth-Order Dynamic Systems with Two Inputs and Two Outputs // J. Comput. Syst. Sci. Int. 2024. V. 63. Iss. 4. P. 561–577. <https://doi.org/10.1134/S1064230724700424>
12. Zubov N.E., Lapin A.V. Analytical Solution of the Problem of Modal Control by Output via Reducing to Modal Observation with Fewer Inputs // J. Comput. Syst. Sci. Int. 2024. V. 63. Iss. 2. P. 205–222. <https://doi.org/10.1134/S106423072470014X>
13. Зубов Н.Е., Микрин Е.А., Рябченко В.Н. Матричные методы в теории и практике систем автоматического управления летательных аппаратов. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2016. 666 с.
14. Lapin A.V., Zubov N.E. Generalization of Bass – Gura Formula for Linear Dynamic Systems with Vector Control // Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences. 2020. V. 89. Iss. 2. P. 41–64. <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2020-2-41-64>
15. Лапин А.В., Зубов Н.Е., Пролетарский А.В. Обобщение формулы Аккермана для некоторого класса многомерных динамических систем с векторным входом // Вестн. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2023. № 4 (109). С. 18–38. <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2023-4-18-38>

16. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Физматлит, 2010. 560 с.
17. Zubov N.E., Lapin A.V., Mikrin E.A. Применение метода точного размещения полюсов к решению задачи приведения ориентации космического аппарата в элементах кватернионов // Вестник компьютерных и информационных технологий. 2014. № 3 (117). С. 3–9.
<https://doi.org/10.14489/vkit.2014.03.pp.003-009>
18. Zubov N.E., Lapin A.V., Ryabchenko V.N. Analytical Algorithm for Constructing the Orbital Orientation of a Spacecraft with an Incomplete Measurement of the State Vector Components // J. Comput. Syst. Sci. Int. 2019. V. 58. Iss. 6. P. 969–979.
<https://doi.org/10.1134/S1064230719040178>
19. Желтов С.Ю., Каляев И.А., Косьянчук В.В., Мельник Э.В., Зыбин Е.Ю. Реконфигурация систем управления воздушных судов. М.: РАН, 2021. 204 с.
20. Лапин А.В., Зыбин Е.Ю., Косьянчук В.В. О достижимости штатной динамики полета воздушного судна методом реконфигурации управления, основанным на данных, при отказах приводов // Скоростной транспорт будущего: перспективы, проблемы, решения: Тез. докл. 2-й Междунар. науч.-техн. конф. МАИ. М.: Перо, 2023. С. 171–173.
21. Bajodah A.H., Mibar H. Pole Placement for MIMO LTI Systems via Extended Ackermann and Greville Formulae // IFAC PapersOnLine. 2023. V. 56. Iss. 2. P. 1736–1741.
<https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2023.10.1882>
22. Lapin A.V., Zubov N.E. Analytic Solution of the Problem of Stabilizing Orbital Orientation of a Spacecraft with Flywheel Engines // AIP Conf. Proc. 2021. V. 2318. Iss. 1 (130009). P. 1–8.
<https://doi.org/10.1063/5.0036155>